УДК 519.21

В. К. Ясинський, І. В. Юрченко, У. М. Кисілюк (Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

It is obtained sufficient conditions for the existence of a strong solution (almost surely) of the stochastic diffusion equation with finite aftereffect under external random processes of arbitrary nature, and found sufficient conditions for the existence of even points of such equations.

У роботі одержано достатні умови існування майже напевно сильного розв'язку дифузійного стохастичного рівняння зі скінченною післядією під дією зовнішніх випадкових процесів довільної природи, а також знайдені достатні умови існування парних моментів таких рівнянь.

1. Вступ. При розгляді диференціальних рівнянь з випадковими функціями слід розглядати два випадки. У першому випадку випадкові функції, що входять у диференціальне рівняння можна розв'язувати за допомогою класичних методів теорії звичайних диференціальних рівнянь. У другому випадку доводиться розглядати диференціальні рівняння, що містять узагальнені випадкові процеси типу «білого шуму». Такі рівняння можна отримати в результаті граничного переходу від рівнянь, які описують системи, на які діють швидкозмінні впливи (наприклад, хаотичний тепловий рух молекул, що діють на частинку, броунівський рух тощо). До таких рівнянь класичні методи застосовувати неможливо, тому для них розроблено спеціальну теорію стохастичних диференціальних рівнянь.

Термін «стохастичне диференціальне рівняння» був започаткований С. Н. Бернштейном. Й. І. Гіхман [1] вперше обгрунтував граничний перехід. У своїх роботах він дає загальне поняття стохастичного диференціального рівняння та обгрунтовує рівняння А.М. Колмогорова для перехідних імовірностей розв'язків.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння у відомих монографіях [1], [5], [6], [11] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [3], [7], [8], [13], [14] (див. наведену велику бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотики сильного розв'язку для математичних моделей складних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри (див., наприклад, роботи [4], [10], [12], [15] та ін.).

У даній роботі розглядається клас дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з урахуванням зовнішніх випадкових збурень іншої природи, відмінної від вінерівського процесу, вивчається питання існування та єдиності сильного розв'язку для цього класу рівнянь.

2. Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ t\geq 0\},\ \mathbb{P})$ задано стохастичне диференціально-функціональне рівняння Іто (дифузійне) під дією зовнішніх випадкових збурень (СДФРзЗЗ)

$$dx\,(t) = f_1\,(t,\omega)\,a\,(t,x_t)\,dt + f_2\,(t,\omega)\,b\,(t,x_t)\,dw(t,\omega) \tag{1}$$

$$x_t|_{t=0} \equiv x\,(t+\theta)\,|_{t=0} = \varphi(\theta) \in \mathbb{R}^1; -\tau \leq \theta \leq 0, \tag{2}$$

де $f_j\,(t,\omega)\,,\ j=1,2$ — одновимірні випадкові процеси із заданим законом розподілу

$$F_{jt}\,(f_j\,(t,\omega]) \equiv \mathbb{P}\,\{\omega : f_j\,(t,\omega) < x\}\,, \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{3}$$

Коефіцієнт зносу $a : [0,T] \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^1$, де $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}([\tau,0])$ — простір функцій, які не мають розривів другого роду.

Коефіцієнт дифузії $b : [0;T] \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, $a,\ b$ – вимірні за сукупністю змінних; $x_t \equiv \{x\,(t+\theta)\}\,,\ \theta \in [-\tau, 0]\,, -\infty \leq -\tau \leq 0$.

Означення 1. Випадковий процес $x\,(t) \equiv x\,(t,\omega) \in \mathbb{D}$ назвемо сильним розв'язком СДФРзЗЗ (1), (2), якщо $x\,(t)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірним випадковим процесом $\forall\ t \in [0,T]$ і задовольняє стохастичне інтегральне рівняння

$$x\,(t) = \varphi\,(0) + \int_0^t f_1\,(s)\,a\,(s,x_s)ds + \int_0^t f_2\,(s)\,b\,(s,x_s)dw\,(s) \tag{4}$$

за початковою умовою (2), де $f_j\,(s) \equiv f_j(s,\omega)$.

У просторі $\mathbb{D}$ для $\varphi \epsilon \mathbb{D}$ визначимо норму $\|\varphi\,(\varphi)\| = sup_{\theta\epsilon[-r,0]}\,|\varphi(\theta)|$.

Зауважимо, що у рівномірній нормі простір Скорохода $\mathbb{D}$ [1] є неповним простором. Тому всі результати будуть мати місце в розширеному просторі $\overline{\mathbb{D}}$ який надалі будемо позначати $\mathbb{D}$.

3. Про єдиність сильного розв'язку СДФРзЗЗ. Доведемо спочатку єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку задачі Коші (1), (2).

Теорема 1. *Нехай на ймовірнісному базисі* ($\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}\,, \mathbb{P}$) *задано СДФРзЗЗ* (1), (2), *коефіцієнти якого задовольняють умови:*

1) *функції $a(t,x)$, $b(t,x)$ визначені для $t \in [0,T]$, $x \in (-\infty,+\infty)$ та вимірні за сукупністю змінних;*

2) *існує така стала $0 < K < \infty$, що $\forall t \in [0,\ T]$, $x,y \in (-\infty,+\infty)$ справджується умова Ліпшиця та умова обмеженості*

$$|a\,(t,x) - a\,(t,y)| + |b\,(t,x) - b\,(t,y)\,| \leq K_1|x-y|, \tag{5}$$

$$|a(t,x)|^2 + |b\,(t,x)\,|^2 \leq K_2(1+|x|^2); \tag{6}$$

3) *$f_j\ (t) \equiv f_j\ (t,\omega)$, $j=1,2$ — випадкові процеси зі своїми законами розподілу* (3)*;*

4) *виконуються $\mathbb{E}\left\{{f_1}^2\,(t) \leq K_3\right\}; \mathbb{E}\left\{{f_2}^4\,(t) \leq K_4\right\}; \mathbb{E}\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання;*

5) *попарно незалежні випадкові процеси $f_j\,(t)$, $j=1,2$ не залежать від вінерівського процесу $w(t) \equiv w\,(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$, при цьому $\mathbb{E}\ \{\|x_0\,(\theta)\|\} < \mathbb{K} < \infty$;*

6) *інтеграли у (4) є неперервні по t майже напевно.*

Тоді існує единий розв'язок задачі Коші (1), (2) *з точністю до стохастичної еквівалентності.*

Зауваження 1. Існування єдиного розв'язку задачі Коші (1), (2) з точністю до стохастичної еквівалентності означає [2] наступне: якщо $x_1(t) \equiv x_1(t,\omega)$ та $x_2(t) \equiv x_2(t,\omega)$ — два сильних розв'язки задачі Коші (1), (2), то

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \underset{0\le t\le T}{sup} \left|x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right)\right| \quad = 0\right\} = 1. \tag{7}$$

Доведення. Якщо $x_i(t) \equiv x_i\left(t,\omega\right) \in \mathbb{R}^1$ два розв'язки (1), (2), то для $i = 1, 2$ матимемо інтегральні рівняння:

$$x_i\left(t\right) = x_i\left(0\right) + \int_0^t f_1\left(s\right) a\left(s, x_s\right) ds + \int_0^t f_2\left(s\right) b\left(s, x_s\right) dw\left(s\right). \tag{8}$$

Віднімемо вираз (8), для $x_1(t)$, вираз (8), для $x_2(t)$, піднесемо до квадрату ліву та праву частину виразу для $x_1(t)$- $x_2(t)$, обчислимо вірно математичне сподівання $\mathbb{E}\{|x_1\left(t\right) - x_2(t)|^2\}$, в результаті матимемо:

$$\mathbb{E}\left\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\right\} = \mathbb{E}\left[\int_0^t f_1(s,\omega)(a\left(s, x_{1_s}\right) - a\left(s, x_{2_s}\right)) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t f_2\left(s,\omega\right)\left(b\left(s, x_{1_s}\right) - b\left(s, x_{2_s}\right) dw(s)\right)\right]^2. \tag{9}$$

Уведемо позначення $a_i\left(s\right) \equiv a\left(s,\ x_{i_s}\right),\ b_i\left(s\right) \equiv b_i\left(s, x_{i_s}\right),\quad i = 1, 2$. Очевидна нерівність $\left(a+b\right)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$. Властивість математичного сподівання від квадрату інтегралу Іто, як функції верхньої межі [1], [2] дає рівність

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t l\left(s\right) dw\left(s\right)\right)^2\right\} = \int_0^t \mathbb{E}\left\{l^2(s)\right\} ds,$$

де $l(s) \equiv l(s,\omega)$.

Враховуючи вище згадане зауваження, матимемо:

$$\mathbb{E}\left\{\left|x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right)\right|^2\right\} \le 2\mathbb{E}\left[\int_0^t f_1\left(s,\omega\right)\left(a_{1_s} - a_{2_s}\right) ds\right]^2 +$$

$$+2\int_0^t \mathbb{E}\left[f_2(s)\left(b_{1_s} - b_{2_s}\right)\right]^2 ds. \tag{10}$$

Для доданку під знаком $\mathbb{E}\{\circ\}$ виразу (10) використаємо нерівність Коші-Буняковського [7]

$$\left(\int_0^t \xi\eta\right)^2 \le \int_0^t \xi^2 ds \int_0^t \eta^2 ds,$$

де $\xi \equiv \xi\left(\omega\right) \in \mathbb{R}^1$; $\eta \equiv \eta\left(\omega\right) \in \mathbb{R}^1$. Для другого доданку нерівність Гельдера [7], [3] $\mathbb{E}\{f_1\ f_2\} \le (\mathbb{E}\{f_1^p\})^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}\{f_2^q\})^{\frac{1}{q}}$ при $p = q = 2$, тобто

$$\mathbb{E}f_2^2\left(s\right)\left[b\left(s, x_{1_s}\right) - b(s, x_{2_s})\right]^2 \le \left(\mathbb{E}\left\{\left(f_2^2(s)\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left\{\left(b_1\left(s\right) - b_2\left(s\right)\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \ =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left\{f_2^4\left(s\right)\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbb{E}\{(b_1\left(s\right)-b_2(s))^4\}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В результаті одержимо нерівність

$$\mathbb{E}\{|x_1\left(t\right)-x_2\left(t\right)|^2\} \leq 2\mathbb{E}\{\int_0^t f_1^2\left(s\right)ds \cdot \int_0^t \left(a_1\left(s\right)-a_2(s)\right)^2 ds +$$

$$+2\int_0^t \left(\mathbb{E}\left\{f_2^4\left(s\right)\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left\{\left(b_1\left(s\right)-b_2\left(s\right)\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{2}} ds \leq$$

$$\leq 2T \cdot K_3 \cdot K_1^2 \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1\left(s\right)-x_2\left(s\right)|^2\right\} ds + 2 \cdot K_4^{\frac{1}{2}} \cdot K_1^4 \cdot \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1\left(s\right)-x_2\left(s\right)|^2\right\} ds \leq$$

$$\leq L\int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1\left(s\right)-x_2\left(s\right)|^2\right\} ds, \tag{11}$$

де $L \equiv 2K_1^2\left(TK_3+\sqrt{K_4}\cdot K_1^2\right)$. Має місце [1] наступне твердження

Лема. *Нехай $\varphi(t)$ та $\alpha(t)$ вимірні обмежені функції та при деякому $L>0$ виконується нерівність $\varphi(t) \leq \alpha\left(t\right) + L\int_0^t \varphi(s)ds$.*

Тоді

$$\varphi(t) \leq \alpha\left(t\right) + L\int_0^t \varphi\left(s\right)\exp\left(-L\left(t-s\right)\right)ds. \tag{12}$$

Доведення. Позначимо праву частину у (12) через

$$\psi\left(t\right) \equiv \alpha\left(t\right) + L\int_0^t \varphi\left(s\right)\exp\left(-L\left(t-s\right)\right)\, ds. \tag{13}$$

Зрозуміло, що $\psi\left(t\right)$ задовольняє задачу Коші

$$\psi\left(t\right) = \alpha\left(t\right) + L\int_0^t \psi\left(s\right)ds, \quad \psi\left(0\right) = \alpha(0). \tag{14}$$

Позначаючи $\triangle\left(\mathrm{t}\right) \equiv \psi\left(\mathrm{t}\right) - \alpha(\mathrm{t})$, можемо записати:

$$\triangle(t) \geq L\int_0^T \triangle(s)ds \geq L^2\int_o^t\int_0^s \triangle\left(u\right)du =$$

$$= L^2\int_0^t (t-u)\triangle(u)du \geq L^3\int_0^t (t-u)\int_0^u \triangle\left(s\right)dsdu =$$

$$= L^3\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\triangle(s)ds \geq \cdots \geq \frac{L^n}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}\triangle(s)ds.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^n}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}\triangle\left(s\right)ds = 0,$$

тоді $\triangle(t) \geq 0$, тобто $\psi\left(t\right)-\alpha(t) \geq 0$. Отже, виконується (12). Лему 3 доведено.

Продовжимо доведення теореми. Використаємо нерівність (11), тобто

$$\mathbb{E}\{|x_1\left(t\right)-x_2(t)|^2\} \leq L\int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1\left(s\right)-x_2(s)|^2\right\} ds,$$

$$\varphi(t) \equiv \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\}. \tag{15}$$

Якщо взяти $\alpha(t) \equiv 0$ в лемі 1 з $L > 0$, одержимо:

$$0 \leq \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} \leq L \int_0^t \exp\left(-L(t-s)\right) \mathbb{E}\left\{|x_1(t) - x_2(t)|\right\} ds.$$

Остання нерівність має місце при

$$\mathbb{E}\left\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\right\} = 0. \tag{16}$$

Оскільки $x_1(t) - x_2(t)$є мартингалом [4], то з (16) випливає $\forall t \in [0,\ T]$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : |x_1(t) - x_2(t)|\right\} = 1.$$

Отже, для довільної зліченної підмножини N відрізку $[0,T]$ виконується рівність

$$\mathbb{P}\left\{\omega :\ \underset{t\in N}{sup}\,|x_1(t) - x_2(t)|\ = 0\right\} = 1.$$

Якщо N всюди щільне на $[0,T]$, то з неперервності майже напевно $x_1(t)$ та $x_1(t)$ випливає

$\mathbb{P}\left\{\omega :\ \ sup_{0\leq t\leq T}|x_1(t) - x_2(t)|\ = 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\omega : sup_{t?N}|x_1(t) - x_2(t)\ | = 0\right\} = 1$, що доводить теорему 1.

Зауваження 1. Неперервність $x_1(t)$ та $x_2(t)$ майже напевно, як сильних розв'язків задачі Коші (1), (2), наведемо нижче у теоремі 2.

4. Про існування сильного розв'язку задачі Коші з простору Скорохода. Нехай виконуються умови задачі (1), (2) (теорема 1).

Теорема 2. *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ \ t \geq 0\}, \mathbb{P})$ *задана задача Коші* (1), (2), *для якої виконуються умови 1) — 6) теореми 1.*
Тоді:

A) розв'язок задачі (1), (2) $x(t)$ *майже напевно неперервний для довільного* $t \in [0,T]$ *та* $x(t)\,|_{t=0} = x(0)$.

B) $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\ \left\{|x(t)|^2\right\} < \infty$.

Доведення. A) Покладемо $x_0(t) = x(0)$, тоді $(n+1)$-е та n-те наближення для розв'язку (4) задачі (1), (2) набувають вигляду

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s)\, a(s, x_n(s))\, ds + \int_0^t f_2(s)\, b(s, x_n(s))\, dw(s), \tag{17}$$

$$x_n(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s)\, a(s, x_{n-1}(s))\, ds + \int_0^t f_2(s)\, b(s, x_{n-1}(s))\, dw(s). \tag{18}$$

Віднімемо від $x_{n+1}(t)$ за рівністю (17) $x_n(t)$ за рівністю (18), піднесемо до квадрату та, обчислюючи математичне сподівання, одержимо

$$\mathbb{E}\left\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right\} = \mathbb{E}\{\int_0^t f_1(s)(a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))\}ds +$$

$$+ \int_0^t f_2(s)[b(s, x_n(s)) - b(s,\ x_{n-1}(s))\, dw(s)]^2 \leq L \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2\right\} ds, \tag{19}$$

де $L = 2K_1^2(TK_3 + \sqrt{K_1} \cdot K_1^2)$.

Інтеруючи нерівність (19) $n-1$ разів, одержимо оцінку з L вигляду

$$\mathbb{E}\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \le L \int_0^t \frac{(t-s)}{(n-1)!} \mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\right\} ds,$$

де

$$\mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\right\} = \mathbb{E}[\int_0^t f_1(s) a(s, x(0)) ds]^2 + \mathbb{E}\int_0^t f_2^2(s)\, b^2(s, x(0))\, ds.$$

Враховуючи умову (6) теореми 1, одержимо з вище записаної рівності

$$\mathbb{E}\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\} \le LTK_2^2(1 + \mathbb{E}\{|x(0)|^2\}).$$

Тому існує стала C така, що

$$\mathbb{E}\left\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right\} \le C\frac{(LT)^n}{n!}, \tag{20}$$

де $C = LTK_2^2(1 + \mathbb{E}\left\{|x(0)|^2\right\})$.

Уведемо простір $\mathbb{H}_2[0, T]$, як простір випадкових функцій $f(t, \omega)$, визначений для $\forall\ t \in [0,\ T]$ та при кожному $t \in [0, T]$ вимірних відносно $\mathcal{F}_t$ з імовірнісного базису $(\Omega,\ \ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ \ t \ge 0\}, \mathbb{P})$, для яких

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\ \int_0^T f^2(t) dt < C_1 < \infty\right\} = 1.$$

Лема 4. *Нехай* $f(t) \in \mathbb{H}_2\ [0, T]$ *та* $\int_0^T \mathbb{E}\left\{|f(t)|^2\right\} ds < \infty$.

Тоді майже напевно сепарабельний процес $\mathbb{I}(t, \omega) = \int_0^t f(s) dw(s)$*неперервний за* $t \in [0,\ T]$, *а також виконуються нерівності [4]*

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^T f(s)\, dw(s)\right| > a\right\} \le \frac{1}{a^2}\int_0^T \mathbb{E}\left\{|f(t)|^2 dt\right\};$$

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t f(s)\, dw(s)\right|^2\right\} \le 4\int_0^T \mathbb{E}\left\{|f(t)|\, dw\right\}.$$

Продовжимо доведення теореми 2. Зауважимо, що

$$\sup\nolimits_{t\in[0,T]} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \quad \le \int_0^T |a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))|\, ds +$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (b(s, x_n(s)) - b(s, x_{n-1}(s))) dw(s)|.$$

Тоді слід використати нерівність Коші-Буняковського, лему 4, а також умову Ліпшиця, в результаті одержимо нерівність

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \ |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right\} \le 2T\int_0^t K_1^2 \mathbb{E}\left\{|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2\right\} ds +$$

$$+8K_1^2\int_0^T \mathbb{E}\left\{|x_n(t)-x_{n-1}(t)|^2\right\}ds \le \frac{C_1L^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!},$$

де $C_1 = K_1^2(2T+8)$.

Якщо зауважити, що збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{\omega : \sup_{t\in[0,T]}|x_{n-1}(t)-x_n(t)| > \frac{1}{n^2}\} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1L^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!}n^4,$$

тоді з цього факту випливає майже напевно рівномірна збіжність ряду

$$x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[x_{n+1}(t)-x_n(t)\right].$$

Сума цього ряду є майже напевно рівномірною границею $x_n(t)$, а це означає, що $x_n(t)$ збігається до деякого процесу $x(t)$ з імовірністю 1.

Якщо перейти до границі у рівності (18) при $n\to\infty$, то можна стверджувати, що $x(t)$ є розв'язком рівняння (1), при цьому $x(t)$ є вимірний відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_{t_0}$, $\mathcal{F}_t$ є мінімальною σ-алгеброю, відносно якої вимірні $x(0)$, $w(s)$, $f(t)$, $j=1,2$, при $s\le t$. Відносно цієї σ-алгебри вимірні всі $x_n(t)$, $f_j(t)$, $j=1,2$, а, отже, вимірна границя $\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$.

Належність $x(t)$ простору $\mathbb{D}$ випливає з того, що $x(t)$ майже напевно є границею процесів з $\mathbb{D}$. Доведення твердження А завершено.

В) Очевидна нерівність

$$\mathbb{E}\left\{x_n^2(t)\right\} \le 3\mathbb{E}\left\{x^2(0)\right\} + \mathbb{E}\left\{\left[\int_0^t f_1(s)\,a(s,x_{n-1}(s))\,ds\right]^2\right\} +$$

$$+\mathbb{E}\left\{\left[f_2(t)\,b(s,x_{n-1}(s))\,dw(s)\right]^2\right\} \le 3\mathbb{E}\left\{x^2(0)\right\} + 3L\int_0^t \mathbb{E}\left\{x_{n-1}^2(s)\right\}ds. \quad (21)$$

Застосовуючи оцінку (21), одержимо

$$\mathbb{E}\left\{x_n^2(t)\right\} \le 3\mathbb{E}\left\{x^2(0)\right\} + 3\mathbb{E}\{x^2(0)\,3LT + (3L)^2\int_0^t (t-s)\,\mathbb{E}\left\{x_{n-2}^2(s)\right\}ds \le$$

$$\le 3\mathbb{E}\left\{x^2(0)\right\} + 3L + 3\mathbb{E}\left\{x^2(t)\right\} + 3\mathbb{E}\left\{x^2(0)\right\}\frac{(3Lt)^2}{2} + \cdots \le 3\mathbb{E}\left\{x^2(0)\right\}e^{3Lt}.$$

Якщо перейти до границі при $n\to\infty$, а потім обчислити sup по $t\in[0,T]$, тоді переконаємося в справедливості нерівності

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\{x^2(t)\} \le 3\mathbb{E}\{x^2(0)\}e^{3LT}.$$

Теорема 2 повністю доведена.

5. Про існування парного моменту розв'язку задачі. Два вище доведених твердження дають достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку СДФРзЗЗ (1), (2) за заданими початковими умовами.

Теорема 3. *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ \ t\ge 0\}, \mathbb{P})$ *задана задача* (1), (2), *для якої виконуються умови:*

1) *коефіцієнти* (1) *визначені та вимірні* $\forall t \in [0,T], \forall x \in (-\infty, \infty)$;

2) *для деякого* $\mathbb{K}_1 > 0$ *виконана нерівність* $|a(t,\ \ x_t)|^2 + |b(t,x_t)|^2 \le K_1(1 + \|x_t\|)$;

3) *випадкові процеси* $f_j(t)$, $j = 1,\ 2$ *визначені та неперервні відносно* $\forall t \in [0,T]$;

4) *існують* $\mathbb{E}\{f_2^4(t)\} < K_3 < \infty$; $\mathbb{E}\{f_1^2(t)\} < K_2 < \infty$;

5) *для довільного* $N > 0$ *існує стала* $L_N > 0$, *що для* $\|x_t\| \le N$; $\|y_t\| \le N$ *виконується нерівність Ліпшиця* $|a(t,\ x_t) - a(t,y_t)| + \|b(t,x_t) - b(t,y_t)\| \le L_N \|x_{t-}y_t\|$.

6) $\mathbb{E}\left\{x(0)^{2m}\right\} < \infty$, $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

Тоді знайдеться стала C, *яка залежить лише від* m, K_j, $j = \overline{1,3}$ *та* $T > 0$, *для якої справедлива нерівність*

$$\mathbb{E}\left\{|x(t)|^{2m}\right\} \le \mathbb{E}\left\{\left[1 + (x(0))^{2m}\right] e^{Ct}\right\}. \tag{22}$$

Доведення. Покладемо $x_N(0) = x(0)$ для $\|x_0(0)\| \le N$; $x_N(0) = N sign\ x(0)$ для $\|x(0)\| > N$; $a_n(t,x_t) = a(t,x_t)$ для $\|x_t\| \le N$; $a_N(t,x_t) = a(t, N sign\ x_t)$ при $\|x_t\| > N, b_N(t,x_t) = b(t,x_t)$ для $\|x_t\| \le N$; $b_N(t,x_t\ ) = b(t, N sign\ x_t)$ для $\|x_t\| > N$; $|f_j(t,w)| \le N$.

Позначимо $x_N(t)$ через розв'язок рівняння

$$dx_N(t) = x_N(0) + a_N(t,\ x_{tN})\,dt + b_n(t,x_{tN})dN(t) \tag{23}$$

за початковою умовою $x_{Nt}|_{t=0} = \varphi(\theta)$, $\quad -2 \le \theta \le 2$.

Для задачі Коші рівняння (23) виконуються умови теорем 1, 2, тому існує єдиний розв'язок майже напевно рівняння (23) за умовами A), B) теореми 2.

За формулою Іто [2], [13] маємо для цілого $m > 0$:

$$|x_N(t)|^{2m} = |x_N(0)|^{2m} + \int_0^t [f_1(s)\,2m(x_N(s))^{2m-1} a_N(s,x_{sN}) +$$

$$+ m(2m-1)(x_N(s))^{2m-2} b_N^2(s,x_{sN})]ds + \int_0^t 2m(x_N(s))^{2m-1} b_N(s,x_{sN})\,dw(s). \tag{24}$$

Зауважимо, що справджується (23), для якого $\mathbb{E}\{[x_N(0)]^{2m}\} < \infty$, де $a_N(t,x_t)$, $b_N(t,x_t)$ обмежені, тоді $\mathbb{E}\left\{[x_N(t)]^{2m}\right\} < \infty$.

Обчислимо математичне сподівання від (24), в результаті одержимо

$$\mathbb{E}\left\{[x_N(t)]^{2m}\right\} = \mathbb{E}\{[x_N(0)]^{2m}\} +$$

$$+ \int_0^t \mathbb{E}\{[2mf_1(t)\,a_N(s,x_{sN})\,x_N^{2m-1}(s) + m(2m-1)f_2(t)b_N^2(s,x_{tN}(s))]\}\cdot$$

$$\cdot x_{sN}^{2m-1} ds \le \mathbb{E}\{[x(0)]^{2m} + (2m+1)mK^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(1 + x_n^2(s)[x_N(s)]^{2m-2} ds\}.$$

Врахувавши нерівність $[x_N(s)]^{2m-2} \leq 1 + [x_N(s)]^{2m-1}$, матимемо нерівність

$$\mathbb{E}\{[x_N(t)]^{2m}\} \leq \mathbb{E}\{[x(0)]^{2m}\} + (2m+1)mK^2 \int_0^t \left\{1 + 2\mathbb{E}\{[x_N(s)]^{2m}\}\right\} ds.$$

З леми 4 та останньої нерівності випливає нерівність

$$\mathbb{E}[x_N(t)]^{2m} \leq \mathbb{E}[x(0)]^{2m} + m(2m+1)K^2t + 2m +$$

$$+K^2 \int_0^t e^{2m(2m+1)K^2(t-s)} \left[\mathbb{E}(x(0))^{2m} + sm(2m+1)K^2\right] ds\ . \qquad (25)$$

Якщо вибрати $c = 2m(m+1)K^2$, тоді нерівність (22) випливає з (25). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай $f(t) \in H_2[0,T]$ та при $m \in \mathbb{N}$*

$$\int_0^t \mathbb{E}\left\{f^{2m}(t)\right\} dt < \infty.$$

Тоді

$$\mathbb{E}[\int_0^T f(t,\omega)dw(t,\omega)]^{2m} \leq [m(2m-1)]^{m-1}T^{m-1} \int_0^T \mathbb{E}\left\{f^{2m}(t)\right\} dt. \qquad (26)$$

Доведення. Якщо застосувати формулу Іто [2] до функції $\varphi(x) = x^{2m}$ (m — ціле невід'ємне число) та $\xi(t,\omega) \equiv \xi(t)$ має стохастичний диференціал $d\xi(t) = \xi(0) + f(t)\,dw(t)$, тоді

$$\left[\int_0^t f(s)dw(s)\right]^{2m} = 2m \int_0^t \left(\int_0^s f(z)\,dw(z)\right)^{2m-1} f(s)\,dw(s) + \frac{2m(2m-1)}{2}\cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left[\int_0^s f(z)\,dw(z)\right]^{2m-2} f^2(s)\,ds.$$

Нехай $f(s) = f_n(s)$ — обмежена сталою та є простою функцією. Тоді легко бачити, що $\int_0^T \mathbb{E}\left(\int_0^s f_n(z)\,dw(z)\right) f_n^2(s)\,ds < \infty$.
Значить,

$$\mathbb{E}[\int_0^t f_n(s)dw(s)]^{2m} = \frac{2m(2m-1)}{2} \int_0^t \mathbb{E}\left[\int_0^s f_n(z)\,dw(z)\right]^{2m-1} f_n^2(s)\,ds. \qquad (27)$$

Застосувавши до (27) нерівність Гельдера, матимемо

$$\mathbb{E}[\int_0^T f_n(s)dw(s)]^{2m}$$

$$\leq \frac{2m(m-1)}{2}\left\{\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_0^t f_n(z)\,dw(z)\right]^{2m} dt\right\}^{\frac{2m-1}{2}} \cdot \left\{\int_0^T \mathbb{E}f_n^{2m}(s)\,ds\right\}^{\frac{2}{2m}};$$

$$\mathbb{E}[\int_0^T f_n(t)dw(t)]^{2m} \leq$$

$$\leq \frac{2m\,(m-1)}{2}\left\{\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_0^T f_n\,(s)\,dw\,(s)\right]^{2m} dt\right\}^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{\int_0^T \mathbb{E}f_n^{2m}\,(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{m}}. \qquad (28)$$

Далі піднесемо до степеня m нерівність (28) та, скорочуючи дві частини одержаної нерівності на$\{\mathbb{E}[\int_0^T f_n(s)dw(s)]^{2m}\}^m$, одержимо нерівність

$$\mathbb{E}[\int_0^T f_n(t,\omega)dw(t,\omega)]^{2m} \leq [m(2m-1)]^{m-1}\int_0^T \mathbb{E}\left\{f_n^{2m}\,(t,\omega)\right\}dt.$$

Залишиться перейти до границі при $n\to\infty$ в останній нерівності, що дає нерівність (26) теореми 4. Доведення завершено.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді існує стала* $\overline{K} \equiv \overline{K}\,(m,\ K_1, K_2, K_3, T)$*, для якої* $\mathbb{E}[x\,(t)-x(0)]^{2m} \leq \overline{K}\left[\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\right]e^{ct}t^m$.

Доведення. З інтегральної нерівності матимемо

$$\mathbb{E}[x\,(t)-x\,(0)]^{2m} =$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^t f_1\,(s,\omega)\,a\,(s,x\,(s))\,ds + \int_0^t f_2\,(s,\omega)\,b\,(s,x\,(s))\,dw\,(s)\right]^{2m} \leq$$

$$\leq 2^{2m-1}\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^t f_1\,(s,\omega)\,a\,(s,x\,(s))\,ds\right]^{2m} + \mathbb{E}\left[\int_0^t f_2(s,\omega)b(s,x(s))dw(s)\right]^{2m}\right\}.$$

Використаємо нерівність Гельдера та теорему 4. В результаті матимемо

$$\mathbb{E}[x\,(t)-x(0)]^{2m} \leq 2^{2m-1}\left[t^{2m-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[f_1\,(s,\omega)\,a\,(s,x\,(s))\right]\right]^{2m} ds +$$

$$+t^{m-1}[m(2m-1)]^m\mathbb{E}\int_0^t f_2^{2m}\,(s,\omega)\ \ b^{2m}(s,x(s))ds$$

Значить, існує стала $\overline{K}$, що

$$\mathbb{E}[x\,(t)-x(0)]^{2m} \leq \overline{K}t^{m-1}\int_0^t \mathbb{E}(1+x^2(s))^m ds \leq$$

$$\leq \overline{K}t^{m-1}\int_0^t \left[2^{m-1}+2^{m-1}\mathbb{E}x^{2m}\,(s)\right]ds \leq 2^{m-1}\overline{K}t^{m-1}\times$$

$$\times\int_0^t \left[1+\left(1+\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\right)e^{cs}\right]ds = 2^m\overline{K}t^m + 2^{m-1}t^m\overline{K}\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\frac{e^{ct}+1}{ct} \leq$$

$$\leq 2^m\overline{K}t^m\left[1+\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\right]e^{ct}.$$

В останній нерівності застосували очевидне співвідношення $\frac{e^x-1}{x} \leq e^x$ для $x>0$. Теорема 5 доведена.

Висновки. У роботі одержано достатні умови існування майже напевно сильного розв'язку дифузійного стохастичного рівняння зі скінченною післядією під дією зовнішніх випадкових процесів довільної природи, а також знайдені достатні умови існування парних моментів таких рівнянь.

Список використаної літератури

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения.— Киев: Наукова думка,1982.— 612 с.
2. *Ито К., Нисио М.* Стационарные решения стохастического дифференциального уравнения // Математика: Сб перев. иностр. ст.— 1967.— Т.11, № 5.— С.117—170.
3. *Королюк В. С., Королюк В. В.* Стохастические модели систем.— Киев: Наук. думка, 1989.— 208 с.
4. *Свердан М. Л., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Стохастичні динамічні системи Іто-Скорохода зі скінченною післядією.— Чернівці: Зелена Буковина, 2000.— 560 с.
5. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— К.:Изд-во Киевского ун-та, 1961.— 216 с.
6. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.– Киев: Наук.думка, 1987.— 328 с.
7. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функционалных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.
8. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 328 с.
9. *Ясинський В. К.* Сучасна теорія випадкових процесів.— Чернівці: Видавничий дім «Родовід». 2014.— 292 с.
10. *Ясинський В. К., Комар А. В.* Стійкість диференціально-функціональних рівнянь з марковськими параметрами // Нелинейые краевые задачи математической физики и их приложения. Сб.научн.тр.— Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 1995.— С.296—299.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.– М.: Наука, 1969.– 367 с.
12. *Ясинський В.К., Ясинський Є.В.* Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією.— Київ: Вид-во «ТВіМС», 2005.— 580 с.
13. *Ito K.* Nagaya Math. I.1951, Vol.- P.55-65 (Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. Математика (сб. переводов)).—1959.— Т.3, В.5.—С.131-141.
14. *Koroljuk V. S.* Stability of Stochastic systems in diffusion approximation Scheme// Укр. мат. журн.— 1998.— Т.50, №1.— С.36—47.
15. *Tsarkov Ye., Yasinski V.* The second Lyapunov Method for Stochastic Functional Differential Equations with Poisson Disturbance // Random Operators and Stochastic Equations.— 1997.— Vol.4.— P.47.—58.

Одержано 18.03.2017