

УДК 512.53

Я. В. Заціха (Ін-т математики НАН України)

## ОПИС ПІДНАПІВГРУП НАПІВГРУП МАЛОГО ПОРЯДКУ

The subsemigroups of the semigroups of order  $n = 3$  are described.Описано піднапівгрупи напівгруп порядку  $n = 3$ .

Групи малих порядків вивчені досить добре (див., напр., [1]). Напівгруп малих порядків набагато більше, ніж груп, і тому вивчені вони не в такій мірі, як групи. Зокрема, число напівгруп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021. Зауважимо при цьому, що більшість задач про опис напівгруп фіксованого порядку отримано з використанням комп'ютерних програм. За традицією опис у таких випадках проводиться з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку  $n < 4$  вивчені досить детально. Випадки  $n = 1, 2$  тривіальні (число різних напівгруп відповідно 1 і 4). Напівгрупи порядку  $n = 3$  описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. [2]. Вони вивчалися, зокрема, в [3–5]. У цій статті розглядається задача про опис всіх піднапівгруп напівгруп третього порядку.

Автор висловлює щире подяку професору В. М. Бондаренку за корисні поради.

**1. Попередні відомості.** У цьому розділі ми у вигляді таблиць Келі виписемо повний список попарно різних напівгруп 3-го порядку в такому вигляді (і в такій же послідовності), як у [3]:

$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$
$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$
$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 2 \rangle$
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$
$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$
$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$
$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$
$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0 \rangle$
$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$
$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 1 \rangle$



$$\begin{aligned}
 9) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad & \{\langle 0 \rangle\} = (\langle 0 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 0 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle) \\
 & \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\} = (\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)
 \end{aligned}$$

### Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. М.: Иност. лит., 1962. – 468 с.
2. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – 3, – P. 1–11.
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. Chotchaisthit S. Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – 8. – P. 1261–1269.
5. Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – 20, no. 1. – P. 32–39.

Одержано 18.10.2017