МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty "UzhNU", Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: `f-mat@uzhnu.edu.ua`.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.925

К. С. Корепанова (Одеський нац. ун-т імені І. І. Мечникова)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

In the paper the question of existence and asymptotic behaviour of $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–solutions, $k \in \{3, \ldots, n\}$ and $\lambda_0 \in \{1, \pm\infty\}$, of a binomial non-autonomous n-th order ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities was investigated. The asymptotic formulas of their derivatives of order up to $n-1$ were obtained too.

У роботі вивчено питання про існування та асимптотичну поведінку $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків при $k \in \{3, \ldots, n\}$ і $\lambda_0 \in \{1, \pm\infty\}$ у двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійностями. Отримані також асимптотичні формули для їх похідних до порядку $n-1$ включно.

1. Вступ. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1}$$

в якому $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$[3].

Важливим окремим випадком рівняння (1) є узагальнене рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_j} \operatorname{sign} y, \tag{2}$$

де $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$ $(j = \overline{0, n-1})$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, яке має безліч застосувань на практиці: у ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідини та інших галузях природознавства.

У роботі [1] В. М. Євтухов з множини розв'язків рівняння (2) виділив достатньо широкий клас, так званих, $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків ($\lambda_0 \in \mathbb{R}$). Досліджуючи апріорні асимптотичні властивості $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків, у роботі [2] було встановлено, що їх множина розпадається на $n+2$ неперетинних підмножин в залежності від значень λ_0. При виконанні нерівності $\sigma_0 + \ldots + \sigma_{n-1} \neq 1$ були отримані необхідні та достатні умови існування у диференціального рівняння (2) кожного з $n+2$ можливих типів $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків та встановлені асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

У зв'язку зі стрімким розвитком теорії правильно та повільно змінних функцій та регулярним їх використанням у багатьох наукових дослідженнях не згасав інтерес до їх застосування в асимптотичній теорії диференціальних рівнянь.

[3]При $Y_j = \pm\infty$ тут і далі будемо вважати, що всі числа з околу ΔY_j одного знаку.

У роботі [3] клас $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків був уперше конкретизований для рівнянь n–го порядку з правильно змінною нелінійністю. Пізніше в роботах В. М. Євтухова та О. М. Клопота [4–6], О. М. Клопота [7, 8] були розглянуті рівняння виду

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}),$$

де $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ $(k = \overline{1, m})$, $p_k : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m})$ — неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_{kj} : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ $(k = \overline{1, m}, j = \overline{0, n-1})$ — неперервні та правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції порядку σ_j, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$. Для цих рівнянь був введений клас $\mathcal{P}_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язків, для яких, зважаючи на їх означення, виконуються такі умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \ (j = \overline{0, n-1}), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0,$$

були встановлені необхідні та достатні умови їх існування.

2. Постановка задачі та допоміжні результати. У цій роботі розглядається диференціальне рівняння (1) при $\omega = +\infty$ та $n \geq 3$, тобто диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{3}$$

в якому $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$.

Окрім зазначених вище розв'язків, для яких $\lim\limits_{t \to +\infty} y^{(n-k)}(t)$ $(k = \overline{1, n})$ дорівнює або 0, або $\pm\infty$, у рівняння (3) можуть бути також розв'язки, для кожного з яких існує $k \in \{1, \dots, n\}$ таке, що

$$y^{(n-k)}(t) = c + o(1) \quad (c \neq 0) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{4}$$

Для рівнянь загального виду були отримані деякі результати про існування розв'язків з такими зображеннями в наслідках 8.2, 8.6, 8.12 (див. [9], гл. II, §8, с. 207, 214, 223) та наслідках 9.3, 9.7 (див. [9], гл. II, §9, с. 230, 233), для диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера — в теоремі 16.9 (див. [9], гл. IV, §16, с. 321). Але ці результати забезпечують досить жорстке обмеження на $(n - k + 1)$–у та наступні похідні розв'язку.

У цій роботі досліджується питання про отримання нових результатів з менш жорсткими обмеженнями. При $k = 1, 2$ або у випадку, коли границі $\varphi_i(y^{(i)})$ $(i = \overline{n-k+1, n-2})$ при $y^{(i)} \to Y_i$ дорівнюють додатнім сталим, в роботах [10] та [11] для рівняння (3) були отримані необхідні та достатні умови існування розв'язків виду (4) та описана їх асимптотична поведінка без додаткових обмежень на ці розв'язки. У всіх інших випадках з розв'язків виду (4) був виділений (див. [12]) досить широкий підклас, так званих, $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (3) таким чином.

Означення 1. *Розв'язок y диференціального рівняння* (3) *будемо при* $k \in \{3, \dots, n\}$ *називати* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–розв'язком, де* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$*, якщо він визначений на проміжку* $[t_{0k}, +\infty[\subset [a, +\infty[$ *та задовольняє такі умови*

$$\lim_{t\to+\infty} y^{(n-k)}(t) = c \ \ (c \neq 0), \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (3) розпадається на $k+1$ ($k \in \{3, \dots, n\}$) неперетинних підмножин (див. [2]), які відповідають таким значенням параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{k-3}{k-2}, 1\right\}, \quad \lambda_0 = \pm\infty, \quad \lambda_0 = 1,$$

$$\lambda_0 = \tfrac{n-j-1}{n-j}, \quad j \in \{n-k+2, \dots, n-1\}.$$

Випадок $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k-3}{k-2}, 1\right\}$ вивчений у роботі [12]. Метою цієї роботи є дослідження питання про умови існування та асимптотичну поведінку $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків ($k \in \{3, \dots, n\}$) рівняння (3) в особливому випадку, коли $\lambda_0 \in \{1, \pm\infty\}$, а також про кількість таких розв'язків.

Згідно з роботою [2] досліджувані розв'язки рівняння (3) мають такі апріорні асимптотичні властивості.

Лема 1. *Нехай* $k \in \{3, \dots, n\}$ *та* $y : [t_{0k}, +\infty[\to \mathbb{R}$ *— довільний* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–розв'язок рівняння* (3)*. Тоді:*
1) *якщо* $\lambda_0 = \pm\infty$*, то мають місце асимптотичні при* $t \to +\infty$ *співвідношення*

$$y^{(l-1)}(t) \sim \tfrac{t^{n-l}}{(n-l)!} y^{(n-1)}(t) \quad (l = \overline{n-k+2, n-1}), \quad y^{(n)}(t) = o\left(\tfrac{y^{(n-1)}(t)}{t}\right); \tag{6}$$

2) *якщо* $\lambda_0 = 1$*, то при* $t \to +\infty$

$$\tfrac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)} \sim \tfrac{y^{(n-k+3)}(t)}{y^{(n-k+2)}(t)} \sim \dots \sim \tfrac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \ \textit{та} \ \lim_{t\to+\infty} \tfrac{t y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)} = +\infty. \tag{7}$$

З вигляду рівняння (3) зрозуміло, що $y^{(n)}(t)$ зберігає знак у деякому околі $+\infty$. Тоді $y^{(n-l)}(t)$ ($l = \overline{1, k-1}$) є строго монотонними функціями в околі $+\infty$ та з огляду на (4) можуть прямувати лише до нуля при $t \to +\infty$. Тому

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при} \ \ j = \overline{n-k+2, n}. \tag{8}$$

Тут і далі будемо вважати, що числа μ_j ($j = \overline{0, n-1}$), які визначені таким чином:

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_j = +\infty, \\ & \text{або } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j \ - \text{ правий окіл } 0, \\ -1, & \text{якщо } Y_j = -\infty, \\ & \text{або } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j \ - \text{ лівий окіл } 0, \end{cases}$$

такі, що

$$\mu_j \mu_{j+1} > 0 \text{ при } j = \overline{0, n-k-1}, \ \ \mu_j \mu_{j+1} < 0 \text{ при } j = \overline{n-k+1, n-2}, \tag{9}$$

$$\alpha\mu_{n-1} < 0. \tag{10}$$

Ці умови на μ_j $(j = \overline{0, n-1})$ та α є необхідними для існування у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків, оскільки для кожного з них в деякому околі $+\infty$

$$\operatorname{sign} y^{(j)}(t) = \mu_j \ \ (j = \overline{0, n-1}), \ \ \operatorname{sign} y^{(n)}(t) = \alpha.$$

Крім того, очевидно, що враховуючи перше зі співвідношень (5) для таких розв'язків мають місце такі асимптотичні зображення

$$y^{(l-1)}(t) = \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}\,[1 + o(1)] \quad (l = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty, \tag{11}$$

$c \in \Delta Y_{n-k}$ і тоді

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} < 0 \end{cases} \quad \text{при } \ j = \overline{1, n-k}. \tag{12}$$

У рівнянні (3) кожна з правильно змінних при $y^{(j)} \to Y_j$ функцій φ_j $(j = \overline{0, n-1})$ порядку σ_j може бути представлена (див. [13], гл.I, §1, с.10) у вигляді

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{13}$$

де $L_j : \Delta Y_j \to]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ — повільно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція. Згідно з означенням та властивостями повільно змінних функцій

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0 \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{14}$$

У якості прикладів повільно змінних при $y \to Y_0$ функцій можна навести такі:

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$
$$\exp(|\ln|y||^{\gamma_3}), \quad 0 < \gamma_3 < 1, \quad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right),$$

функції, що мають відмінну від нуля границю при $y \to Y_0$.

Будемо також говорити, що повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, якщо

$$L\left(\mu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta Y_0),$$

де $\mu = \operatorname{sign} y$.

Умову S_0 напевне задовольняють функції L, які мають скінченну границю при $y \to Y_0$, а також функції виду

$$L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}, \quad L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}|\ln|\ln|y|||^{\gamma_2},$$

де $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, та багато інших.

Зауваження 1. *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, то для будь-якої повільно змінної при $y \to Y_0$ функції $l : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$*

$$L(yl(y)) = L(y)[1 + o(1)] \ \ \textit{при} \ \ y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta Y_0).$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає з теореми 1.1 про рівномірну збіжність та теореми 1.2 про представлення повільно змінних функцій (див. [13], гл.I, §1, с.10).

Зауваження 2 (див. [3]). *Якщо повільно змінна при* $y \to Y_0$ *функція* $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ *задовольняє умову* S_0, *а функція* $y : [t_{0k}, +\infty[\longrightarrow \Delta Y_0$ *— неперервно диференційовна і така, що*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\,[r + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

де r *— відмінна від нуля дійсна стала,* ξ *— неперервно диференційовна в деякому околі* $+\infty$ *дійсна функція, для якої* $\xi'(t) \neq 0$, *тоді*

$$L(y(t)) = L\left(\mu|\xi(t)|^r\right)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

де $\mu = \operatorname{sign} y(t)$ *в деякому околі* $+\infty$.

Зауваження 3 (див. [5]). *Якщо повільно змінна при* $y \to Y_0$ *функція* $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ *задовольняє умову* S_0, *а функція* $r : \Delta Y_0 \times K \to \mathbb{R}$, *де* K *— компакт в* $\mathbb{R}^n$, *така, що*

$$\lim_{\substack{y\to\Delta Y_0\\ y\in\Delta Y_0}} r(z, v) = 0 \quad \textit{рівномірно по}\ v \in K,$$

тоді

$$\lim_{\substack{y\to\Delta Y_0\\ y\in\Delta Y_0}} \frac{L(ve^{[1+r(z,v)]\ln|z|})}{L(z)} = 1 \quad \textit{рівномірно по}\ v \in K,\ \textit{де}\ v = \operatorname{sign} z.$$

3. Основні результати. Розглянемо випадок $\lambda_0 = \pm\infty$. Для рівняння (3) справедливе таке твердження.

Теорема 1. *При* $k \in \{3, \ldots, n\}$ *рівняння* (3) *не має* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\pm\infty)$*–розв'язків.*

Доведення. Дійсно, якщо $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ — довільний $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\pm\infty)$–розв'язок рівняння (3), то з останнього співвідношення (6) безпосередньо випливає, що

$$y^{(n-1)}(t) \sim t^{o(1)} \quad \text{при}\ t \to +\infty,$$

а це разом з іншими співвідношеннями (6) суперечить умові (8). Отже, справедливим є твердження теореми.

Далі для вивчення випадку $\lambda_0 = 1$ окрім фактів, зазначених у параграфі 2, про правильно та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції, будуть використовуватися при $k \in \{3, \ldots, n\}$ такі допоміжні позначення:

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=n-k+1}^{n-1} \sigma_j, \quad \nu_k = \sum_{j=n-k+1}^{n-2} \sigma_j(n-j-1), \quad M_k(c) = \prod_{j=1}^{n-k} \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}},$$

$$I_k(t) = \varphi_{n-k}(c)M_k(c) \int_{A_{0k}}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) d\tau, \quad I_{1k}(t) = \int_{A_{1k}}^{t} I_k(\tau)d\tau,$$

де A_{0k} (A_{1k}) вибирається рівним числу $a_{0k} \ge a$ ($a_{1k} \ge a_{0k}$) (справа від якого підінтегральна функція неперервна), якщо при цьому значенні границі інтегрування відповідний інтеграл прямує до $+\infty$ при $t \to +\infty$, та рівним $+\infty$, якщо при такому значенні границі інтегрування він прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Перш за все встановимо для рівняння (3) справедливість наступних двох теорем.

Теорема 2. *Нехай $k \in \{3, \dots, n\}$ та $\gamma_k \neq 0$. Для існування у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків необхідно, щоб $c \in \Delta Y_{n-k}$, разом з (8) – (10) та (12) виконувались умови*

$$\frac{I_k'(t)}{I_k(t)} \sim \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)} \text{ при } t \to +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} = 0 \; (j = \overline{n-k+1, n-1}), \tag{15}$$

та були справедливі при $t \in]a, +\infty[$ нерівності

$$\gamma_k I_k(t) < 0, \quad I_{1k}(t) > 0, \quad (-1)^{n-j-1}\mu_j\mu_{n-1} > 0 \; (j = \overline{n-k+1, n-3}). \tag{16}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку, окрім (4) та (11), мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-2}), \tag{17}$$

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_k}}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha\mu_{n-1}\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} [1+o(1)]^4. \tag{18}$$

Теорема 3. *Нехай $k \in \{3, \dots, n\}$, $\gamma_k \neq 0$ та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції L_j ($j = \overline{n-k+1, n-1}$) задовольняють умову S_0. Тоді, у разі наявності у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків, виконується умова*

$$\int\limits_{a_{2k}}^{+\infty} \left(\frac{I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right)^{k-2} \left|\gamma_k I_k(\tau)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(\tau)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau < +\infty, \tag{19}$$

де $a_{2k} \ge a_{1k}$ таке, що $\mu_{j-1}|I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} \in \Delta Y_{j-1}$ ($j = \overline{n-k+2, n}$) при $t \ge a_{2k}$, та для кожного з таких розв'язків мають місце окрім (11) асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W_k(t)\,[1 + o(1)], \tag{20}$$

$$y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\gamma_k^{n-l}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l-k+2} W_k'(t)[1 + o(1)] \;\; (l = \overline{n-k+2, n}), \tag{21}$$

де

$$W_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \left(\frac{I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right)^{k-2} \left|\gamma_k I_k(\tau)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(\tau)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau.$$

[4] Тут і далі будемо вважати, що $\prod\limits_{m}^{l} = 1$, якщо $m > l$.

Доведення теорем 2–3. Нехай $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ – довільний $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок рівняння (3). Тоді, як було встановлено перед формулюваннями теорем, $c \in \Delta Y_{n-k}$, виконуються (8) – (10), (12) та мають місце асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення (4) та (11). З (11) також випливає, що

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k}{t}\,[1+o(1)] \quad (j = \overline{0, n-k-1}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Враховуючи представлення (13) правильно змінних при $t \to +\infty$ функцій $\varphi_j(y^{(j)})$ при $j = \overline{0, n-k-1}$ та справедливість виконання співвідношень (14) рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, маємо

$$\varphi_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) = \left|\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{j-1}} L_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} t^{(n-j-k+1)\sigma_{j-1}} L_{j-1}\left(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1}\right)[1+o(1)] =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \varphi_{j-1}(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1})[1+o(1)] \quad (j = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Тоді, підставивши розв'язок разом з похідними до порядку $n-k$ включно в (3), при $t \to +\infty$ отримаємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}(y^{(n-1)}(t))\ldots\varphi_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} =$$
$$= \alpha M_k(c)p(t)\varphi_0\left(\mu_0 t^{n-k}\right)\varphi_1\left(\mu_1 t^{n-k-1}\right)\ldots\varphi_{n-k}(c)\,[1+o(1)].$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_j(y^{(j)}(t))} = \alpha I'_k(t)\,[1+o(1)]. \tag{22}$$

Згідно з (13) та теоремою 1.2 про представлення ([13], гл.I, §1, с.10) існують неперервно диференційовні правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції $\varphi_{0j} : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такі, що

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{\varphi_j(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{y^{(j)}\varphi'_{0j}(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = \sigma_j. \tag{23}$$

Зважаючи на (23) та перше зі співвідношень (7), маємо

$$\left(\frac{y^{(s-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)' =$$
$$= \frac{y^{(s)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\left[1 - \sum_{j=n-k+1}^{n-1}\left(\frac{y^{(s-1)}(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(s)}(t)y^{(j)}(t)}\;\frac{y^{(j)}(t)\varphi'_{0j}(y^{(j)}(t))}{\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)\right] = \tag{24}$$
$$= \frac{y^{(s)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}[\gamma_k + o(1)] \quad \text{при } t \to +\infty \quad (s = \overline{n-k+2, n}).$$

Звідси при $s = n$ випливає, що (22) може бути переписане у вигляді

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)' = \alpha\gamma_k I_k'(t)[1+o(1)] \text{ при } t \to +\infty.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_{0k} до t та враховуючи правило вибору границі інтегрування A_{0k} у функції $I_k(t)$, отримаємо

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha\gamma_k I_k(t)[1+o(1)] \text{ при } t \to +\infty. \tag{25}$$

Аналогічно з (25) з використанням (24) при $s = n-1$ отримаємо

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha\gamma_k^2 I_{1k}(t)[1+o(1)] \text{ при } t \to +\infty. \tag{26}$$

З (22), (25) та (26) з урахуванням першої з умов (23) маємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \sim \frac{I_k'(t)}{\gamma_k I_k(t)}, \; \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \sim \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)} \text{ при } t \to +\infty \tag{27}$$

та, зважаючи на (9), отримуємо справедливість перших двох нерівностей з (16). Також з (27) з огляду на лему 1 випливає, що справедливі умови (15), з урахуванням тотожностей

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{j}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t) \quad (j = \overline{n-k+1, n-2})$$

мають місце асимптотичні зображення (17) та, в результаті, виконується остання з нерівностей (16).

Використовуючи наведені вище тотожності, зображення (17) та властивості, що випливають з теореми 1.2 ([13], гл.I, §1, с.10) для повільно змінних при $y^{(j)} \to Y_j$ функцій $L_{0j}(y^{(j)}) = \frac{\varphi_{0j}(y^{(j)})}{|y^{(j)}|^{\sigma_j}}$ $(j = \overline{n-k+1, n-1})$, знаходимо

$$\varphi_{0j}(y^{(j)}(t)) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_{0j}(y^{(j)}(t)) \sim \left|\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_j} \times$$
$$\times L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)]\right) \sim$$
$$\sim \left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{(n-j-1)\sigma_j} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_j} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)$$
$$(j = \overline{n-k+1, n-1}) \text{ при } t \to +\infty.$$

З огляду на ці співвідношення з (25) отримуємо при $t \to +\infty$ зображення

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_k} \left|\frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\right|^{\nu_k}}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha\mu_{n-1}\gamma_k I_k(t)[1+o(1)],$$

з якого випливає справедливість (18). Таким чином, доведені твердження теореми 2.

Припустимо тепер додатково, що повільно змінні при $t \to +\infty$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ задовольняють умову S_0. Тоді зважаючи на перше співвідношення (15) та (25) при $t \to +\infty$ маємо

$$\frac{\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)'}{\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)} = (n-j-1)\left[\frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)} - \frac{I_k'(t)}{I_k(t)}\right] + \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} =$$
$$= (n-j-1)\frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}[1-h(t)] + \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}[1+o(1)] = \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}\left[\frac{1}{\gamma_k} + o(1)\right] = \frac{I_k'(t)}{I_k(t)}\left[\frac{1}{\gamma_k} + o(1)\right],$$

де $h(t) = \frac{I_{1k}(t) I_k'(t)}{I^2(t)}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 1$. Отже, згідно із зауваженням 2 справедливі такі асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$L_j\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right) = L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)[1+o(1)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}).$$

З огляду на отримані співвідношення з (18) випливає, що при $t \to +\infty$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_{n-1}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)].$$

Зважаючи на це перепишемо (17) у вигляді

$$y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} \times$$
$$\times [1+o(1)] \quad (l = \overline{n-k+2, n-1}) \text{ при } t \to +\infty, \tag{28}$$

тобто мають місце асимптотичні співвідношення (21).

Проінтегрувавши (28) при $l = n-k+2$ на $[t_{*k}, t]$, де $t_{*k} = \max\{a_{2k}, t_{0k}\}$, маємо

$$y^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}(t_{*k}) +$$
$$+ \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}\int\limits_{t_{*k}}^{t}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{k-2}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)]d\tau.$$

Враховуючи першу з умов (5),

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_*}^{t}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{k-2}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)]d\tau = \mathrm{const}$$

і тоді за ознакою порівняння вірно (19). Використовуючи твердження 6 з монографії [14] (гл.V, §3, с.293) про асимптотичне обчислення інтегралів, для $(n-k)$–ї похідної розв'язку одержимо зображення (20).

Таким чином, асимптотичні при $t \to +\infty$ співвідношення (4), (17), (18) прийняли явний вигляд (20), (21). Теореми 2 та 3 повністю доведені.

У наступній теоремі наведемо достатні умови наявності у рівняння (3) $\mathcal{P}_{+\infty}^{k}(1)$–розв'язків із зазначеними в теоремі 3 асимптотичними зображеннями.

Теорема 4. *Нехай $k \in \{3,\dots,n\}$, $\gamma_k \neq 0$, $c \in \Delta Y_{n-k}$, виконуються умови* (8) – (10), (12), (15), (16), (19) *та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ задовольняють умову S_0. Нехай, крім того, виконується нерівність $\sigma_{n-1} \neq 1$ та алгебраїчне відносно ρ рівняння*

$$\sum_{l=2}^{k-1} \sigma_{n-l}(\rho+1)^{k-l-1} - (1 - \sigma_{n-1} + \rho)(\rho+1)^{k-2} = 0 \tag{29}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у рівняння (3) *існує $(n-k+m)$–параметричне сімейство $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків з асимптотичними при $t \to +\infty$ зображеннями* (11), (20), (21), *де m — число коренів (з урахуванням кратних) алгебраїчного рівняння* (29) *з додатніми дійсними частинами.*

Зауваження 4. *Неважко перевірити, що алгебраїчне відносно ρ рівняння* (29) *напевне не має коренів з нульовою дійсною частиною, якщо виконується нерівність*

$$\sum_{l=2}^{k-1} |\sigma_{n-l}| < |1 - \sigma_{n-1}|.$$

Доведення теореми 4. Покажемо, що для даного c з умови теореми у рівняння (3) існує принаймні один $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок, заданий на деякому проміжку $[t_{0k}, +\infty[\subset [a, +\infty[$, який допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (11), (20) та (21), а також з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків.

Застосовуючи до рівняння (3) перетворення

$$\begin{aligned}
&y^{(l-1)}(t) = \tfrac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}[1 + v_l(t)] \quad (l = \overline{1, n-k}),\\
&y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W(t)[1 + v_{n-k+1}(t)],\\
&y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\gamma_k^{n-l}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l-k+2} W'(t)[1 + v_l(t)] \quad (l = \overline{n-k+2, n}),
\end{aligned} \tag{30}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}
v_l' = \frac{n-l-k+1}{t}\,[-v_l + v_{l+1}] \quad (l = \overline{1, n-k-1}),\\
v_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[\frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c} W(t)\,[1 + v_{n-k+1}] - v_{n-k}\right],\\
v_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\,[-v_{n-k+1} + v_{n-k+2}],\\
v_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\,[1 + v_{l+1} - \gamma(n-l-k+2)(1-h(t))[1+v_l]] - \frac{W''(t)}{W'(t)}\,[1 + v_l]\\
(l = \overline{n-k+2, n-1}),\\
v_n' = \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}\left[\left((-2+k)(1-h(t)) - \frac{W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)}\right)[1+v_n] + \right.\\
\left. + \frac{\alpha p(t)\varphi_0\left(\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+v_1]\right)\dots\varphi_{n-1}\left(\mu_{n-1}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{2-k} W'(t)[1+v_n]\right)}{\mu_{n-1}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{1-k} W'(t)}\right].
\end{cases} \tag{31}$$

Розглянемо її на множині $\Omega^n = [t_{0k}, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \{(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \leq \frac{1}{2},\ j = \overline{1,n}\}$ та $t_{0k} \geq a_{2k}$ вибране з урахуванням (19) таким чином, щоб при $t > t_{0k}$ та $(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ виконувалися умови:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}\,[1 + v_j(t)] \in \Delta Y_{j-1} \quad (j = \overline{1, n-k}),\\
&c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W(t)\,[1 + v_{n-k+1}(t)] \in \Delta Y_{n-k},\\
&\mu_{n-1}\gamma_k^{n-j}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-k+2} W'(t)\,[1 + v_j(t)] \in \Delta Y_{j-1} \quad (j = \overline{n-k+2, n}).
\end{aligned}$$

Оскільки функції $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j \in \{0,\dots,n-1\} \setminus \{n-k\})$ можуть бути представлені у вигляді (13) та співвідношення (14) виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0,+\infty[$, а також зважаючи на неперевність функції $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$, (19) і те, що повільно змінні при $t \to +\infty$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ задовольняють умову S_0, маємо

$$\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\left[1+v_{j+1}\right]\right) = \varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-k-j)!}\right|^{\sigma_j}\varphi_j(\mu_j t^{n-k-j})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) \quad (j=\overline{0,n-k-1}),$$
$$\varphi_j\left(\mu_{n-1}\gamma_k^{n-j-1}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-k-j+1} W'(t)\left[1+v_{j+1}\right]\right) =$$
$$= |\gamma_k|^{(n-j-1)\sigma_j}\varphi_j\left(\mu_j\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-k-j+1} W'(t)\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) =$$
$$= |\gamma_k|^{(n-j-1)\sigma_j}\varphi_j(\mu_j|I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),$$
$$\varphi_{n-k}\left(c+\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}\,W(t)\left[1+v_{n-k+1}(t)\right]\right) = \varphi_{n-k}(c)(1+R_{n-k}(t,v_{n-k+1})),$$

де функції $R_j(t,v_{j+1})$ $(j=\overline{0,n-1})$ прямують до нуля при $t\to+\infty$ рівномірно по $v_{j+1} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

З огляду на вигляд $W(t)$, (7), (19) та (27)

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_k(t)t}{I_{1k}(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)} = \frac{1}{\gamma_k}.$$

Тоді, з використанням зазначених вище зображень, система рівнянь (31) може бути переписана у вигляді

$$\begin{cases} v_l' = \frac{1}{t}\left[-(n-l-k+1)v_l + (n-l-k+1)v_{l+1}\right] \quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\ v_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[-v_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c}W(t)\,(1+v_{n-k+1})\right],\\ v_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[-v_{n-k+1}+v_{n-k+2}\right],\\ v_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[-v_l+v_{l+1}+V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n)\right] \quad (l=\overline{n-k+2,n-1}),\\ v_n' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n-1}\sigma_{j-1}v_j + (\sigma_{n-1}-1)v_n + \sum\limits_{i=1}^{2}V_{n,i}(t,v_1,\dots,v_n)\right], \end{cases} \tag{32}$$

де

$$V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n) = \left(1-\tfrac{\gamma_k W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)} - \gamma_k(n-l-k+2)(1-h(t))\right)(1+v_l)$$
$$(l=\overline{n-k+2,n-1}),$$
$$V_{n,1}(t,v_1,\dots,v_n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(1+R_j(t,v_{j+1}))-1\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}}+$$
$$+\left(\gamma_k(-2+k)(1-h(t)) - \tfrac{\gamma_k W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)}+1\right)\left[1+v_n\right],$$
$$V_{n,2}(t,v_1,\dots,v_n) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}} - \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}v_j\sigma_{j-1} - 1.$$

При цьому зауважимо, що

$$\lim_{t\to+\infty}V_{j,1}(t,v_1,\dots,v_n) = 0\ (j=\overline{n-k+2,n})$$

рівномірно по $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0} \tfrac{V_{n,2}(t,v_1,\ldots,v_n)}{|v_1|+\ldots+|v_n|} = 0$$

рівномірно по $t \in [t_{0k}, +\infty[$.

Розглянемо граничну матрицю P коефіцієнтів при $v_{n-k+2}, \ldots, v_n$, що стоять у квадратних дужках останніх $k-1$ рівнянь системи (32). Згідно з умовою теореми характеристичне рівняння даної матриці, яке набуває вигляду (29), не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді (див. [15]) існує невироджена обмежена разом з оберненою на $[t_{0k}, +\infty[$ дійсна матриця $S(t) = \{s_{ij}(t)\}^n_{i,j=n-k+2}$ така, що система (32) за допомогою перетворення

$$v(t) = T(t)z(t), \tag{33}$$

де

$$T(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S(t) \end{pmatrix},$$

I — одинична матриця розмірності $n-k+1 \ \times \ n-k+1$, зводиться до системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} z'_l = \frac{n-l-k+1}{t}[-z_l + z_{l+1}] \ \ (l = \overline{1, n-k-1}), \\ z'_{n-k} = \frac{1}{t}\left[-z_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c} W(t) \ (1 + z_{n-k+1})\right], \\ z'_{n-k+1} = \frac{W'(t)}{W(t)}[-z_{n-k+1} + \sum\limits_{j=n-k+2}^{n} s_{n-k+2\,j}(t) z_j], \\ z'_l = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)} \left[\sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{lj} z_j + p_{ll} z_l + p_{ll+1} z_{l+1} + \sum\limits_{i=1}^{2} Z_{l,i}(t, z_1, \ldots, z_n)\right] \\ (l = \overline{n-k+2, n-1}), \\ z'_n = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)} \left[\sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{nj}(t) z_j + p_{nn} z_n + \sum\limits_{i=1}^{2} Z_{n,i}(t, z_1, \ldots, z_n)\right], \end{cases} \tag{34}$$

в якій $u_{lj}(t)$ $(l = \overline{n-k+2, n}, \ j = \overline{1, n-k+1})$ — обмежені функції на $[t_{0k}, +\infty[$, $p_{ll} \neq 0$ $(l = \overline{n-k+2, n})$ — дійсні частини власних значень (з урахування кратних) матриці P, $p_{ll+1} \in \{0, 1\}$ $(l = \overline{n-k+2, n-1})$, $Z_{l,i}(t, z_1, \ldots, z_n)$ $(i = 1, 2)$ такі, що

$$\lim_{t\to+\infty} Z_{l,1}(t, z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad (l = \overline{n-k+2, n})$$

рівномірно по $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n_l = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : |z_j| \leq \eta, \ j = \overline{1, n}\}$, η — деяке достатньо мале число, яке залежить від матриці $S(t)$,

$$\lim_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to 0} \tfrac{\partial Z_{l,2}(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_m} = 0 \quad (m = \overline{1, n}, \ l = \overline{n-k+2, n})$$

рівномірно по $t \in [t_{0k}, +\infty[$.

Поклавши тепер в системі (34)

$$z_j = \delta x_j \quad (j = \overline{1, n-k}), \quad z_j = x_j \quad (j = \overline{n-k+1, n}), \tag{35}$$

де $\delta > 0$ — деяка додатня стала, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_l' = \frac{n-l-k+1}{t}\left[-x_l + x_{l+1}\right] \quad (l = \overline{1, n-k-1}), \\ x_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[-x_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{\delta c} W(t)\,(1 + x_{n-k+1})\right], \\ x_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[-x_{n-k+1} + \sum\limits_{j=n-k+2}^{n} s_{n-k+2\,j}(t) x_j\right], \\ x_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\delta \sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{lj}(t) x_j + p_{ll} x_l + p_{ll+1} x_{l+1} + \sum\limits_{i=1}^{2} X_{l,i}(t, x_1, \ldots, x_n)\right] \\ (l = \overline{n-k+2, n-1}), \\ x_n' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\delta \sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{nj}(t) x_j + p_{nn} x_n + \sum\limits_{i=1}^{2} X_{n,i}(t, x_1, \ldots, x_n)\right], \end{cases} \tag{36}$$

в якій $X_{l,i}(t, x_1, \ldots, x_n) = Z_{l,i}(t, \frac{1}{\delta} z_1, \ldots, \frac{1}{\delta} z_{n-k}, z_{n-k+1}, \ldots, z_n)$ $(i = 1, 2,\ l = \overline{n-k+2, n})$ та мають ті ж властивості, що й $Z_{l,i}(t, z_1, \ldots, z_n)$.

Оскільки $u_{lj}(t)$ $(l = \overline{n-k+2, n},\ j = \overline{1, n-k+1})$ та $s_{n-k+2\,j}(t)$ $(j = \overline{n-k+2, n})$ обмежені на $[t_{0k}, +\infty[$, $W(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то число δ можна вибрати таким чином, щоб для системи (36) були виконані всі умови теореми 2.1 з роботи [16]. Тоді, зважаючи на цю теорему, в неї існує принаймні один розв'язок $(x_j)_{j=1}^n : [t_{1k}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ $(t_{1k} \in [t_{0k}, +\infty[)$, що прямує до нуля при $t \to +\infty$. Кожному такому розв'язку з оглядом на перетворення (30), (33), (35) відповідає $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок рівняння (3), який допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (11), (20) та (21).

Більш того, згідно з зазначеною теоремою, якщо серед коренів алгебраїчного рівняння (29) є m коренів (з урахуванням кратних) з додатніми дійсними частинами, то, так як $\frac{W'(t)}{W(t)} < 0$ в деякому околі $+\infty$, існує $(n-k+m)$–параметричне сімейство розв'язків зі знайденими зображеннями. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка. // Докл. АН России. – 1992. – **324**, №2. – С. 258–260.
2. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 – Киев, 1998. – 295 с.
3. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. // Дифференц. уравнения – 2011. – **47**, №5. – С. 628–650.
4. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, №3. – С. 354–380.
5. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, №5. – С. 584–600.
6. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2014. – V.61. – P. 37–61.
7. *Клопот А. М.* Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка. // Нелинейные колебания. – 2012. – **15**, №4. – С. 447–465.

8. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – **18**, №3(19). – С. 16–34.
9. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
10. *Евтухов В. М., Корепанова Е. С.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №9. – С. 1198–1216.
11. *Корепанова К. С.* Умови існування розв'язків степеневого виду у диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, №3–4. – С. 75–79.
12. *Evtukhov V. M., Korepanova K. S.* Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of n-th Order Differential Equations. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2017. – V.71. – P. 111–124.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
14. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
15. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, №4. – С. 1–12.
16. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №1. – С. 52–80.

Одержано 18.09.2017