МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.9, 519.6

І. І. Король, І. Ю. Король (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДОМ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

The present paper proposes a scheme for constructing a wide range of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations using the method of undetermined coefficients. The implementation of the predictor-corrector method with arbitrary accuracy is shown.

У роботі запропоновано спосіб побудови широкого спектру лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з використанням методу невизначених коефіцієнтів. Показано реалізацію схеми предиктор-коректор з довільною наперед заданою точністю.

Для побудови лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь нами запропоновано єдиний підхід, суть якого полягає в наступному. Розглядається задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо, лінійні багатокрокові методи для розв'язанні задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{i=s}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{2}$$

де a_j, $j = \overline{0,p}$, b_i, $i = \overline{s,q}$ – невідомі коефіцієнти. Якщо $s = 0$, то метод (1) називається явним, а якщо $s = -1$ і $b_{-1} \neq 0$ – неявним.

В літературі [1–3], для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt,$$

після чого підінтегральну функцію замінюють інтерполяційним поліномом Лагранжа або Ньютона. Далі, на підставі певних міркувань одержуються відомі в літературі багатоточкові методи.

Ми пропонуємо побудувати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої кожен з відомих на сьогодні лінійних багатоточкових методів (як явного, так і неявного типу) можна одержати як частковий випадок.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k:

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k,$$

де α_i, $i = \overline{0,k}$ – константи, то цей розв'язок можна знайти точно за формулою

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hb_{-1}y'_{n+1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i}, \tag{3}$$

де a_j і b_i $(0 \le j_1 \le j \le j_2,\ -1 \le i \le q)$ – невідомі коефіцієнти, а $y'_k = f(t_k, y_k)$ – значення похідної шуканої функції.

Невідомі коефіцієнти a_j, b_i, $j = \overline{j_1, j_2}$, $i = \overline{1,q}$ будемо шукати з умови, що формула (3) є точною для всіх поліноміальних розв'язків, степінь яких не перевищує k. За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду:

$$y(t)=\frac{1}{h^0}(t_{n+1}-t)^0=1, \text{якщо } m=0; \quad y(t)=\frac{1}{h^m}(t_{n+1}-t)^m, \text{якщо } m=1,2,\ldots,k; \tag{4}$$

$$y'(t)=0, \text{ якщо } m=0; \qquad y'(t)=-\frac{m}{h^m}(t_{n+1}-t)^{m-1}, \quad \text{якщо } m=1,2,\ldots,k. \tag{5}$$

Для побудови шуканої системи формулу (3) перепишемо у вигляді

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + hby'_{n+1} + h\sum_{i=0}^{q} b_i y'_{n-i} = y_{n+1}, \tag{6}$$

звідки з (4), (5) при $m = 0, 1, 2, \ldots, k$ одержуються рядки $(k+1)\times(k+1)$-вимірної матриці системи.

Відмітимо, що формула (6) має чотири складові: перша – сума, коефіцієнтам a_j, якої у побудованій системі лінійних алгебраїчних рівнянь будуть відповідати перші $j_2 + 1 - j_1$ стовпців матриці A (один стовпець якщо $j_1 = j_2$, $0 \le j_1 \le j_2$); друга складова – доданок з коефіцієнтом b, якому буде відповідати наступний стовпець матриці. Третьою складовою є сума, якій відповідають наступні q стовпців матриці B. Четвертою складовою є права частина, якій у системі рівнянь буде відповідати вектор d. Виходячи з цього, систему (6) запишемо у матрично-векторному вигляді

$$Cx = d, \tag{7}$$

де матриця C формується приєднанням до матриці A справа стовпця b і матриці B . Кількість стовпців у матрицях A, B і наявність або відсутність стовпця b залежать від числового методу та його порядку точності. Так, для явних методів стовпець b відсутній, а якщо $q = 0$, то відсутня матриця B. При цьому C є квадратною $(k + 1)$-вимірною матрицею, де k – порядок точності методу, який обчислюється за формулою

$$k = \begin{cases} j_2 - j_1 + q, & if \quad s = 0, \\ j_2 - j_1 + q + 1, & if \quad s = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Використовуючи поліноми (4) побудуємо складові системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6) таким чином: стовпець, який відповідає коефіцієнту a_j – це значення поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j}:

$$
\begin{aligned}
&y_0(t_{n-j})=\tfrac{1}{h^0}(t_{n+1}-(t_n-jh))^0=1, \quad \text{якщо } m=0;\\
&y_m(t_{n-j})=\tfrac{1}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-jh))^m=(j+1)^m, \quad \text{якщо } m=\overline{1,k}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Аналогічно обчислюється матриця B: елементи стовпця, який відповідає коефіцієнту b_i рівні значенням похідних $y'_m(t)$ поліномів (5) у вузлі t_{n-i}:

$$
\begin{aligned}
&y'_0(t_{n-i})=0, \quad \text{якщо } m=0;\\
&y'_m(t_{n-i})=-\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-ih))^{m-1}=-\tfrac{m}{h}(i+1)^{m-1}, \text{ якщо } m=\overline{1,k}.
\end{aligned}
$$

```
Am(j1,j2,k) :=  for i ∈ 0..k
                  for j ∈ j1..j2
                    A[i,j-j1] ← (j + 1)^i
                A

Bv(k) :=  for i ∈ 0..k
            b[i] ← -1 if i = 1
            b[i] ← 0 otherwise
          b

Bm(m,k) :=  for i ∈ 0..k - 1
              for j ∈ 1..m
                B[i+1,j-1] ← 0 if i = 0
                B[i+1,j-1] ← -(i + 1)·j^i
            B

Dv(k) :=  for i ∈ 0..k
            d[0] ← 1 if i = 0
            d[i] ← 0 otherwise
          d
```

Рис. 1. Тексти програм $Am(j1,j2,k)$, $Bv(k)$, $Bm(m,k)$, $Dv(k)$

Елементи вектора b визначаються значеннями похідної y'_{n+1}, а коефіцієнти вектора d – значеннями функції y_{n+1} і обчислюються за формулами:

$$
y'_{n+1}=y'_m(t_{n+1})=\begin{cases}-1, & \text{якщо } m=1,\\ 0, & \text{якщо } m\neq 1;\end{cases} \qquad y_{n+1}=y_m(t_{n+1})=\begin{cases}1, & \text{якщо } m=0,\\ 0, & \text{якщо } m\neq 0.\end{cases} \tag{10}
$$

Обчислення матриць A і B, стовпців b і d здійснюється за допомогою програм $Am(j_1,j_2,k)$, $Bm(m,k)$, $Bv(k)$ і $Dv(k)$, реалізованих в пакеті Mathcad, які наведено на рис. 1. На їх основі складена програма $JNBM(j1,j2,s,q)$ (рис. 2), яка дає можливість одержати число k – порядок точності методу, матриці A і B, стовпці b і d, компонує матрицю C та знаходить x – розв'язок системи (7). Коефіцієнти вектора x є шуканими коефіцієнтами формул різних лінійних багатокрокових методів як явного, так і неявного типів.

Нижче наведено приклади того, як відомі лінійні багатокрокові методи явного та неявного типів розв'язання задачі Коші одержуються за допомогою розробленого нами методу.

```
JNBM(j1, j2, s, q) := | k ← j2 − j1 + q  if s = 0
                      | k ← j2 − j1 + q + s  if s = 1
                      | k ← j2 − j1 + 1  if s = 2
                      | k ← j2 − j1  if s = 3
                      | A ← Am(j1, j2, k)
                      | b ← Bv(k)
                      | B ← Bm(q, k)
                      | C ← augment (A, B)  if s = 0
                      | C ← augment (A, b, B)  if s = 1
                      | C ← augment (A, b)  if s = 2
                      | C ← A  otherwise
                      | d ← Dv(k)
                      | x ← C^(−1)·d
                      | (k A b B C d x)
```

Рис. 2. Текст програми $JNBM(j1, J2, s, q)$

1. Явний метод Адамса-Башфорта 5-го порядку одержується за допомогою звертання:

$$j1{:=}0 \quad j2{:=}0 \quad s{=}0 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}5.$$

При цьому відповідні матриці та вектори мають такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}.$$

Як і в кожному явному методі, матриця C складається тільки з матриць A і B, і не містить стовпця b:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ 1 & -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Розв'язком системи (7), де C, d мають вигляд (11) є

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1901}{720} & -\dfrac{1387}{360} & \dfrac{109}{30} & -\dfrac{637}{360} & \dfrac{251}{720} \end{pmatrix}.$$

Елементи цього вектора є коефіцієнтами явного методу Адамса-Башфорта:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1901}{720}f_n - \frac{1387}{360}f_{n-1} + \frac{109}{30}f_{n-2} - \frac{637}{360}f_{n-3} + \frac{251}{720}f_{n-4}\right).$$

2. Неявний метод Адамса-Мултона 6-го порядку одержується за допомогою звертання:

$$j1{:=}0 \quad j2{:=}0 \quad s{=}1 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}6.$$

При таких значеннях вхідних параметрів з програми $JNBM(j1, j2, s, q)$ отримуємо такі матриці та коефіцієнти:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \\ -6 & -192 & -1458 & -6144 & -18750 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & 0 & -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ 1 & 0 & -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ 1 & 0 & -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \\ 1 & 0 & -6 & -192 & -1458 & -6144 & -18750 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{95}{288} & \frac{1427}{1440} & -\frac{133}{240} & \frac{241}{720} & -\frac{173}{1440} & \frac{3}{160} \end{pmatrix},$$

$$y_{n+1}{=}y_n{+}h\left(\frac{95}{288}f_{n+1}{+}\frac{1427}{1440}f_n{-}\frac{133}{240}f_{n-1}{+}\frac{241}{720}f_{n-2}{-}\frac{173}{1440}f_{n-3}{+}\frac{3}{160}f_{n-4}\right).$$

Аналогічно за допомогою вибору параметрів $j1$, $j2$, s і q у програмі $JNBM(j1, j2, s, q)$ можна отримати формули інших відомих лінійних багатокрокових методів як явного, так і неявного типів будь-якого порядку точності.

3. Явний метод Мілна 5-го порядку точності:

$$j1{:=}5 \quad j2{:=}5 \quad s{=}0 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}5,$$
$$x^T = (1\ \tfrac{33}{10}\ \ -\tfrac{21}{5}\ \tfrac{39}{5}\ \ -\tfrac{21}{5}\ \tfrac{33}{10}),$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(\tfrac{33}{10}f_n - \tfrac{21}{5}f_{n-1} + \tfrac{39}{5}f_{n-2} - \tfrac{21}{5}f_{n-3} + \tfrac{33}{10}f_{n-4}\right).$$

4. Неявний метод Мілна 6-го порядку точності:

$$j1{:=}4 \quad j2{:=}4 \quad s{=}1 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}6,$$
$$x^T = (1\ \tfrac{95}{288}\ \tfrac{125}{96}\ \tfrac{125}{144}\ \tfrac{125}{144}\ \tfrac{125}{96}\ \tfrac{95}{288}),$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(\tfrac{95}{288}f_{n+1} + \tfrac{125}{96}f_n + \tfrac{125}{144}f_{n-1} + \tfrac{125}{144}f_{n-2} + \tfrac{125}{96}f_{n-3} + \tfrac{95}{288}f_{n-4}\right).$$

За допомогою запропонованого в даній роботі підходу можна отримати інші формули лінійних багатокрокових методів.

5. Новий явний багатокроковий метод

$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 0 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 2,$
$x^T = (3\ \ -3\ 1), \quad y_{n+1} = 3y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2}.$

$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 0 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 3,$
$x^T = (4\ \ -6\ \ 4\ \ -1),$
$y_{n+1} = 4y_n - 6y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}.$

$j1 := 0 \quad j2 := 4 \quad s = 0 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 4,$
$x^T = (5\ \ -10\ 10\ \ -5\ 1),$
$y_{n+1} = 5y_n - 10y_{n-1} + 10y_{n-2} - 5y_{n-3} + y_{n-4}.$

$j1 := 0 \quad j2 := 5 \quad s = 0 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 5,$
$x^T = (6\ \ -15\ 20\ \ -15\ 6\ \ -1),$
$y_{n+1} = 6y_n - 15y_{n-1} + 20y_{n-2} - 15y_{n-3} + 6y_{n-4} - y_{n-5}.$

$j1 := 0 \quad j2 := 6 \quad s = 0 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 6,$
$x^T = (7\ \ -21\ 35\ \ -35\ 21\ \ -7\ 1,)$
$y_{n+1} = 7y_n - 21y_{n-1} + 35y_{n-2} - 35y_{n-3} + 21y_{n-4} - 7y_{n-5} + y_{n-6}.$

6. Новий неявний багатокроковий метод

$j1 := 0 \quad j2 := 1 \quad s = 1 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 2,$
$x^T = (\frac{4}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}).$
$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + h \cdot \frac{2}{3}f_{n+1}.$

$j1 := 0 \quad j2 := 2 \quad s = 1 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 3,$
$x^T = (\frac{18}{11}\ \ -\frac{9}{11}\ \frac{2}{11}\ \frac{6}{11}),$
$y_{n+1} = \frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + h\frac{6}{11}f_{n+1}.$

$j1 := 0 \quad j2 := 3 \quad s = 1 \quad q := 0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x) := JNBM(j1, j2, s, q) \quad k = 4,$
$x^T = (\frac{48}{25}\ \ -\frac{36}{25}\ \frac{16}{25}\ \ -\frac{3}{25}\ \frac{12}{25}),$
$y_{n+1} = \frac{48}{25}y_n - \frac{36}{25}y_{n-1} + \frac{16}{25}y_{n-2} - \frac{3}{25}y_{n-3} + h\frac{12}{25}f_{n+1}.$

$j1{:=}0 \quad j2{:=}4 \quad s{=}1 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}5,$
$x^T{=}\left(\frac{300}{137}\ \ -\frac{300}{137}\ \ \frac{200}{137}\ \ -\frac{75}{137}\ \ \frac{12}{137}\ \ \frac{60}{137}\right),$
$y_{n+1} = \frac{300}{137}y_n - \frac{300}{137}y_{n-1} + \frac{200}{137}y_{n-2} - \frac{75}{137}y_{n-3} + \frac{12}{137}y_{n-4} + h\frac{60}{137}f_{n+1}.$

$j1{:=}0 \quad j2{:=}5 \quad s{=}1 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}6,$
$x^T{=}\left(\frac{120}{49}\ \ -\frac{150}{49}\ \ \frac{400}{49}\ \ -\frac{75}{49}\ \ \frac{24}{49}\ \ -\frac{10}{147}\ \ \frac{20}{49}\right),$
$y_{n+1} = \frac{120}{49}y_n - \frac{150}{49}y_{n-1} + \frac{400}{49}y_{n-2} - \frac{75}{49}y_{n-3} + \frac{24}{49}y_{n-4} - \frac{10}{147}y_{n-5} + h\frac{29}{49}f_{n+1}.$

```
R_K_4(t0,y0,h,f,m) := | y_0 ← y0
                      | for k ∈ 0..m
                      |   | t_k ← t0 + k·h
                      |   | (K1 ← h·f(t_k,y_k)   K2 ← h·f(t_k + h/2, y_k + K1/2))
                      |   | (K3 ← h·f(t_k + h/2, y_k + K2/2)   K4 ← h·f(t_k + h, y_k + K3))
                      |   | y_{k+1} ← y_k + 1/6·(K1 + 2K2 + 2K3 + K4)
                      | (t  y)
```

Рис. 3. Текст програми $R\_K\_4(t0, y0, h, f, m)$

Приклад. На основі отриманих формул методів 5 і 6 побудуємо метод прогнозу і корекції (предиктор-коректор). Для ілюстрації розглянемо задачу Коші

$$y' = -y + sin(ty), \quad y(0) = 1,5. \tag{12}$$

На рис. 3 наведено програму $R\_K\_4(t0, y0, h, f, m)$ реалізації методу Рунге-Кутти для одержання значень розв'язку в m початкових точках (m – порядок точності).

У результаті її роботи отримаємо точки розбиття – вектор t і значення розв'язку yp в цих точках:

$$t^\top = (0\ 0.01\ 0.02\ 0.03\ 0.04\ 0.05\ 0.06) \quad yp^\top = \left(\frac{3}{2}\ \frac{150}{101}\ \frac{25}{17}\ \frac{150}{103}\ \frac{75}{52}\ \frac{3603}{2522}\ \frac{242}{171}\right).$$

Після цього звертанням

$$j1{:=}0 \quad j2{:=}m \quad s{=}0 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ xj){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}5$$
$$j1{:=}0 \quad j2{:=}m{-}1 \quad s{=}1 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ xn){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}5,$$

за допомогою програми $R\_K\_KI(h, n, f, t, yp, xj, xn)$ з рис. 4 отримуємо розв'язок задачі Коші (12). Графік розв'язку наведено на рис. 5.

```
P_K_KI(h,n,f,t,yp) := | y ← yp
                      | for k ∈ m..n − 1
                      |   | t_{k+1} ← t_k + h
                      |   |       m
                      |   | p ← Σ (xj_i · y_{k−i})
                      |   |     i=0
                      |   | for s ∈ 1..10
                      |   |   |           m−1
                      |   |   | y_{k+1} ← Σ (xn_i · y_{k−i}) + h · xn_m · f(t_{k+1}, p)
                      |   |   |           i=0
                      |   |   | yp ← y_{k+1}
                      | (t  y)
```

Рис. 4. Текст програми $R\_K\_KI(h, n, f, t, yp, xj, xn)$

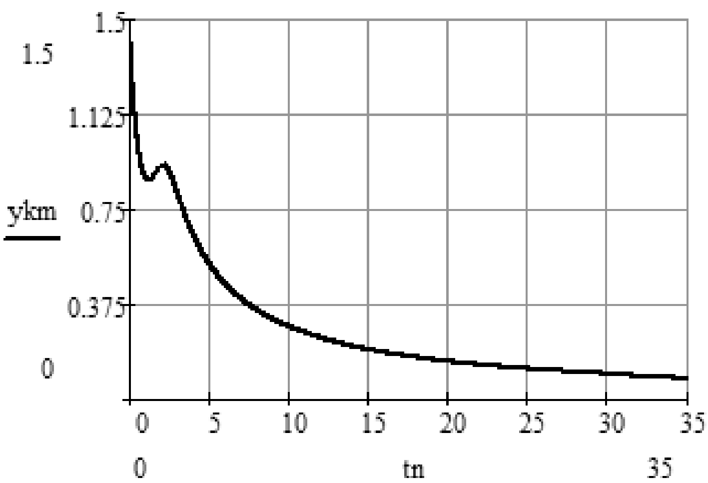

Рис. 5. Графік розв'язку

Список використаної літератури

1. *Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд - во МГУ, 1990. – 336 с.
3. *Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.
4. *Король І.Ю., Король І.І.* Узагальнюючий підхід до побудови багатокрокових методів розв'язання задачі Коші// Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика. - Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла 2012. – Вип.23, № 1. – С. 61 – 68.
5. *Король І.Ю., Король І.І.* Про єдиний підхід до побудови лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші// Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика. - Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла 2012. – Вип.23, № 2. – С. 86 – 94.

Одержано 25.10.2017