МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: `f-mat@uzhnu.edu.ua`.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ В ОДНОМУ КЛАСІ АЛГЕБР

The methods of constructing normal forms in the class of algebras are considered. Formulas of algebra describe Boolean images.

У роботі досліджуються методи побудови нормальних форм в класі алгебр, формули яких описують булеві зображення.

1. Вступ. У роботі [1] введено у розгляд універсальні алгебри P, які задані над квадратними бінарними матрицями порядку n і сигнатурою, що складається з двох бінарних операцій min, max і множини унарних операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, ($\mathbb{Z}_k = 0, 1, \ldots, k-1$), які задають поворот елементів матриці, кратний 90° відносно осей або центра симетрії. Для операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, введено поняття повних та замкнених власних підсистем, описано повні та замкнені системи тотожностей алгебри P, на їх основі побудовані канонічні форми. Відомо, що досконалі нормальні форми є зручним способом представлення формул алгебри логіки і мають широке практичне застосування [2]. У даній роботі для формул, які описують булеві зображення, введено поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри P і запропоновано метод її побудови.

2. Замкнені класи формул алгебри P. З визначення операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, випливає, що на матриці 4×4 пікселі утворюють три замкнені класи $\eta_1 = \{1, 4, 13, 16\}$, $\eta_2 = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}$, $\eta_3 = \{6, 7, 10, 11\}$ відносно цих операцій [1].

Задавши для кожного класу відповідно зображення

$A_1 =$ 

, $A_2 =$ 

, $A_3 =$ 

.

за допомогою операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, піксель із значенням 1 (чорний) може бути переміщений в довільну клітину, що належить відповідному замкненому класу. Наприклад, перемістимо чорні пікселі зображень A_1, A_2, A_3 на всі можливі місця квадрата (табл. 1).

Таблиця 1

A_1	A_2	$A_2^{T_6}$	$A_1^{T_2}$
$A_2^{T_1}$	A_3	$A_3^{T_2}$	$A_2^{T_2}$
$A_2^{T_3}$	$A_3^{T_3}$	$A_3^{T_4}$	$A_2^{T_4}$
$A_1^{T_5}$	$A_2^{T_5}$	$A_2^{T_7}$	$A_1^{T_4}$

З таблиці 1 випливає, що будь-яке зображення A на рецепторному полі 4×4 реалізується формулою алгебри P без використання операцій кон'юнкції

$$A = A_1^{T_{i_1}} \vee A_1^{T_{i_2}} \vee \ldots \vee A_1^{T_{i_k}} \vee A_2^{T_{j_1}} \vee \ldots \vee A_2^{T_{j_l}} \vee A_3^{T_{t_1}} \vee \ldots \vee A_3^{T_{t_q}}, \qquad (1)$$

де $i_k,\ t_q,\ j_l \in \mathbb{Z}_7$.

Наприклад, зображення A, наведене на рис. 1, може бути представлене формулою $A = A_1^{T_5} \vee A_2^{T_0} \vee A_2^{T_4} \vee A_2^{T_5} \vee A_3^{T_0} \vee A_3^{T_2}$.

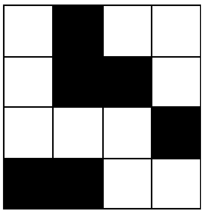
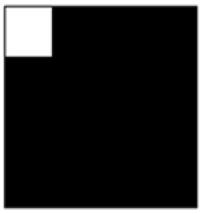
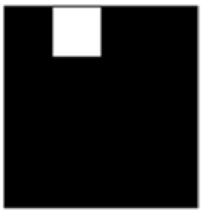
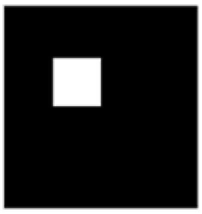
$A =$ 

Рис. 1

Аналогічно, використовуючи зображення

$B_1 =$ , $B_2 =$ , $B_3 =$ .

довільне зображення A може бути представлене формулою:

$$A = B_1^{T_{i_1}} \wedge B_1^{T_{i_2}} \wedge \ldots \wedge B_1^{T_{i_k}} \wedge B_2^{T_{j_1}} \wedge \ldots \wedge B_2^{T_{j_l}} \wedge B_3^{T_{t_1}} \wedge \ldots \wedge B_3^{T_{t_q}}, \qquad (2)$$

де $i_k,\ t_q,\ j_l \in \mathbb{Z}_7$.

Наприклад, зображення A (рис. 1) визначається формулою

$A = B_1^{T_0} \wedge B_1^{T_2} \wedge B_1^{T_4} \wedge B_2^{T_6} \wedge B_2^{T_2} \wedge B_2^{T_7} \wedge B_2^{T_3} \wedge B_2^{T_1} \wedge B_3^{T_4} \wedge B_3^{T_3}$.

Для квадрата 5×5 (рис. 3) його клітини відносно операцій повороту T_i, $i\in\mathbb{Z}_8$, утворюють шість замкнених класів: $\eta_1 = \{1,\ 5,\ 21,\ 25\}$, $\eta_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 20, 22,\ 24\}$, $\eta_3 = \{3,\ 11,\ 15,\ 23\}$, $\eta_4 = \{7,\ 9,\ 17,\ 19\}$, $\eta_5 = \{8,\ 12,\ 14,\ 18\}$, $\eta_6 = \{13\}$.

Довільне зображення на полі 5×5 може бути представлене формулою типу (1) або (2), використавши шість зображень, $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_6$ або $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_6$, вибраних аналогічно до наведених вище $A_1,\ A_2,\ A_3$ або $B_1,\ B_2,\ B_3$.

Розташування пікселів замкнених класів відносно операцій T_i, $i\in\mathbb{Z}_8$, для полів різної розмірності показано на рис. 3. Кількість замкнених класів відносно операцій T_i, $i\in\mathbb{Z}_8$, наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
1	1	$1+2$	$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3$	$1+2+3+4$	$1+2+3+4$

Розглянемо два квадрати розмірністю $2n \times 2n$ і $2n+2 \times 2n+2$. Другий квадрат можна отримати з першого, додавши по контуру по одному рядку і стовпчику з відповідною кількістю клітин (рис. 2).

$2n+2 \times 2n+2$

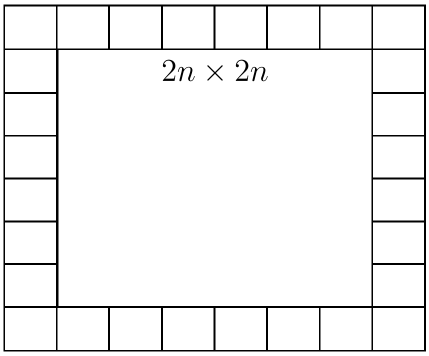


Рис. 2

Із таблиці 2 випливає, що на полі $2n \times 2n$, $n \in \mathbb{N}$, кількість замкнених класів не зміниться в порівнянні з полем $2n-1 \times 2n-1$, а на полі $2n+1 \times 2n+1$ з'являться $n+1$ нових класів на доданих рядках і стовпчиках у порівняні з полем $2n \times 2n$. Звідси випливає теорема.

Теорема 1. *На полях $2n \times 2n$ і $2n-1 \times 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$, існує $\frac{n^2+n}{2}$ замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$.*

3. Досконалі канонічні форми формул P−алгебри.

Означення 1. *Диз'юнктивна нормальна форма формули $\varphi = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ P− алгебри називається досконалою, якщо вона лексикографічно впорядкована відносно індексів змінних x_i, $i = 1, \ldots, k$, та індексів поворотів T_j, $j = 1, \ldots, l$, в елементарних перетинах p_i для всіх $i = 1, 2, \ldots n$.*

Розглянемо алгебру $U_4 = \langle A_4, \Omega \rangle$, де $A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right\}$ – множина бінарних матриць (бінарних зображень).

Для елементів a_{12}; a_{13}; a_{24}; a_{34}; a_{43}; a_{42}; a_{31}; a_{21} другого замкненого класу, відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, справедливі рівності: .

$$a_{12}^{T_0} = a_{12};\ a_{13}^{T_6} = a_{12}; a_{24}^{T_3} = a_{12};\ a_{34}^{T_4} = a_{12};$$

$$a_{43}^{T_7} = a_{12};\ a_{42}^{T_5} = a_{12}; a_{31}^{T_2} = a_{12};\ a_{21}^{T_1} = a_{12}. \tag{3}$$

З цих рівностей випливає, що:

1) для довільної операції T_k, $k \in \mathbb{Z}_8$, у другому класі існує елемент a_{ij} такий, що $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$;

2) для довільного елемента a_{ij} з другого класу існує операція T_k, $k \in \mathbb{Z}_8$, така, що $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$.

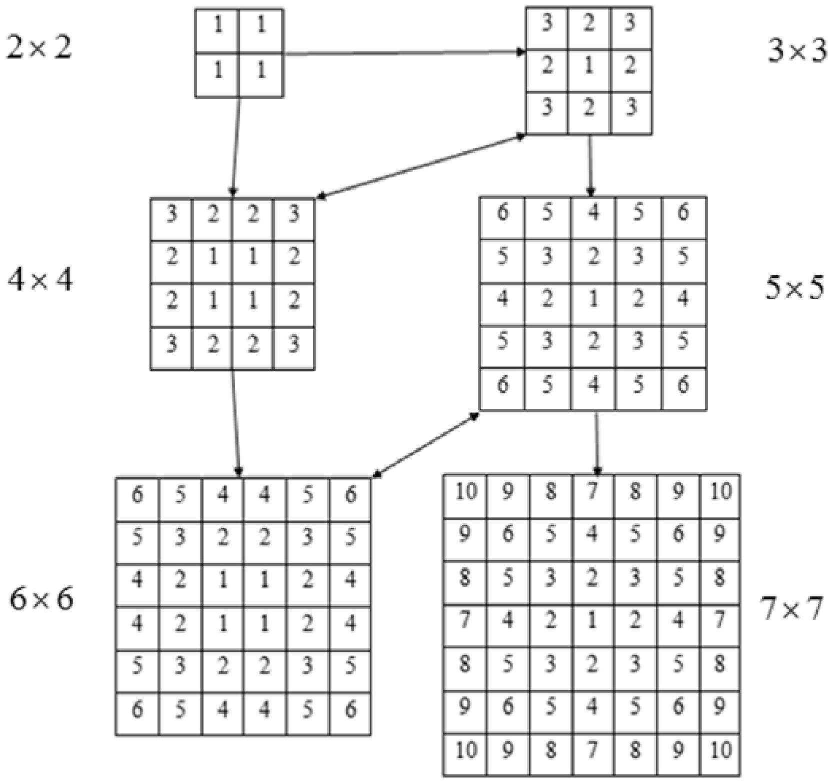


Рис. 3

Рівності (3) зручно задати у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

	T_0	T_6	
T_1			T_3
T_2			T_4
	T_5	T_7	

Користуючись цією таблицею для довільного перетину $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$, $t \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_8$ побудуємо зображення

$$A_t^*\,(a_{ij}) = \begin{cases} a_{12} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_0} \in r(x_t), & a_{12} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{13} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_6} \in r(x_t), & a_{13} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{24} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_3} \in r(x_t), & a_{24} = 0\,,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{34} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_4} \in r(x_t), & a_{34} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{43} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_7} \in r(x_t), & a_{43} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{42} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_5} \in r(x_t), & a_{42} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{31} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_2} \in r(x_t), & a_{31} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \\ a_{21} = 1,\ \text{якщо},\ x_t^{T_1} \in r(x_t), & a_{21} = 0,\ \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

а всі інші елементи матриці $A_t^*\,(a_{ij})$ дорівнюють нулеві.
З проведених міркувань випливає, що:

1) в матриці $r_t(A_t^*)$ елемент a_{12} дорівнює одиниці;

2) у всіх інших перетинах, які не є власною частиною $r(x_t)$, елемент a_{12} дорівнює нулеві.

Якщо елементарна кон'юнкція p_d має в своєму складі змінні $x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_l}$, $d_1, d_2, \ldots, d_l \in \mathbb{N}$, то її можна представити у вигляді

$$p_d = r(x_{d_1})\, r(x_{d_2}) \ldots r(x_{d_l})\,. \tag{4}$$

Для кожного перетину $r(x_{d_t})$ будується аналогічно до $A_t^*(a_{ij})$ зображення $A_{d_t}^*(a_{ij})$. Легко переконатись, що в зображенні $p_d\left(A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \ldots, A_{d_t}^*\right)$ елемент a_{12} дорівнює одиниці, а у всіх інших елементарних кон'юнкціях цей елемент дорівнює нулеві.

Проведені міркування справедливі для довільної алгебри $U_k = \langle A_k,\, \Omega\rangle \in P$, $k \geq 4$ [1], оскільки кожна з них має в своєму складі елементи другого замкненого класу, якщо $k = 2n$, $n = 2, 3, \ldots$. В алгебрах $U_k = \langle A_k,\, \Omega\rangle \in P$, при $k = 2n + 1$ роль елементів другого класу відіграють елементи п'ятого класу.

Нехай $\varphi_1 = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$, $\varphi_2 = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_t$ диз'юнктивні нормальні форми формул φ_1 і φ_2 алгебр $U_k = \langle A_k,\, \Omega\rangle \in P$, $k \geq 4$.

Теорема 2. *$\varphi_1 = \varphi_2$ тотожність, якщо $\forall p_d \in \varphi_1$, $\exists q_j \in \varphi_2$ таке, що $p_d \equiv q_j$ (p_d лексикографічно співпадає з q_j).*

Доведення. Нехай p_d має вигляд (4). Будуємо зображення $p_d\left(A_{d_1}^*, \ldots, A_{d_t}^*\right)$, в якому $a_{12} = 1$. Всім іншим змінним, які не входять в p_d, присвоїмо нульове значення. Якщо $\varphi_1 = \varphi_2$ тотожність, то $\exists q_j \in \varphi_2$ таке, що на заданому наборі зображень $A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \ldots, A_{d_t}^*$, приймає такі самі значення, що й φ_1 в тому числі в точці $a_{12} = 1$. А це можливо тільки тоді коли q_j підформула p_d ($q_j \subset p_d$).

Проводячи аналогічні міркування для формули φ_2 і будуючи відповідний набір зображення для q_j, на якому $a_{12} = 1$, отримуємо, що тотожність $\varphi_1 = \varphi_2$ буде мати місце, якщо $\forall q_j$ $\exists p_s$ таке, що $p_s \subset q_j$. Тоді з включень $q_j \subset p_d$ і $p_s \subset q_j$ випливає, що $p_s \subset p_d$, а це неможливо, оскільки в побудованих диз'юнктивних нормальних формах ні одна елементарна кон'юнкція не є підформулою іншої елементарної кон'юнкції. Теорему доведено.

4. Досконала диз'юнктивна нормальна форма алгебри $U_3 = \langle A_3,\, \Omega\rangle$. З означення операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, випливає, що в алгебрі U_3 є три замкнені класи елементів: $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\}$, $\{a_{12}, a_{23}, a_{32}, a_{21}\}$, $\{a_{22}\}$. Для елементів першого і

T_1

1	4	7
2	5	8
3	6	9

T_2

7	4	1
8	5	2
9	6	3

T_3

3	6	9
2	5	8
1	4	7

T_4

9	6	3
8	5	2
7	4	1

T_0

1	2	3
4	5	6
7	8	9

T_5

7	8	9
4	5	6
1	2	3

T_6

3	2	1
6	5	4
9	8	7

T_7

3	2	1
6	5	4
9	8	7

Рис. 4

другого класу справедливі співвідношення:

$$\begin{array}{l} a_{11}^{T_1}=a_{11};\ a_{13}^{T_6}=a_{11};\ a_{33}^{T_4}=a_{11};\ a_{31}^{T_5}=a_{11}; \\ a_{12}^{T_0}=a_{12};\ a_{23}^{T_3}=a_{12};\ a_{32}^{T_7}=a_{12};\ a_{21}^{T_2}=a_{12}. \end{array} \tag{5}$$

Співвідношення (5) зручно представити у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4

T_1	T_0	T_6
T_2		T_3
T_5	T_7	T_4

Користуючись цією таблицею для довільного перетину $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$ побудуємо зображення

$$A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases} a_{11}=1, \text{ якщо } x_t^{T_1}\in r_t,\ a_{11}=0, \text{ якщо } x_t^{T_1}\notin r_t, \\ a_{12}=1, \text{ якщо } x_t^{T_0}\in r_t;\ a_{12}=0, \text{ якщо } x_t^{T_0}\notin r_t, \\ a_{13}=1, \text{ якщо } x_t^{T_6}\in r_t;\ a_{13}=0, \text{ якщо } x_t^{T_6}\notin r_t, \\ a_{21}=1, \text{ якщо } x_t^{T_2}\in r_t;\ a_{21}=0, \text{ якщо } x_t^{T_2}\notin r_t, \\ a_{23}=1, \text{ якщо } x_t^{T_3}\in r_t;\ a_{23}=0, \text{ якщо } x_t^{T_3}\notin r_t, \\ a_{31}=1, \text{ якщо } x_t^{T_5}\in r_t;\ a_{31}=0, \text{ якщо } x_t^{T_5}\notin r_t, \\ a_{32}=1, \text{ якщо } x_t^{T_7}\in r_t;\ a_{32}=0, \text{ якщо } x_t^{T_2}\notin r_t, \\ a_{33}=1, \text{ якщо } x_t^{T_3}\in r_t;\ a_{33}=0, \text{ якщо } x_t^{T_4}\notin r_t, \\ a_{22}=0. \end{cases}$$

У зображенні $r_t\left(A_t^*(a_{ij})\right)$:

1) елементи a_{11} та a_{12} дорівнюють одиниці;

2) на всіх інших перетинах, які не є власною частиною $r(x_t)$, хоча б один із елементів a_{11}, a_{12} дорівнює нулеві.

Далі проводячи міркування, аналогічні доведенню попередньої теореми отримуємо, що результати цієї теореми поширюються і для алгебри U_3.

У даній роботі показано: 1. ДНФ формул алгебр класу P для $n > 2$ співпадають з побудованими в роботі [1] ДНФ. 2. Всі алгебри U_n, $n > 2$ є екваціонально еквівалентними, тобто множини всіх тотожностей в цих алгебрах співпадають.

Список використаної літератури

1. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. *Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К.* Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.

Одержано 04.07.2017