

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Випуск №2 (31)*

Ужгород 2017

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук; доцент.  
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.  
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.  
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Задирака В. К., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Перестюк М. О., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.  
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,  
І. А. Мич, упорядкування, 2017

© Ужгородський національний університет,  
2017

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF  
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 2 (31)*

Uzhhorod 2017

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

## EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).  
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.  
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.  
Published twice a year.  
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [f-mat@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mat@uzhnu.edu.ua).

## ЗМІСТ

1. <i>Маринець В. В.</i> Міклош Йосипович Ронто — до 75-ти річчя від дня народження	7
2. <i>Аюбова Н. С.</i> Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі з похибками вимірювань	10
3. <i>Баранник В. Ф.</i> Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи	15
4. <i>Бобик І. О., Симотюк М. М.</i> Задача типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументом	21
5. <i>Бондаренко В. М., Костишин Е. М.</i> Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Бондаренко В. М., Литвинчук І. В.</i> Опис категорії зображень постійного жорданового типу найменшої нециклічної групи	37
7. <i>Боярищева Т. В., Поляк І. Й.</i> Швидкість збіжності в ЦГТ для послідовності серій випадкових величин	48
8. <i>Варга Я. В.</i> Про одну нелінійну інтегральну крайову задачу	54
9. <i>Жучок Ю. В.</i> Моноїди ендоморфізмів напіврешіток напівгруп	63
10. <i>Заціха Я. В.</i> Опис піднапівгруп напівгруп малого порядку	69
11. <i>Капустей М. М., Слюсарчук П. В.</i> Застосування усереднених псевдомоментів для оцінки близькості розподілів двох сум випадкових величин	72
12. <i>Кирилюк О. А.</i> Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Клименко І. С., Лисенко С. В., Петравчук А. П.</i> Алгебри Лі диференціювань з абелевими ідеалами максимального рангу	83
14. <i>Козаченко Ю. В., Петранова М. Ю.</i> Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями	90
15. <i>Корепанова К. С.</i> Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь $n$ -го порядку з правильно змінними нелінійностями	101
16. <i>Король І. І., Король І. Ю.</i> Побудова лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші методом невизначених коефіцієнтів	115
17. <i>Мич І. А., Ніколенко В. В.</i> Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр	123
18. <i>Скочко В. М.</i> Графи переходів ітерацій ініціальних $(2, 2)$ -автоматів	129
19. <i>Тоїчкіна О. О.</i> Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності	137

# CONTENTS

1. <i>Marynets V. V.</i> Miclos Ronto(in the occasion of 75 <sup>th</sup> anniversary of his birthday)	7
2. <i>Aiubova N. S.</i> Estimation of the Hurst parameter of the Fractional Brownian Motion in one model with measurement errors	10
3. <i>Barannik V. F.</i> Tensor products of irreducible projective integer 2-adic representations of cyclic 2-group	15
4. <i>Bobyk I. O., Symotyuk M. M.</i> Dirichlet-type problem for partial differential equations with delay argument	21
5. <i>Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.</i> Modular representations with additional conditions of the semigroup $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Bondarenko V. M., Lytvynchuk I. V.</i> Description of the category of representations of constant Jordan type of the smallest noncyclic group	37
7. <i>Bojarischeva T. V., Poliak I. Y.</i> The rate of convergence in central limit theorem for sequence series of random variables	48
8. <i>Varga I. V.</i> On one nonlinear integral boundary value problem	54
9. <i>Zhuchok Yu. V.</i> Endomorphism monoids of semilattices of semigroups	63
10. <i>Zaciha Ya. V.</i> Description of the subsemigroup of semigroups of small order	69
11. <i>Kapustej M. M., Slyusarchuk P. V.</i> Using of middle pseudomoments for the estimation of proximity distributions of two sums of random variables	72
12. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Klimenko I. S., Lysenko S. V., Petravchuk A. P.</i> Lie algebras of derivations with abelian ideals of maximal rank	83
14. <i>Kozachenko Yu. V., Petranova M. Yu.</i> Real stationary Gaussian processes with stable correlation functions	90
15. <i>Korepanova K. S.</i> Asymptotic Behaviour of Solutions of $n$ -th Order Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities	101
16. <i>Korol I.I., Korol I.Yu.</i> Constructing of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem by the method of undetermined coefficients	115
17. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V.</i> Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras	123
18. <i>Skochko V. M.</i> Transition graphs of iterations of initial $(2, 2)$ -automata	129
19. <i>Toichkina O. O.</i> Endotypes of certain partial equivalence relations	137

УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ В  
ОДНОМУ КЛАСІ АЛГЕБР

The methods of constructing normal forms in the class of algebras are considered. Formulas of algebra describe Boolean images.

У роботі досліджуються методи побудови нормальних форм в класі алгебр, формули яких описують булеві зображення.

**1. Вступ.** У роботі [1] введено у розгляд універсальні алгебри  $P$ , які задані над квадратними бінарними матрицями порядку  $n$  і сигнатурою, що складається з двох бінарних операцій  $\min$ ,  $\max$  і множини унарних операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , ( $\mathbb{Z}_k = 0, 1, \dots, k-1$ ), які задають поворот елементів матриці, кратний  $90^\circ$  відносно осей або центра симетрії. Для операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , введено поняття повних та замкнених власних підсистем, описано повні та замкнені системи тотожностей алгебри  $P$ , на їх основі побудовані канонічні форми. Відомо, що досконалі нормальні форми є зручним способом представлення формул алгебри логіки і мають широке практичне застосування [2]. У даній роботі для формул, які описують булеві зображення, введено поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри  $P$  і запропоновано метод її побудови.

**2. Замкнені класи формул алгебри  $P$ .** З визначення операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , випливає, що на матриці  $4 \times 4$  пікселі утворюють три замкнені класи  $\eta_1 = \{1, 4, 13, 16\}$ ,  $\eta_2 = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}$ ,  $\eta_3 = \{6, 7, 10, 11\}$  відносно цих операцій [1].

Задавши для кожного класу відповідно зображення

$$A_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}, \quad A_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}.$$

за допомогою операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , піксель із значенням 1 (чорний) може бути переміщений в довільну клітину, що належить відповідному замкненому класу. Наприклад, перемістимо чорні пікселі зображень  $A_1, A_2, A_3$  на всі можливі місця квадрата (табл. 1).

Таблиця 1

$A_1$	$A_2$	$A_2^{T_6}$	$A_1^{T_2}$
$A_2^{T_1}$	$A_3$	$A_3^{T_2}$	$A_2^{T_2}$
$A_2^{T_3}$	$A_3^{T_3}$	$A_3^{T_4}$	$A_2^{T_4}$
$A_1^{T_5}$	$A_2^{T_5}$	$A_2^{T_7}$	$A_1^{T_4}$

З таблиці 1 випливає, що будь-яке зображення  $A$  на рецепторному полі  $4 \times 4$  реалізується формулою алгебри  $P$  без використання операцій кон'юнкції

$$A = A_1^{T_{i_1}} \vee A_1^{T_{i_2}} \vee \dots \vee A_1^{T_{i_k}} \vee A_2^{T_{j_1}} \vee \dots \vee A_2^{T_{j_l}} \vee A_3^{T_{t_1}} \vee \dots \vee A_3^{T_{t_q}}, \quad (1)$$

де  $i_k, t_q, j_l \in \mathbb{Z}_7$ .

Наприклад, зображення  $A$ , наведене на рис. 1, може бути представлено формулою  $A = A_1^{T_5} \vee A_2^{T_0} \vee A_2^{T_4} \vee A_2^{T_5} \vee A_3^{T_0} \vee A_3^{T_2}$ .

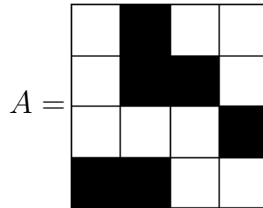
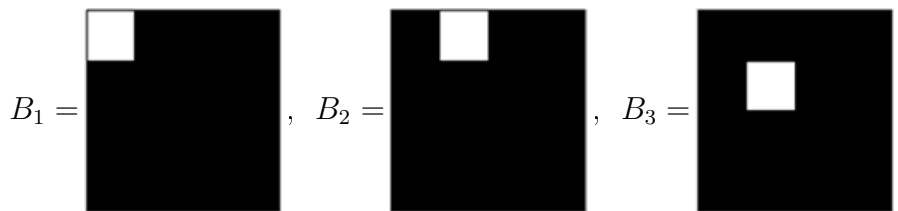


Рис. 1

Аналогічно, використовуючи зображення



довільне зображення  $A$  може бути представлено формулою:

$$A = B_1^{T_{i_1}} \wedge B_1^{T_{i_2}} \wedge \dots \wedge B_1^{T_{i_k}} \wedge B_2^{T_{j_1}} \wedge \dots \wedge B_2^{T_{j_l}} \wedge B_3^{T_{t_1}} \wedge \dots \wedge B_3^{T_{t_q}}, \quad (2)$$

де  $i_k, t_q, j_l \in \mathbb{Z}_7$ .

Наприклад, зображення  $A$  (рис. 1) визначається формулою

$$A = B_1^{T_0} \wedge B_1^{T_2} \wedge B_1^{T_4} \wedge B_2^{T_6} \wedge B_2^{T_2} \wedge B_2^{T_7} \wedge B_2^{T_3} \wedge B_3^{T_1} \wedge B_3^{T_4} \wedge B_3^{T_3}.$$

Для квадрата  $5 \times 5$  (рис. 3) його клітини відносно операцій повороту  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , утворюють шість замкнених класів:  $\eta_1 = \{1, 5, 21, 25\}$ ,  $\eta_2 = \{2, 4, 6, 10, 16, 20, 22, 24\}$ ,  $\eta_3 = \{3, 11, 15, 23\}$ ,  $\eta_4 = \{7, 9, 17, 19\}$ ,  $\eta_5 = \{8, 12, 14, 18\}$ ,  $\eta_6 = \{13\}$ .

Довільне зображення на полі  $5 \times 5$  може бути представлено формулою типу (1) або (2), використавши шість зображень,  $A_1, A_2, \dots, A_6$  або  $B_1, B_2, \dots, B_6$ , вибраних аналогічно до наведених вище  $A_1, A_2, A_3$  або  $B_1, B_2, B_3$ .

Розташування пікселів замкнених класів відносно операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , для полів різної розмірності показано на рис. 3. Кількість замкнених класів відносно операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

$1 \times 1$	$2 \times 2$	$3 \times 3$	$4 \times 4$	$5 \times 5$	$6 \times 6$	$7 \times 7$	$8 \times 8$
1	1	$1 + 2$	$1 + 2$	$1 + 2 + 3$	$1 + 2 + 3$	$1 + 2 + 3 + 4$	$1 + 2 + 3 + 4$



Розглянемо два квадрати розмірністю  $2n \times 2n$  і  $2n + 2 \times 2n + 2$ . Другий квадрат можна отримати з першого, додавши по контуру по одному рядку і стовпчику з відповідною кількістю клітин (рис. 2).

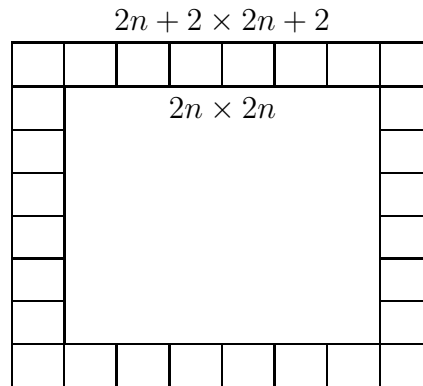


Рис. 2

Із таблиці 2 випливає, що на полі  $2n \times 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , кількість замкнених класів не зміниться в порівнянні з полем  $2n - 1 \times 2n - 1$ , а на полі  $2n + 1 \times 2n + 1$  з'являться  $n + 1$  нових класів на доданих рядках і стовпчиках у порівнянні з полем  $2n \times 2n$ . Звідси випливає теорема.

**Теорема 1.** На полях  $2n \times 2n$  і  $2n - 1 \times 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , існує  $\frac{n^2+n}{2}$  замкнених класів відносно операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ .

### 3. Досконалі канонічні форми формул Р-алгебри.

**Означення 1.** Диз'юнктивна нормальна форма формули  $\varphi = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$  Р-алгебри називається досконалою, якщо вона лексикографічно впорядкована відносно індексів змінних  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , та індексів поворотів  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , в елементарних перетинах  $p_i$  для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Розглянемо алгебру  $U_4 = \langle A_4, \Omega \rangle$ , де  $A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right\}$  – мно-

жина бінарних матриць (бінарних зображень).

Для елементів  $a_{12}$ ;  $a_{13}$ ;  $a_{24}$ ;  $a_{34}$ ;  $a_{43}$ ;  $a_{42}$ ;  $a_{31}$ ;  $a_{21}$  другого замкненого класу, відносно операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , справедливі рівності:

$$\begin{aligned} a_{12}^{T_0} &= a_{12}; a_{13}^{T_6} = a_{12}; a_{24}^{T_3} = a_{12}; a_{34}^{T_4} = a_{12}; \\ a_{43}^{T_7} &= a_{12}; a_{42}^{T_5} = a_{12}; a_{31}^{T_2} = a_{12}; a_{21}^{T_1} = a_{12}. \end{aligned} \quad (3)$$

З цих рівностей випливає, що:

- 1) для довільної операції  $T_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_8$ , у другому класі існує елемент  $a_{ij}$  такий, що  $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$ ;
- 2) для довільного елемента  $a_{ij}$  з другого класу існує операція  $T_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_8$ , така, що  $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$ .

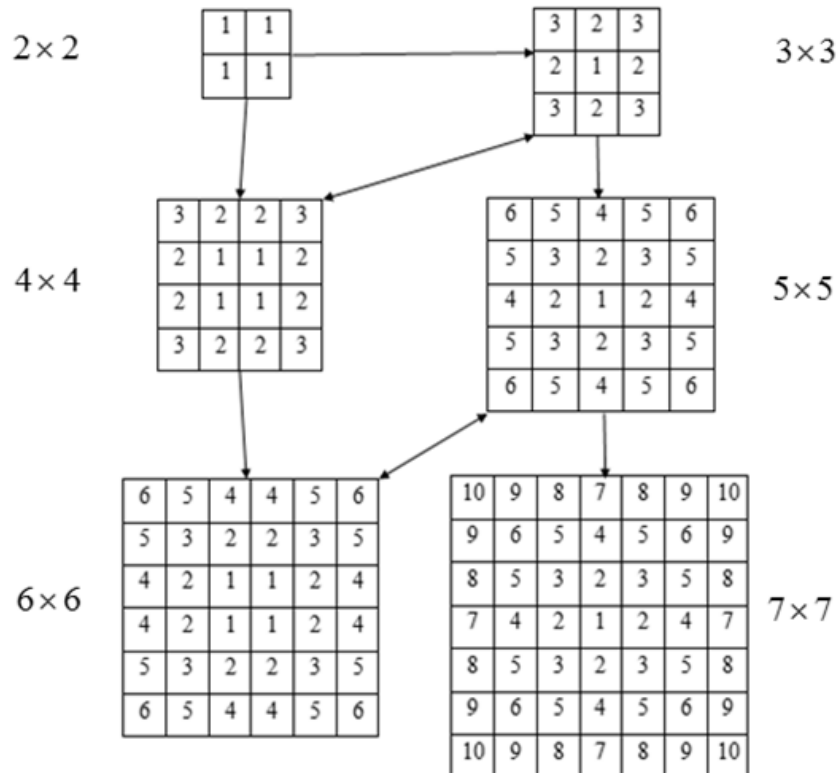


Рис. 3

Рівності (3) зручно задати у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

	$T_0$	$T_6$	
$T_1$			$T_3$
$T_2$			$T_4$
	$T_5$	$T_7$	

Користуючись цією таблицею для довільного перетину  $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_8$  побудуємо зображення

$$A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases} a_{12} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_0} \in r(x_t), & a_{12} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{13} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_6} \in r(x_t), & a_{13} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{24} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_3} \in r(x_t), & a_{24} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{34} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_4} \in r(x_t), & a_{34} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{43} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_7} \in r(x_t), & a_{43} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{42} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_5} \in r(x_t), & a_{42} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{31} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_2} \in r(x_t), & a_{31} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{21} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_1} \in r(x_t), & a_{21} = 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

а всі інші елементи матриці  $A_t^*(a_{ij})$  дорівнюють нулеві.

З проведених міркувань випливає, що:

- 1) в матриці  $r_t(A_t^*)$  елемент  $a_{12}$  дорівнює одиниці;
- 2) у всіх інших перетинах, які не є власною частиною  $r(x_t)$ , елемент  $a_{12}$  дорівнює нулеві.

Якщо елементарна кон'юнкція  $p_d$  має в своєму складі змінні  $x_{d_1}, x_{d_2}, \dots, x_{d_l}$ ,  $d_1, d_2, \dots, d_l \in \mathbb{N}$ , то її можна представити у вигляді

$$p_d = r(x_{d_1}) r(x_{d_2}) \dots r(x_{d_l}). \quad (4)$$

Для кожного перетину  $r(x_{d_t})$  будується аналогічно до  $A_t^*(a_{ij})$  зображення  $A_{d_t}^*(a_{ij})$ . Легко переконатись, що в зображенні  $p_d(A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \dots, A_{d_l}^*)$  елемент  $a_{12}$  дорівнює одиниці, а у всіх інших елементарних кон'юнкціях цей елемент дорівнює нулеві.

Проведені міркування справедливі для довільної алгебри  $U_k = \langle A_k, \Omega \rangle \in P$ ,  $k \geq 4$  [1], оскільки кожна з них має в своєму складі елементи другого замкненого класу, якщо  $k = 2n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . В алгебрах  $U_k = \langle A_k, \Omega \rangle \in P$ , при  $k = 2n + 1$  роль елементів другого класу відіграють елементи п'ятого класу.

Нехай  $\varphi_1 = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m$ ,  $\varphi_2 = q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_t$  диз'юнктивні нормальні форми формул  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  алгебр  $U_k = \langle A_k, \Omega \rangle \in P$ ,  $k \geq 4$ .

**Теорема 2.**  $\varphi_1 = \varphi_2$  тотожність, якщо  $\forall p_d \in \varphi_1, \exists q_j \in \varphi_2$  таке, що  $p_d = q_j$  ( $p_d$  лексикографічно співпадає з  $q_j$ ).

**Доведення.** Нехай  $p_d$  має вигляд (4). Будуємо зображення  $p_d(A_{d_1}^*, \dots, A_{d_l}^*)$ , в якому  $a_{12} = 1$ . Всім іншим змінним, які не входять в  $p_d$ , присвоїмо нульове значення. Якщо  $\varphi_1 = \varphi_2$  тотожність, то  $\exists q_j \in \varphi_2$  таке, що на заданому наборі зображень  $A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \dots, A_{d_l}^*$ , приймає такі самі значення, що й  $\varphi_1$  в тому числі в точці  $a_{12} = 1$ . А це можливо тільки тоді коли  $q_j$  підформула  $p_d$  ( $q_j \subset p_d$ ).

Проводячи аналогічні міркування для формули  $\varphi_2$  і будуючи відповідний набір зображення для  $q_j$ , на якому  $a_{12} = 1$ , отримуємо, що тотожність  $\varphi_1 = \varphi_2$  буде мати місце, якщо  $\forall q_j \exists p_s$  таке, що  $p_s \subset q_j$ . Тоді з включень  $q_j \subset p_d$  і  $p_s \subset q_j$  випливає, що  $p_s \subset p_d$ , а це неможливо, оскільки в побудованих диз'юнктивних нормальних формах ні одна елементарна кон'юнкція не є підформулою іншої елементарної кон'юнкції. Теорему доведено.

**4. Досконала диз'юнктивна нормальна форма алгебри  $U_3 = \langle A_3, \Omega \rangle$ .** З означення операцій  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_8$ , випливає, що в алгебрі  $U_3$  є три замкнені класи елементів:  $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\}$ ,  $\{a_{12}, a_{23}, a_{32}, a_{21}\}$ ,  $\{a_{22}\}$ . Для елементів першого і

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
1 4 7	7 4 1	3 6 9	9 6 3
2 5 8	8 5 2	2 5 8	8 5 2
3 6 9	9 6 3	1 4 7	7 4 1
$T_0$	$T_5$	$T_6$	$T_7$
1 2 3	7 8 9	3 2 1	3 2 1
4 5 6	4 5 6	6 5 4	6 5 4
7 8 9	1 2 3	9 8 7	9 8 7

Рис. 4

другого класу справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} a_{11}^{T_1} = a_{11}; \quad a_{13}^{T_6} = a_{11}; \quad a_{33}^{T_4} = a_{11}; \quad a_{31}^{T_5} = a_{11}; \\ a_{12}^{T_0} = a_{12}; \quad a_{23}^{T_3} = a_{12}; \quad a_{32}^{T_7} = a_{12}; \quad a_{21}^{T_2} = a_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Співвідношення (5) зручно представити у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4

$T_1$	$T_0$	$T_6$
$T_2$		$T_3$
$T_5$	$T_7$	$T_4$

Користуючись цією таблицею для довільного перетину  $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$  побудуємо зображення

$$A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases} a_{11} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_1} \in r_t; a_{11} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_1} \notin r_t, \\ a_{12} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_0} \in r_t; a_{12} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_0} \notin r_t, \\ a_{13} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_6} \in r_t; a_{13} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_6} \notin r_t, \\ a_{21} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_2} \in r_t; a_{21} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_2} \notin r_t, \\ a_{23} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_3} \in r_t; a_{23} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_3} \notin r_t, \\ a_{31} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_5} \in r_t; a_{31} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_5} \notin r_t, \\ a_{32} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_7} \in r_t; a_{32} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_7} \notin r_t, \\ a_{33} = 1, \text{ якщо } x_t^{T_4} \in r_t; a_{33} = 0, \text{ якщо } x_t^{T_4} \notin r_t, \\ a_{22} = 0. \end{cases}$$

У зображенні  $r_t(A_t^*(a_{ij}))$ :

- 1) елементи  $a_{11}$  та  $a_{12}$  дорівнюють одиниці;
- 2) на всіх інших перетинах, які не є власною частиною  $r(x_t)$ , хоча б один із елементів  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  дорівнює нулеві.

Далі проводячи міркування, аналогічні доведенню попередньої теореми отримуємо, що результати цієї теореми поширюються і для алгебри  $U_3$ .

У даній роботі показано: 1. ДНФ формул алгебр класу  $P$  для  $n > 2$  співпадають з побудованими в роботі [1] ДНФ. 2. Всі алгебри  $U_n$ ,  $n > 2$  є екваціонально еквівалентними, тобто множини всіх тотожностей в цих алгебрах співпадають.

### Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурин М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.

Одержано 04.07.2017