

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук; доцент.
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Задирака В. К., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,
І. А. Мич, упорядкування, 2017

© Ужгородський національний університет,
2017

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

1. <i>Маринець В. В.</i> Міклош Йосипович Ронто — до 75-ти річчя від дня народження	7
2. <i>Аюбова Н. С.</i> Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі з похибками вимірювань	10
3. <i>Баранник В. Ф.</i> Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи	15
4. <i>Бобик І. О., Симотюк М. М.</i> Задача типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументом	21
5. <i>Бондаренко В. М., Костишин Е. М.</i> Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Бондаренко В. М., Литвинчук І. В.</i> Опис категорії зображень постійного жорданового типу найменшої нециклічної групи	37
7. <i>Боярищева Т. В., Поляк І. Й.</i> Швидкість збіжності в ЦГТ для послідовності серій випадкових величин	48
8. <i>Варга Я. В.</i> Про одну нелінійну інтегральну крайову задачу	54
9. <i>Жучок Ю. В.</i> Моноїди ендоморфізмів напіврешіток напівгруп	63
10. <i>Заціха Я. В.</i> Опис піднапівгруп напівгруп малого порядку	69
11. <i>Капустей М. М., Слюсарчук П. В.</i> Застосування усереднених псевдомоментів для оцінки близькості розподілів двох сум випадкових величин	72
12. <i>Кирилюк О. А.</i> Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Клименко І. С., Лисенко С. В., Петравчук А. П.</i> Алгебри Лі диференціювань з абелевими ідеалами максимального рангу	83
14. <i>Козаченко Ю. В., Петранова М. Ю.</i> Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями	90
15. <i>Корепанова К. С.</i> Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку з правильно змінними нелінійностями	101
16. <i>Король І. І., Король І. Ю.</i> Побудова лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші методом невизначених коефіцієнтів	115
17. <i>Мич І. А., Ніколенко В. В.</i> Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр	123
18. <i>Скочко В. М.</i> Графи переходів ітерацій ініціальних $(2, 2)$ -автоматів	129
19. <i>Тоїчкіна О. О.</i> Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності	137

CONTENTS

1. <i>Marynets V. V.</i> Miclos Ronto(in the occasion of 75 th anniversary of his birthday)	7
2. <i>Aiubova N. S.</i> Estimation of the Hurst parameter of the Fractional Brownian Motion in one model with measurement errors	10
3. <i>Barannik V. F.</i> Tensor products of irreducible projective integer 2-adic representations of cyclic 2-group	15
4. <i>Bobyk I. O., Symotyuk M. M.</i> Dirichlet-type problem for partial differential equations with delay argument	21
5. <i>Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.</i> Modular representations with additional conditions of the semigroup $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Bondarenko V. M., Lytvynchuk I. V.</i> Description of the category of representations of constant Jordan type of the smallest noncyclic group	37
7. <i>Bojarischeva T. V., Poliak I. Y.</i> The rate of convergence in central limit theorem for sequence series of random variables	48
8. <i>Varga I. V.</i> On one nonlinear integral boundary value problem	54
9. <i>Zhuchok Yu. V.</i> Endomorphism monoids of semilattices of semigroups	63
10. <i>Zaciha Ya. V.</i> Description of the subsemigroup of semigroups of small order	69
11. <i>Kapustej M. M., Slyusarchuk P. V.</i> Using of middle pseudomoments for the estimation of proximity distributions of two sums of random variables	72
12. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Klimenko I. S., Lysenko S. V., Petravchuk A. P.</i> Lie algebras of derivations with abelian ideals of maximal rank	83
14. <i>Kozachenko Yu. V., Petranova M. Yu.</i> Real stationary Gaussian processes with stable correlation functions	90
15. <i>Korepanova K. S.</i> Asymptotic Behaviour of Solutions of n -th Order Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities	101
16. <i>Korol I.I., Korol I.Yu.</i> Constructing of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem by the method of undetermined coefficients	115
17. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V.</i> Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras	123
18. <i>Skochko V. M.</i> Transition graphs of iterations of initial $(2, 2)$ -automata	129
19. <i>Toichkina O. O.</i> Endotypes of certain partial equivalence relations	137

УДК 519.21

Н. С. Аюбова (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Consistent estimation of the Hurst parameter of the Fractional Brownian Motion by observations with errors is found.

Отримана конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

1. Вступ. Випадковий гауссовий процес $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$ з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s, t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0, 1)$.

Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху виникла у сучасних моделях гідромеханіки, метеорології, актуарної та фінансової математики і досліджувалася багатьма авторами. У статтях [1]–[3] для оцінювання параметра Хюрста були застосовані бакстерівські суми. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримувати неасимптотичні довірчі інтервали. Теореми Леві–Бакстера забезпечують конзистентність відповідних оцінок. Монографія Пракаса Рао [4] містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів методом бакстерівських сум.

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Так, у монографії [5] досліджені моделі регресії з похибками вимірювання. Робота [6] присвячена оцінці параметра в моделі з похибками.

У цій статті отримана конзистентна оцінка параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

2. Постановка задачі оцінювання. Нехай $0 < a < 1$, a — фіксоване. Випадковий процес $\xi_H(t), t \geq 0$ спостерігається у моменти часу $k \cdot a$, $k \geq 0$ похибками δ_k , $k \geq 0$. Далі припускаємо, що (δ_k) — послідовність незалежних однаково розподілених гауссових випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2 . Послідовність випадкових величин (δ_k) незалежна від дробового броунівського руху $\xi_H(t), t \geq 0$.

За спостереженнями випадкових величин $\eta_{H,k} = \xi_H(ak) + \delta_k$, $k \geq 0$ потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста H .

Покладемо $\xi_k = \xi_{k,H} = \eta_{k+1,H} - \eta_{k,H}$, $0 \leq k \leq n$.

3. Основний результат.

Лема 1. $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$ — стаціонарна гауссова випадкова послідовність з нульовим математичним сподіванням.

Доведення. Для $k, j \in \mathbb{Z}$ обчислимо

$$\begin{aligned} E\xi_k\xi_j &= E(\eta_{k+1} - \eta_k)(\eta_{j+1} - \eta_j) = \\ &= E(\xi_H(a(k+1)) + \delta_{k+1} - \xi_H(ak) - \delta_k)(\xi_H(a(j+1)) + \delta_{j+1} - \xi_H(aj) - \delta_j). \end{aligned}$$

Маємо

$$E(\delta_{k+1} - \delta_k)(\delta_{j+1} - \delta_j) = \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k=j; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &E(\xi_H(a(k+1)) - \xi_H(ak))(\xi_H(a(j+1)) - \xi_H(aj)) = \\ &= \frac{1}{2}(|a(k+1)|^{2H} + |a(j+1)|^{2H} - |a(k-j)|^{2H} - |a(k+1)|^{2H} - |aj|^{2H} + \\ &+ |a(k+1-j)|^{2H} - |ak|^{2H} - |a(j+1)|^{2H} + |a(k-1-j)|^{2H} + |ak|^{2H} + |aj|^{2H} - \\ &- |a(k-j)|^{2H}) = \frac{1}{2}(|a(k-j+1)|^{2H} - 2|a(k-j)|^{2H} + |a(k-j-1)|^{2H}). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} E\xi_k\xi_j &= \frac{|a|^{2H}}{2}(|k-j+1|^{2H} - 2|k-j|^{2H} + |k-j-1|^{2H}) + \\ &+ \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k=j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Отже, $E\xi_k\xi_j$ залежить лише від $k-j$. Лема доведена.

З формули (1) при $k=j$ маємо

$$E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0, 1).$$

Позначимо $\kappa(H) = E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0, 1)$.

Функція $\kappa(H), H \in (0, 1)$ неперервна і спадна на $(0, 1)$ з множиною значень $(a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$.

Функція

$$H = \frac{1}{2} \log_a(y - 2\sigma^2), y \in (a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$$

— обернена до функції $\kappa(H)$.

Покладемо

$$\beta(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 1 + 2\sigma^2; \\ \frac{1}{2} \log_a(y - 2\sigma^2), & y \in (2\sigma^2, 2\sigma^2 + a^2); \\ 1, & y \leq a^2 + 2\sigma^2; \end{cases}$$

$$S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{k,H}^2, n \geq 1.$$

Теорема 1. Для довільного $H \in (0, 1)$

$$S_n = S_{n,H} \rightarrow \kappa(H)$$

за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Доведемо, що для довільного $H \in (0, 1)$ дисперсія $VarS_{n,H} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$. Тоді $S_n - ES_n \rightarrow 0$ у середньому квадратичному при $n \rightarrow \infty$, отже, і за ймовірністю.

Внаслідок стаціонарності гауссової випадкової послідовності $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$,

$$ES_n = ES_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\xi_{k,H}^2) = \kappa(H).$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_{n,H}$:

$$VarS_{n,H} = E(S_{n,H} - ES_{n,H})^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k,j=1}^n (E(\xi_{k,H}^2 \xi_{j,H}^2) - E\xi_{k,H}^2 E\xi_{j,H}^2).$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням, має місце формула Іссерліса [7]:

$$E(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4) = E\eta_1 \eta_2 E\eta_3 \eta_4 + E\eta_1 \eta_3 E\eta_2 \eta_4 + E\eta_1 \eta_4 E\eta_2 \eta_3.$$

У цій формулі покладемо $\eta_1 = \eta_2 = \xi_{k,H}, \eta_3 = \eta_4 = \xi_{j,H}$ і отримаємо:

$$\begin{aligned} VarS_{n,H} &= \frac{2}{n^2} \sum_{k,j=1}^n (E(\xi_{k,H} \xi_{j,H}))^2 = \frac{2}{n^2} n \kappa^2(H) + \frac{4}{n^2} \sum_{k,j=1, k < j}^n E(\xi_{k,H} \xi_{j,H})^2 = \\ &= \frac{2\kappa^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2} \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) (E\xi_{0,H} \xi_{l,H})^2, \end{aligned}$$

де $l = j - k$.

Маємо

$$E\xi_{0,H} \xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a - \delta_l).$$

При $l = 1$ одержимо

$$\begin{aligned} E\xi_{0,H} \xi_{1,H} &= E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H(2a) - \xi_H(a) + \delta_2 - \delta_1) = \\ &= E\xi_H(a)(\xi_H(2a) - \xi_H(a)) + E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_2 - \delta_1) = \\ &= \frac{1}{2}(a^{2H} + (2a)^{2H} - a^{2H} - a^{2H}) - \sigma^2 = \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2. \end{aligned}$$

При $l > 1$

$$E\xi_{0,H} \xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a + \delta_l).$$

Оскільки $E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_{l+1} - \delta_l) = 0$ при $l > 1$, то

$$\begin{aligned} E\xi_{0,H}\xi_{l,H} &= E\xi_H(a)(\xi_H((l+1)a) - \xi_H(la)) = \\ &= \frac{a^{2H}}{2}(1 + (l+1)^{2H} - l^{2H} - 1 - l^{2H} + (l-1)^{2H}) = \\ &= \frac{a^{2H}}{2}((l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} VarS_{n,H} &= \frac{2k^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2} \left((n-1) \left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2 \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{l=2}^n \left(\frac{a^{2H}}{2} \right)^2 (n-l)((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \right). \end{aligned}$$

Позначимо

$$A_n = \frac{2k^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2} \left((n-1) \left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2 \right)^2 \right)$$

і оцінимо цей вираз:

$$A_n \leq \frac{2k^2(H)}{n} + \frac{4}{n} \left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2 \right)^2.$$

Очевидно, для довільного $H \in (0, 1)$ $A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Позначимо

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4}{n^2} \left(\sum_{l=2}^{n-1} \left(\frac{a^{2H}}{2} \right)^2 (n-l)((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \right) = \\ &= \frac{a^{4H}}{n^2} \sum_{l=2}^{n-1} (n-l)((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 = \\ &= \frac{a^{4H}}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n} \right) ((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n} \right) ((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2, \end{aligned}$$

так як $a^{4H} \leq 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^{2H}$. Вираз $(l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H}$ є приростом другого порядку функції f на відрізку $[l-1, l+1]$.

Тому $(l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H} = f''(\theta_{l+1}) \cdot 1^2$, де $\theta_l \in (l-1, l+1)$. Тоді

$$B_n \leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n} \right) ((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right) \left(\frac{2H(2H-1)}{\theta_l^{2-2H}}\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \frac{(2H(2H-1))^2}{(l-1)^{4-4H}} \leq \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \frac{4}{(l-1)^{4-4H}} \leq \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^{4-4H}} \leq \frac{4}{n} \begin{cases} \zeta(4-4H), & H \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{4-4H}}, & H \in [\frac{3}{4}, 1); \end{cases} \\
&\leq \frac{4}{n} \begin{cases} \zeta(4-4H), & H \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \ln n, & H = \frac{3}{4}; \\ 1 + \frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}
\end{aligned}$$

де $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функція Рімана.

Остаточно

$$\text{Var} S_{n,H} \leq A_n + \frac{4}{n} \begin{cases} \zeta(4-4H), & H \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \ln n, & H = \frac{3}{4}; \\ 1 + \frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

Звідси випливає, що для довільного $H \in (0, 1)$: $\text{Var} S_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Неважко бачити, що для будь-якого $H \in (0, 1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} S_{2^n, H}$ збіжний, звідки слідує, що $S_{2^n, H} \rightarrow \kappa(H)$ з ймовірністю 1 при $n \rightarrow \infty$ [8].*

Із теореми 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Статистика*

$$\Theta_n = \beta(S_n), n \geq 1$$

— *консистентна оцінка параметра Хюрста H дробового броунівського руху. При цьому статистика $\Theta_n = \beta(S_{2^n}), n \geq 1$ — строго консистентна оцінка цього параметра.*

Список використаної літератури

1. *Kurchenko O. O.* Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM // *Theory Stoch. Process.* – 2002. – Vol. 8(24). – P. 242–248.
2. *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // *Теорія ймовірностей та математична статистика.* – 2002. Вип. 67. – С. 88–96.
3. *Breton J. C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // *Electronic Journal of Statistics.* – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
4. *Prakasa Rao B. L. S.* *Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes.* – Chichester: John Wiley and Sons, 2010. – 280 p.
5. *Кукуш О. Г., Ліхтарьов І. А., Масюк С. В., Чепурний М. І., Шкляр С. В.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. – К.: ДІА., 2015. – 288 с.
6. *Сунявська О. О.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error // *Theory Stoch. Process.* – 2016. – Vol. 21(37). – P. 84–90.
7. *Isserlis L.* On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // *Biometrika.* – 1918. – Vol. 12. – P. 134–139.
8. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. – К.: Вища школа, 1983. – 227 с.

Одержано 06.10.2017