МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: `f-mat@uzhnu.edu.ua`.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 519.21

Н. С. Аюбова (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Consistent estimation of the Hurst parameter of tne Fractional Brownian Motion by observations with errors is found.

Отримана конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

1. Вступ. Випадковий гауссовий процес $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$ з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0,1)$.

Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху виникла у сучасних моделях гідромеханіки, метеорології, актуарної та фінансової математики і досліджувалася багатьма авторами. У статтях [1]–[3] для оцінювання параметра Хюрста були застосовані бакстерівські суми. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримувати неасимптотичні довірчі інтервали. Теореми Леві–Бакстера забезпечують консистентність відповідних оцінок. Монографія Пракаса Рао [4] містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів методом бакстерівських сум.

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Так, у монографії [5] досліджені моделі регресії з похибками вимірювання. Робота [6] присвячена оцінці параметра в моделі з похибками.

У цій статті отримана консистентна оцінка параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

2. Постановка задачі оцінювання. Нехай $0 < a < 1$, a — фіксоване. Випадковий процес $\xi_H(t), t \geq 0$ спостерігається у моменти часу $k \cdot a$, $k \geq 0$ похибками δ_k, $k \geq 0$. Далі припускаємо, що (δ_k) — послідовність незалежних однаково розподілених гауссових випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2. Послідовність випадкових величин (δ_k) незалежна від дробового броунівського руху $\xi_H(t), t \geq 0$.

За спостереженнями випадкових величин $\eta_{H,k} = \xi_H(ak) + \delta_k$, $k \geq 0$ потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста H.

Покладемо $\xi_k = \xi_{k,H} = \eta_{k+1,H} - \eta_{k,H}$, $0 \leq k \leq n$.

3. Основний результат.

Лема 1. $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$ — *стаціонарна гауссова випадкова послідовність з нульовим математичним сподіванням.*

Доведення. Для $k, j \in \mathbb{Z}$ обчислимо

$$E\xi_k\xi_j = E(\eta_{k+1} - \eta_k)(\eta_{j+1} - \eta_j) =$$

$$= E(\xi_H(a(k+1)) + \delta_{k+1} - \xi_H(ak) - \delta_k)(\xi_H(a(j+1)) + \delta_{j+1} - \xi_H(aj) - \delta_j).$$

Маємо

$$E(\delta_{k+1} - \delta_k)(\delta_{j+1} - \delta_j) = \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k = j; \end{cases}$$

$$E(\xi_H(a(k+1)) - \xi_H(ak))(\xi_H(a(j+1)) - \xi_H(aj)) =$$

$$= \frac{1}{2}(|a(k+1)|^{2H} + |a(j+1)|^{2H} - |a(k-j)|^{2H} - |a(k+1)|^{2H} - |aj|^{2H} +$$

$$+ |a(k+1-j)|^{2H} - |ak|^{2H} - |a(j+1)|^{2H} + |a(k-1-j)|^{2H} + |ak|^{2H} + |aj|^{2H} -$$

$$- |a(k-j)|^{2H}) = \frac{1}{2}(|a(k-j+1)|^{2H} - 2|a(k-j)|^{2H} + |a(k-j-1)|^{2H}).$$

Таким чином

$$E\xi_k\xi_j = \frac{|a|^{2H}}{2}(|k-j+1|^{2H} - 2|k-j|^{2H} + |k-j-1|^{2H}) +$$

$$+ \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k = j. \end{cases} \qquad (1)$$

Отже, $E\xi_k\xi_j$ залежить лише від $k - j$. Лема доведена.

З формули (1) при $k = j$ маємо

$$E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0,1).$$

Позначимо $\kappa(H) = E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2$, $H \in (0,1)$.

Функція $\kappa(H), H \in (0,1)$ неперервна і спадна на $(0,1)$ з множиною значень $(a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$.

Функція

$$H = \frac{1}{2}\log_a(y - 2\sigma^2), y \in (a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$$

— обернена до функції $\kappa(H)$.

Покладемо

$$\beta(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 1 + 2\sigma^2; \\ \frac{1}{2}\log_a(y - 2\sigma^2), & y \in (2\sigma^2, 2\sigma^2 + a^2); \\ 1, & y \leq a^2 + 2\sigma^2; \end{cases}$$

$$S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,H}^2, n \geq 1.$$

Теорема 1. *Для довільного* $H \in (0,1)$

$$S_n = S_{n,H} \to \kappa(H)$$

за ймовірністю при $n \to \infty$.

Доведення. Доведемо, що для довільного $H \in (0,1)$ дисперсія $VarS_{n,H} \to$ $\to 0$, при $n \to \infty$. Тоді $S_n - ES_n \to 0$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$ а, отже, і за ймовірністю.

Внаслідок стаціонарності гауссової випадкової послідовності $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$,

$$ES_n = ES_{n,H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(\xi_{k,H}^2) = \kappa(H).$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_{n,H}$:

$$VarS_{n,H} = E(S_{n,H} - ES_{n,H})^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(E(\xi_{k,H}^2\xi_{j,H}^2) - E\eta_{k,H}^2E\eta_{j,H}^2)).$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням, має місце формула Іссерліса [7]:

$$E(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = E\eta_1\eta_2E\eta_3\eta_4 + E\eta_1\eta_3E\eta_2\eta_4 + E\eta_1\eta_4E\eta_2\eta_3.$$

У цій формулі покладемо $\eta_1 = \eta_2 = \xi_{k,H}$,$\eta_3 = \eta_4 = \xi_{j,H}$ і отримаємо:

$$VarS_{n,H} = \frac{2}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(E(\xi_{k,H}\xi_{j,H}))^2 = \frac{2}{n^2}n\kappa^2(H) + \frac{4}{n^2}\sum_{k,j=1,k<j}^{n}E(\xi_{k,H}\xi_{j,H})^2 =$$

$$= \frac{2\kappa^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(E\xi_{0,H}\xi_{l,H})^2,$$

де $l = j - k$.

Маємо

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a) - \delta_l).$$

При $l = 1$ одержимо

$$E\xi_{0,H}\xi_{1,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H(2a) - \xi_H(a) + \delta_2 - \delta_1) =$$

$$= E\xi_H(a)(\xi_H(2a) - \xi_H(a)) + E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_2 - \delta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(a^{2H} + (2a)^{2H} - a^{2H} - a^{2H}) - \sigma^2 = \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2.$$

При $l > 1$

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(la) + \delta_l).$$

Оскільки $E(\delta_1-\delta_0)(\delta_{l+1}-\delta_l)=0$ при $l>1$, то

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H}=E\xi_H(a)(\xi_H((l+1)a)-\xi_H(la))=$$

$$=\frac{a^{2H}}{2}(1+(l+1)^{2H}-l^{2H}-1-l^{2H}+(l-1)^{2H})=$$

$$\frac{a^{2H}}{2}((l+1)^{2H}-2l^{2H}+(l-1)^{2H}).$$

Таким чином,

$$VarS_{n,H}=\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n^2}\Big((n-1)\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2+$$

$$+\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{a^{2H}}{2}\right)^2(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\Big).$$

Позначимо

$$A_n=\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n^2}\left((n-1)\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2\right)$$

і оцінимо цей вираз:

$$A_n\le\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n}\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2.$$

Очевидно, для довільного $H\in(0,1)$ $A_n\to 0, n\to\infty$.
Позначимо

$$B_n=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{l=2}^{n-1}\left(\frac{a^{2H}}{2}\right)^2(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\right)=$$

$$=\frac{a^{4H}}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2=$$

$$=\frac{a^{4H}}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\le$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2,$$

так як $a^{4H}\le 1$.

Розглянемо функцію $f(x)=x^{2H}$. Вираз $(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}$ є приростом другого порядку функції f на відрізку $[l-1,l+1]$.

Тому $(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}=f''(\theta_{l+1})\cdot 1^2$, де $\theta_l\in(l-1,l+1)$. Тоді

$$B_n\le\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2=$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)\left(\frac{2H(2H-1)}{\theta_l^{2-2H}}\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{(2H(2H-1))^2}{(l-1)^{4-4H}} \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{4}{(l-1)^{4-4H}} \le \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k^{4-4H}} \le \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\int_1^n\frac{dx}{x^{4-4H}}, & H\in[\frac{3}{4},1);\end{cases}$$

$$\le \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln n, & H=\frac{3}{4};\\ 1+\frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H\in(\frac{3}{4},1).\end{cases}$$

де $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — дзета–функція Рімана.

Остаточно

$$VarS_{n,H} \le A_n + \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln n, & H=\frac{3}{4};\\ 1+\frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H\in(\frac{3}{4},1).\end{cases}$$

Звідси випливає, що для довільного $H\in(0,1)$: $VarS_n \longrightarrow 0, n\longrightarrow\infty$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Неважко бачити, що для будь-якого* $H\in(0,1)$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}VarS_{2^n,H}$ *збіжний, звідки слідує, що* $S_{2^n,H}\longrightarrow\kappa(H)$ *з ймовірністю* 1 *при* $n\longrightarrow\infty$ *[8].*

Із теореми 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Статистика*

$$\Theta_n=\beta(S_n), n\ge 1$$

— консистентна оцінка параметра Хюрста H *дробового броунівського руху. При цьому статистика* $\tilde{\Theta}_n=\beta(S_{2^n}), n\ge 1$ *— строго консистентна оцінка цього параметра.*

Список використаної літератури

1. *Kurchenko O. O.* Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM // Theory Stoch. Process. – 2002. – Vol. 8(24). – P. 242–248.
2. *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. Вип. 67. – С. 88–96.
3. *Breton J. C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
4. *Prakasa Rao B. L. S.* Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. – Chichester: John Wiley and Sons., 2010. – 280 p.
5. *Кукуш О. Г., Ліхтарьов І. А., Масюк С. В., Чепурний М. І., Шкляр С. В.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. – К.: ДІА., 2015. – 288 с.
6. *Synyavska O. O.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error // Theory Stoch. Process. – 2016. – Vol. 21(37). – P. 84–90.
7. *Isserlis L.* On a formula for the product–moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // Biometrika. – 1918. – Vol. 12. – P. 134–139.
8. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. – К.: Вища школа, 1983. – 227 с.

Одержано 06.10.2017