МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (32)

Ужгород 2018

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (32)

Uzhhorod 2018

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty "UzhNU", Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 512.547.2

Д. Ю. Білецька, І. В. Шапочка (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕРОЗКЛАДНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

We have been found the formulas for the tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of the third degree.

В статті приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень симетричної групи третього степеня над кільцем цілих раціональних чисел.

Нехай S_3 — симетрична група третього степеня з твірними елементами a, b і твірними співвідношеннями:

$$a^2 = b^3 = e, \qquad ba = ab^2,$$

де e — одиничний елемент групи S_3. В цій статті приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень групи S_3 над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих раціональних чисел. В [1] вивчаються тензорні добутки скінченних груп, зокрема приведено формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень скінченної циклічної p-групи порядку p^2 над повним дискретно нормованим кільцем з полем лишків характеристики p, яке не є полем. Одержані нами результати базуються на класифікації всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи S_3, одержаною Л. А. Назаровою та А. В. Ройтером в [2]. Підкреслимо, в цій роботі доведено, що розклад цілочислових матричних зображень групи S_3 у суму нерозкладних зображень є однозначним з точністю до порядку слідування доданків. Всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення симетричної групи S_3 над кільцем цілих раціональних чисел $\mathbb{Z}$ вичерпуються наступними зображеннями:

$$\Gamma_1 : a \to 1, \quad b \to 1; \qquad \Gamma_2 : a \to -1, \quad b \to 1;$$

$$\Gamma_3 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_4 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_5 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_6 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_7 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_8 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_9 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{10} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Надалі для матричного зображення Γ групи S_3 через $[\Gamma]$ позначимо клас всіх еквівалентних зображенню Γ матричних цілочислових зображень групи S_3. У свою чергу для невід'ємних цілих чисел n_1, n_2, …, n_{10} через

$$n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + \cdots + n_{10}\Gamma_{10}$$

позначимо цілком розкладне зображення групи S_3, яке містить n_k раз нерозкладну компоненту Γ_k для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Теорема 1. *Справджуються наступні формули для тензорних добутків нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи S_3:*

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_1] = [\Gamma_1], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_2],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_3], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_4],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_1], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_4],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_3], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_7], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_9], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_5] = [2\Gamma_5], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
[\Gamma_6 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6 + \Gamma_{10}], & [\Gamma_6 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7 + \Gamma_{10}], \\
[\Gamma_6 \otimes \Gamma_8] = [2\Gamma_{10}], & [\Gamma_6 \otimes \Gamma_9] = [2\Gamma_{10}], \\
[\Gamma_6 \otimes \Gamma_{10}] = [3\Gamma_{10}], & [\Gamma_7 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6 + \Gamma_{10}], \\
[\Gamma_7 \otimes \Gamma_8] = [2\Gamma_{10}], & [\Gamma_7 \otimes \Gamma_9] = [2\Gamma_{10}], \\
[\Gamma_7 \otimes \Gamma_{10}] = [3\Gamma_{10}], & [\Gamma_8 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}], \\
[\Gamma_8 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8 + 2\Gamma_{10}], & [\Gamma_8 \otimes \Gamma_{10}] = [4\Gamma_{10}], \\
[\Gamma_9 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}], & [\Gamma_9 \otimes \Gamma_{10}] = [4\Gamma_{10}], \\
[\Gamma_{10} \otimes \Gamma_{10}] = [6\Gamma_{10}]. &
\end{array}
$$

Доведення. Перші дев'ятнадцять рівностей є очевидними. Для доведення наступних двадцяти шести рівностей для всіх $i,\ j \in \{3,\ 4,\ \ldots,\ 10\}$ таких, що $i \leq j$, нами знайдено оборотну матрицю $C^{(i,j)}$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ відповідного порядку, для якої справджуються рівності

$$\big(\Gamma_i \otimes \Gamma_j\big)(a)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\Big(\big(n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \cdots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10}\big)(a)\Big),$$

$$\big(\Gamma_i \otimes \Gamma_j\big)(b)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\Big(\big(n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \cdots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10}\big)(b)\Big),$$

для деяких невід'ємних цілих чисел $n_1^{(ij)},\ n_2^{(ij)},\ \ldots,\ n_{10}^{(ij)}$. Укажемо ці матриці:

$$C^{(3,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,9)} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&-1&1\\ 0&0&0&-1&-1&0&1&0&1&1&2&-2\\ 0&0&0&0&2&-2&-3&-1&-2&-1&-2&0\\ 0&0&0&0&-2&0&0&-1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&-1&2&1&1&2&-1&1\\ 0&0&1&0&0&1&-1&-1&-1&-1&2&-2\\ 0&0&0&0&0&-2&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&-2&2&-3&-2&-1&-2&0&-2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,10)} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&-1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-3&-1&-2&-1&-2&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2&-1&-1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-2&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&2&1&1&2&0&2&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-3&-2&-1&-2&0&-2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2&-1&0&-1&0&-1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,7)} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&-2&-1&-1&-1&0&-1\\ 0&0&0&1&2&1&0&0&0\\ 0&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&0\\ 0&0&0&1&-1&0&1&0&0\\ 0&0&0&-2&-1&-1&-1&-1&0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,8)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0
\end{pmatrix};$$

$$C^{(7,9)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0
\end{pmatrix};$$

$$C^{(7,10)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0
\end{pmatrix};$$

$$C^{(8,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(8,9)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(8,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(8,10)} & C_{12}^{(8,10)} \\ C_{21}^{(8,10)} & C_{22}^{(8,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 & -3 & -5 & -6 & -2 & -2 & -1 & -1 & -3 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & -4 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 3 & -1 & -4 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(9,10)} & C_{12}^{(9,10)} \\ C_{21}^{(9,10)} & C_{22}^{(9,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(10,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(10,10)} & C_{12}^{(10,10)} \\ C_{21}^{(10,10)} & C_{22}^{(10,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(10,10)} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-2&0&-2&-1&-1&-1&-1&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-2&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(10,10)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&-1&1&1&1&1&0&1\\ 1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -2&-1&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&3&1&1&2&0&2&-3&-2&-1&-2&0&-2\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&1&0&-1&-1&-1&0&-1 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&2&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&1&-1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&-1&2&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-3&-2&-2&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&2&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0&-2&1&-1&0&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-3&-1&-1&-2&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
1&0&1&1&1&0&-1&-1&-1&0&-1&0&1&0&1&1&1&0\\
-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&2&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-2&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&3&2&2&1&2&0&-3&-1&-2&-1&-2&0\\
0&-1&-1&0&0&0&2&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&0&-1\\
0&1&1&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&-1&1&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-4&-2&-2&-2&-1&-2&2&1&1&2&0&2\\
0&0&0&0&0&0&-2&-1&-1&-1&-1&-1&1&2&2&1&1&1\\
0&0&-1&0&-1&1&2&1&1&1&1&1&-1&0&-1&-1&-1&0\\
0&1&1&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-2&0&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-2&-1&-1&-1&-1&-1&1&-1&1&2&1&1\\
0&0&0&0&0&0&-4&-2&-2&-2&-2&-1&2&1&2&1&2&0
\end{pmatrix}.$$

Список використаної літератури

1. *Гудивок П.М., Рудько В. П.* Тензорные произведения конечных групп. – Ужгород: Патент, 1985. – 118 с.
2. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Целочисленные представления симметрической группы третьей степени // Укр. мат. журн. – 1962. – **XIV**, №3. – С. 271–288.

Одержано 04.03.2018