

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Випуск №1 (32)*

Ужгород 2018

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук, доцент.  
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.  
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.  
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Задирака В. К., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Перестюк М. О., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.  
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,  
І. А. Мич, упорядкування, 2018

© Ужгородський національний університет,  
2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF  
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 1 (32)*

Uzhhorod 2018

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

## EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).  
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.  
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.  
Published twice a year.  
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [f-mat@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mat@uzhnu.edu.ua).

## ЗМІСТ

1. Андрашко Ю. В., Максим В. В. Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів . . . . .	7
2. Білецька Д. Ю., Шапочка І. В. Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня . . . . .	15
3. Болдирева В. О., Жмихова Т. В. Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II. . . . .	29
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку . . . . .	36
5. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про властивості частково впорядкованих множин ММ-типу (1, 3, 5) . . . . .	50
6. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками . . . . .	54
7. Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М. Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних. . . . .	61
8. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь $n$ -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями . . . . .	67
9. Зубарук О. В. Про зображувальний тип напівгрупи $S_{32}^0$ над довільним полем	80
10. Кирилюк О. А. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ . . . . .	86
11. Кічмаренко О. Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем . . . . .	93
12. Козаченко Ю. В., Василик О. І. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ . . . . .	108
13. Маринець В. В., Питъовка О. Ю. Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною . . . . .	116
14. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри $U_2$ . . . . .	124
15. Сапожнікова К. Ю. Часткове усереднення систем диференціальних рівнянь з максимумом . . . . .	130
16. Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М. Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча . . . . .	136
17. Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О. Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича . . . . .	147

# CONTENTS

1. <i>Andrashko Yu. V., Maksym V. V.</i> Boolean facility location problem with client preferences.....	7
2. <i>Biletska D. Yu., Shapochka I. V.</i> Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree.....	15
3. <i>Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.</i> The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.</i> Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order.....	36
5. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On properties of posets of $MM$ -type $(1, 3, 5)$ .....	50
6. <i>Bryla A. Yu.</i> On lexicographic optimization problem with interval parameters....	54
7. <i>Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.</i> Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\.....	61
8. <i>Drozzhina A. V.</i> Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations $n$ -th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities.....	67
9. <i>Zubaruk O. V.</i> On representation type of the semigroup $S_{32}^0$ over an arbitrary field	80
10. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$ ...	86
11. <i>Kichmareno O. D.</i> Step-by-step averaging of functional-differential control systems.....	93
12. <i>Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.</i> Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$ .....	108
13. <i>V. V. Marynets, O. Y. Pytovka</i> Investigation of boundary-value problem for non-linear wave equation with discontinuous right part.....	116
14. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E. V.</i> Perfect disjunctive normal forms of algebra $U_2$ .....	124
15. <i>Sapozhnikova K. Yu.</i> Partial averaging of differential systems with maxima.....	130
16. <i>Slyvka-Tylyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.</i> The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space.....	136
17. <i>Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.</i> On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method.....	147

УДК 517.925

А. В. Дрожжина (Одеський нац. ун-т імені І.І. Мечникова)

**АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  $n$ -ГО ПОРЯДКУ, ЩО Є  
АСИМПТОТИЧНО БЛИЗЬКИМИ ДО РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО  
ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ**

The conditions of the existence and asymptotic representations of  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -solutions of the differential equations  $n$ -th order that are asymptotically close in a certain sense to the equations with regularly varying nonlinearities are established.

Встановлюються умови існування та асимптотичні зображення  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язків диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку, що у деякому сенсі є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями.

**1. Вступ.** Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

де  $n \geq 2$ ,  $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$  — неперервна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $Y_j$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ ,  $\Delta_{Y_j}$  — деякий односторонній окіл  $Y_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Означення 1.** Розв'язок  $y$  диференціального рівняння (1) називається  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язком, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , якщо він визначений на проміжку  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  і задовольняє наступні умови

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (2)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0.$$

Випадок, коли  $\lambda_0 = \pm\infty$  є особливим при вивченні таких розв'язків і потребує окремого розгляду. Кожний  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язок при  $t \uparrow \omega$  володіє (див. [1], Розділ 3, §10) наступними апріорними асимптотичними властивостями:

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-1)}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \quad (3)$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Асимптотична поведінка таких розв'язків в роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленко [2] та В.М. Євтухова, А.М. Клопота [3] досліджувалась для неавтономних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку, що містять у правій частині один або декілька доданків з правильно змінними нелінійностями, і в роботі Л.И. Кусік [4] для рівняння (1) загального виду при  $n = 2$ , тобто у випадку

диференціального рівняння другого порядку. При цьому в [4] припускалося, що рівняння (1) є у деякому сенсі асимптотично близьким до рівняння виду

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'),$$

де  $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  — неперервна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  — неперервна і правильно змінна при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функція порядку  $\sigma_j$ ,  $Y_j$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ ,  $\Delta_{Y_j}$  — деякий односторонній окіл  $Y_j$ ,  $j = 0, 1$ .

Теорія правильно змінних функцій докладно викладена в монографіях Е. Сенета [5] і N.H. Bingham, С.М. Goldie, J.L. Teugels [6]. Згідно з цією теорією кожна правильно змінна при  $y \rightarrow Y$  функція  $\varphi : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$  порядку  $\sigma$ , де  $Y$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ ,  $\Delta_Y$  — деякий односторонній окіл  $Y$ , допускає зображення виду

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \quad (4)$$

в якому  $L : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$  — повільно змінна функція при  $y \rightarrow Y$ , тобто така, що

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для будь-якого } \lambda > 0. \quad (5)$$

Серед властивостей повільно змінних при  $y \rightarrow Y$  функцій  $L : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$ , де  $Y$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ ,  $\Delta_Y$  — деякий односторонній окіл  $Y$ , відзначимо наступні.

$\mathcal{M}_1$ . Граничне співвідношення (5) виконується рівномірно за  $\lambda$  на будь-якому відрізку  $[c, d] \subset ]0, +\infty[$ .

$$\mathcal{M}_2. \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{\ln L(y)}{\ln |y|} = 0.$$

$\mathcal{M}_3$ . Існує неперервно диференційовна функція  $L_0 : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$ , яка носить назву нормалізована повільно змінна функція при  $y \rightarrow Y$ , така, що

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

$\mathcal{M}_4$ . При  $\gamma \neq 0$

$$\int_B^y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} = \frac{\nu |y|^\gamma}{\gamma L(y)} [1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

де

$$\nu = \text{sign } y, \quad B = \begin{cases} y_0, & \text{якщо } \left| \int_{y_0}^Y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} \right| = +\infty, \\ Y, & \text{якщо } \left| \int_{y_0}^Y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} \right| < +\infty, \end{cases} \quad y_0 \in \Delta_Y.$$

Крім того, введемо для повільно змінних функцій умову  $S_0$ .



**Означення 2.** Будемо казати, що повільно змінна при  $y \rightarrow Y$  функція  $L : \Delta_Y \rightarrow ]0, +\infty[$ , де  $Y$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ , і  $\Delta_Y$ - односторонній окіл  $Y$ , задовольняє умову  $S_0$ , якщо

$$L(\nu e^{[1+o(1)] \ln|y|}) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

де  $\nu = \text{sign } y$ .

Умову  $S_0$  свідомо задовольняють функції, що мають відмінну від нуля скінчену границю при  $y \rightarrow Y$  і функції виду

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2} |\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Метою даної роботи є поширення результатів з [4] на випадок довільного  $n \geq 2$ , а саме встановлення умов існування у диференціального рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ - розв'язків і асимптотичних зображень для таких розв'язків та їх похідних до порядку  $n - 1$  включно. Для цих розв'язків  $n - 1$ -а похідна є повільно змінною функцією при  $t \uparrow \omega$ .

**2. Основні результати.**

**Означення 3.** Будемо казати, що функція  $f$  у диференціальному рівнянні (1) задовольняє умову  $(RN)_\infty$ , якщо існує число  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ , неперервна функція  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  і неперервні правильно змінні при  $z_j \rightarrow Y_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) функції  $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) порядків  $\sigma_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ), такі, що для будь-яких неперервно диференційованих функцій  $z_j : [a, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_j}$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ), які задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_j(t)}{z_j(t)} = n - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (6)$$

має місце асимптотичне зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (7)$$

Оскільки в (7) кожна з функцій  $\varphi_j$  є правильно змінною функцією порядку  $\sigma_j$  при  $z_j \rightarrow Y_j$ , то згідно з (4)

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (8)$$

де кожна  $L_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) – неперервна повільно змінна функція при  $z_j \rightarrow Y_j$ .

При виконанні умови  $(RN)_\infty$  поряд з (8) будемо використовувати наступні позначення:

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \quad \mu_n = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j (n - j - 1), \quad C_n = \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n - j - 1)!} \right|^{\sigma_j};$$

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_j = +\infty, \text{ або} \\ & Y_j = 0 \text{ і } \Delta_{Y_j} \text{ – правий окіл нуля,} \\ -1, & \text{якщо } Y_j = -\infty, \text{ або} \\ & Y_j = 0 \text{ і } \Delta_{Y_j} \text{ – лівий окіл нуля,} \end{cases} \quad (j = \overline{0, n-1});$$

$$J_n(t) = \int_{A_n}^t p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j (\nu_j |\pi_\omega(s)|^{n-j-1}) ds,$$

де

$$A_n = \begin{cases} t_0, & \text{якщо } \int_{t_0}^t p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j (\nu_j |\pi_\omega(s)|^{n-j-1}) ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_{t_0}^t p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j (\nu_j |\pi_\omega(s)|^{n-j-1}) ds < +\infty, \end{cases} \quad (t_0 \in [a, \omega]).$$

**Теорема 1.** *Нехай функція  $f$  задовольняє умову  $(RN)_\infty$ ,  $\gamma \neq 0$  і повільно змінні функції  $L_j$  ( $j = \overline{0, n-2}$ ) задовольняють умову  $S_0$ . Тоді для існування у диференціального рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності*

$$\nu_j \nu_{n-1} \pi_\omega^{n-j-1}(t) > 0 \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_n(t) > 0 \quad (9)$$

в деякому лівому околі  $\omega$  і умови

$$\nu_j \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_j \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad \nu_{n-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_{n-1}, \quad (10)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} = 0. \quad (11)$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-1)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad (12)$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_n(t) [1 + o(1)], \quad (13)$$

причому таких розв'язків у випадку, коли  $\omega = +\infty$  існує  $n$ -параметрична сім'я, якщо  $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma > 0$ , і  $n-1$ -параметрична сім'я, якщо  $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma < 0$ , а у випадку, коли  $\omega < +\infty$  і  $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma > 0$  існує однопараметрична сім'я таких розв'язків.

**Доведення.** *Необхідність.* Нехай  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R} - P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язок диференціального рівняння (1). Тоді в силу умов (2) означення 1 існує  $t_1 \in [t_0, \omega[$  таке, що на проміжку  $[t_1, \omega[$  цей розв'язок і його похідні до порядку  $n-1$  включно зберігають знаки, причому  $\text{sign } y^{(j)}(t) = \nu_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) при  $t \in [t_1, \omega[$ . Крім того, в силу апіорних властивостей  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язків мають місце при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні співвідношення (3), з яких, зокрема, випливає справедливість виконання перших з нерівностей (9) на проміжку  $[t_1, \omega[$ , асимптотичних зображень (12) і граничних співвідношень

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = n - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (14)$$

З (14) ясно, що для функцій  $z_j(t) = y^{(j)}(t)$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) виконуються умови (6), і тому згідно з умовою  $(RN)_\infty$  і видом рівняння (1) одержуємо асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

або з урахуванням (8), (3), означень  $\mu_n$ ,  $\gamma$  і  $C_n$ -асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 C_n p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} |y^{(n-1)}(t)|^{1-\gamma} \prod_{j=0}^{n-1} L_j(y^{(j)}(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (15)$$

Оскільки в силу (14)

$$\begin{aligned} \ln |y^{(j)}(t)| &= [n - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| = \\ &= [1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} \quad (j = \overline{0, n-2}) \quad \text{при } t \uparrow \omega \end{aligned}$$

і функції  $L_j$  ( $j = \overline{0, n-2}$ ) задовольняють умову  $S_0$ , то

$$\begin{aligned} L_j(y^{(j)}(t)) &= L_j\left(\nu_j e^{[1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|^{n-j-1}}\right) = \\ &= L_j(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) [1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-2}) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Тому з (15) отримуємо при  $t \uparrow \omega$  асимптотичне співвідношення виду

$$\frac{y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{L_n(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0 p(t) C_n |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) [1 + o(1)]. \quad (16)$$

Крім того, з вищевикладеного і (2) ясно, що виконуються перші з умов (10) і функції  $L_j(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1})$  ( $j = \overline{0, n-2}$ ) визначенні на деякому проміжку  $[t_2, \omega]$ , де  $t_2 \in [t_1, \omega]$ .

Інтегруючи тепер (16) на проміжку від  $t_2$  до  $t$ , одержимо

$$\int_{y_0}^{y^{(n-1)}(t)} \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L_{n-1}(z)} = \alpha_0 C_n \int_{t_2}^t p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j(\nu_j |\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}) [1 + o(1)] d\tau,$$

де  $y_0 = y^{(n-1)}(t_2)$ .

Оскільки тут  $y^{(n-1)}(t) \rightarrow Y_{n-1}$  при  $t \uparrow \omega$ , то невластні інтеграли

$$\int_{y_0}^{Y_{n-1}} \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L_{n-1}(z)} \quad \text{і} \quad \int_{t_2}^{\omega} p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j(\nu_j |\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}) d\tau$$

або одночасно збігаються, або розбігаються. У випадку, коли вони розбігаються з використанням властивості  $\mathcal{M}_4$  повільно змінних функцій отримуємо співвідношення виду

$$\frac{\nu_{n-1} |y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\gamma L_n(y^{(n-1)}(t))} [1 + o(1)] = \alpha_0 C_n J_n(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

де в  $J_n$  границя інтегрування  $A_n$  дорівнює  $t_2$ , а у випадку, коли вони збігаються — співвідношення

$$C_{01} + \int_{Y_{n-1}}^{y^{(n-1)}(t)} \frac{|z|^{\gamma-1}}{L_n(z)} = C_{02} + \alpha_0 C_n \int_{\omega}^t p(\tau) |\pi_{\omega}(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j(\nu_j |\pi_{\omega}(\tau)|^{n-j-1}) [1 + o(1)] d\tau,$$

де  $C_{01}$ ,  $C_{02}$  — деякі сталі, з якого випливає, що  $C_{01} = C_{02}$ , і тому з використанням  $\mathcal{M}_4$  одержуємо асимптотичне співвідношення

$$\frac{\nu_{n-1} |y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\gamma L_n(y^{(n-1)}(t))} [1 + o(1)] = \alpha_0 C_n J_n(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

де в  $J_n$  границя інтегрування  $A_n$  дорівнює  $\omega$ .

З отриманих двох співвідношень ясно, що має місце при  $t \uparrow \omega$  асимптотичне зображення (13).

В свою чергу з (13) випливає виконання другої з нерівностей (9) і другої з умов (10).

Крім того, з (13) і (16) маємо, що

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_n(t)}{\gamma J_n(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (17)$$

Звідси з урахуванням другого асимптотичного співвідношення (3) одержуємо умову (13).

*Достатність.* Нехай виконуються умови (9)-(11). Доведемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (1) має  $P_{\omega}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ - розв'язок, який допускає при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (12), (13), а також з'ясуємо питання про кількість розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

Розглянемо спочатку співвідношення

$$\frac{|Y|^{\gamma}}{L_{0n-1}(Y)} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_n(t) [1 + v_n], \quad (18)$$

де  $L_{0n-1} : \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow ]0, +\infty[$  — неперервно диференційовна повільно змінна функція при  $Y \rightarrow Y_{n-1}$ , що існує згідно з властивістю  $\mathcal{M}_3$  повільно змінних функцій, яка задовольняє умови

$$\lim_{\substack{Y \rightarrow Y_{n-1} \\ Y \in \Delta_{Y_{n-1}}}} \frac{L_{n-1}(Y)}{L_{0n-1}(Y)} = 1, \quad \lim_{\substack{Y \rightarrow Y_{n-1} \\ Y \in \Delta_{Y_{n-1}}}} \frac{Y L'_{0n-1}(Y)}{L_{0n-1}(Y)} = 0. \quad (19)$$

Аналогічно тому, як при доведенні теореми 2.1 у роботі [3], встановлюємо з використанням умов (9)- (11) і принципу стислих відображень, що співвідношення (18) однозначно визначає неперервно диференційовну на множині  $[t_0, \omega[ \times \{v_n \in \mathbb{R} : |v_n| \leq \frac{1}{2}\}$ , де  $t_0$  — деяке число з проміжку  $[a, \omega[$ , неявну функцію  $Y(t, v_n)$  з наступними властивостями

$$Y(t, v_n) \in \Delta_{Y_{n-1}} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad v_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad (20)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y(t, v_n) = Y_{n-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J_n(t)(Y(t, v_n))'_t}{J'_n(t)Y(t, v_n)} = \frac{1}{\gamma} \text{ рівномірно за } v_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (21)$$

Тепер рівняння (1) за допомогою заміни

$$\frac{y^{(j-1)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!} [1 + v_j] \quad (j = \overline{1, n-1}), \quad (22)$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{0n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_n(t) [1 + v_n], \quad (23)$$

і урахуванням того, що тут  $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n)$ , зведемо до системи диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [(n-j)v_{j+1} - (n-j)v_j - (1+v_j)G(t, v_1, \dots, v_n)], \\ j = 0, 1, \dots, n-2, \\ v'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [-v_{n-1} - (1+v_{n-1})G(t, v_1, \dots, v_n)], \\ v'_n = \frac{1+v_n}{\pi_\omega(t)} \left[ G(t, v_1, \dots, v_n) \left( \gamma - \frac{Y(t, v_n)(L_{0n-1}(Y(t, v_n)))'_t}{L_{0n-1}(Y(t, v_n))} \right) - \frac{\pi_\omega(t)J'_n(t)}{J_n(t)} \right], \end{cases} \quad (24)$$

де

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \frac{\pi_\omega(t)}{Y(t, v_n)} f(t, Y_0(t, v_n)(1+v_1), \dots, Y_{n-2}(t, v_n)(1+v_{n-1}), Y(t, v_n)),$$

$$Y_j(t, v_n) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} Y(t, v_n) \quad (j = \overline{0, n-2}).$$

Оскільки для функцій

$$z_j(t, v_n, v_{j+1}) = Y_j(t, v_n)(1+v_{j+1}) \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad z_{n-1}(t, v_n) = Y(t, v_n)$$

в силу (21) і (11) виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) (z_j(t, v_n, v_{j+1}))'_t}{z_j(t, v_n, v_{j+1})} = n-j-1 \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) (z_{n-1}(t, v_n))'_t}{z_{n-1}(t, v_n)} = 0$$

рівномірно за  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ , де  $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_i| \leq \frac{1}{2}, i = \overline{1, n}\}$ , то згідно з умовою  $(RN)_\infty$ , яку задовольняє функція  $f$ , одержуємо асимптотичне співвідношення

$$\begin{aligned} & f(t, Y_0(t, v_n)(1+v_1), \dots, Y_{n-2}(t, v_n)(1+v_{n-1}), Y(t, v_n)) = \\ & = \alpha_0 p(t) \varphi_{n-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_j \left( \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} Y(t, v_n)(1+v_{j+1}) \right) [1+r_1(t, v_1, \dots, v_n)], \end{aligned}$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_1(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ рівномірно за } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Звідси з урахуванням того, що мають місце зображення (8), виконуються умови (21), (20), (11) і функції  $L_j$  ( $j = \overline{0, n-2}$ ) задовольняють умову  $S_0$ , а  $L_{n-1}$  – першу з умов (19), отримуємо

$$\begin{aligned} f(t, Y_0(t, v_n)(1 + v_1), \dots, Y_{n-2}(t, v_n)(1 + v_{n-1}), Y(t, v_n)) &= \alpha_0 C_n p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} \times \\ &\times |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{n-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} L_j(Y_j(t, v_n)(1 + v_{j+1})) \times \\ &\times [1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)] = \alpha_0 C_n p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{0n-1}(Y(t, v_n)) \times \\ &\times \prod_{j=0}^{n-2} L_j(v_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-1}) |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)] = \\ &= \alpha_0 C_n |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{0n-1}(Y(t, v_n)) J'_n(t) [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)] \prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j}, \end{aligned}$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_2(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Якщо, крім того, врахувати, що функція  $Y = Y(t, v_n)$  задовольняє рівність (18) і умову (20), то одержимо для функції  $G$  представлення

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \frac{\pi_\omega(t) J'_n(t)}{J_n(t)} \frac{\prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j}}{\gamma(1 + v_n)} [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)].$$

В силу цього виду функції  $G$ , умови (11), властивостей (20), (21) функції  $Y$ , а також другої з властивостей  $\mathcal{M}_3$  повільно змінних функцій, система дифференціальних рівнянь (24) має наступний вид

$$\begin{cases} v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [F_j(t, v_1, \dots, v_n) + (n-j)v_{j+1} - (n-j)v_j], \\ j = 0, 1, \dots, n-2, \\ v'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [F_{n-1}(t, v_1, \dots, v_n) - v_{n-1}], \\ v'_n = \frac{J'_n(t)}{J_n(t)} \left[ F_n(t, v_1, \dots, v_n) - v_n + \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{j+1} v_j + V(v_1, \dots, v_{n-1}) \right], \end{cases} \quad (25)$$

де функції  $F_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) неперервні на множині  $[t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$  і такі, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} F_j(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{рівномірно за } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n,$$

а  $V$ - функція виду

$$V(v_1, \dots, v_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} - 1 - \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j v_{j+1},$$

що задовольняє умови

$$V(0, \dots, 0) = 0, \quad \frac{\partial V(0, \dots, 0)}{\partial v_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Таким чином, система (25) є системою дифференціальних рівнянь такого ж типу, які розглядались у роботі В.М. Євтухова, А.М. Самойленко [7]. Ця система за допомогою додаткового перетворення

$$v_j(t) = \delta y_j(t) \quad (j = \overline{1, n-1}), \quad v_n(t) = y_n(t), \quad (26)$$

де стала  $\delta > 0$  обрана так, щоб виконувалась нерівність

$$0 \leq \delta \sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_j| < 1,$$

зводиться до системи дифференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[ \frac{1}{\delta} F_j(t, \delta y_1, \dots, \delta y_{n-1}, y_n) + (n-j)y_{j+1} - (n-j)y_j \right], \\ j = 0, 1, \dots, n-2, \\ y'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[ \frac{1}{\delta} F_{n-1}(t, \delta y_1, \dots, \delta y_{n-1}, y_n) - y_{n-1} \right], \\ y'_n = \frac{J'_n(t)}{J_n(t)} \left[ F_n(t, \delta y_1, \dots, \delta y_{n-1}, y_n) - y_n + \delta \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{j+1} y_j + V(\delta y_1, \dots, \delta y_{n-1}) \right], \end{cases} \quad (27)$$

яка задовольняє всі умови теореми 2.1 з роботи [7]. Згідно з цією теоремою система (27) має хоча б один розв'язок  $(y_j)_{j=1}^n : [t_1, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t_1 \in [t_0, \omega[$ ), що прямує до нуля при  $t \uparrow \omega$ . Більш того, з даної теореми випливає, що при  $\omega = +\infty$  існує  $n$ -параметрична сім'я таких розв'язків у випадку коли  $J_n(t) > 0$  при  $t \in ]t_0, \omega[$ , тобто з урахуванням другої з умов (9), коли виконується нерівність  $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma > 0$ , і  $n-1$ -параметрична сім'я - у випадку, коли  $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma < 0$ , а при  $\omega < +\infty$  існує однопараметрична сім'я зникаючих в точці  $\omega$  розв'язків у випадку, коли  $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma > 0$ . Кожному такому розв'язку системи дифференціальних рівнянь (27) в силу заміни (22), (23) і (26) відповідає  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язок  $y : [t_1, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  дифференціального рівняння (1), для якого мають місце асимптотичні зображення (12) і

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{0n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_n(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Враховуючи першу з умов (19), помічаємо, що остання з асимптотичних формул може бути записана у вигляді (13). Теорему повністю доведено.

В теоремі 1 асимптотична формула (13) неявно визначає асимптотику  $n-1$ -ї похідної  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язку дифференціального рівняння (1). Наступна теорема вказує умови при яких асимптотики  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язку та всіх його похідних до порядку  $n-1$  включно записуються у явному вигляді.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1 і функція  $L_{n-1}$  задовольняє умову  $S_0$ . Тоді для кожного  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язку диференціального рівняння (1) (у випадку їх існування) мають місце при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні співвідношення*

$$y^{(j)}(t) \sim \frac{\nu_{n-1}[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \left| \gamma C_n J_n(t) L_{n-1} \left( \nu_{n-1} |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma}} \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (28)$$

**Доведення.** Нехай диференціальне рівняння (1) має  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язок  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Тоді згідно з теоремою 1 виконуються умови (9) – (11) і для цього розв'язку мають місце асимптотичні співвідношення (12), (13). Крім того, як було доведено в першій частині цієї теореми, для даного розв'язку має місце також асимптотичне співвідношення (17), з якого випливає, що

$$\ln |y^{(n-1)}(t)| = [1 + o(1)] \ln |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Тоді, враховуючи, що функція  $L_{n-1}$  задовольняє умову  $S_0$ , будемо мати

$$\begin{aligned} L_{n-1}(y^{(n-1)}(t)) &= L_{n-1} \left( \nu_{n-1} e^{\ln |y^{(n-1)}|} \right) = L_{n-1} \left( \nu_{n-1} e^{[1+o(1)] \ln |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}}} \right) = \\ &= L_{n-1} \left( \nu_{n-1} |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Використовуючи це асимптотичне співвідношення перепишемо (13) у вигляді

$$|y^{(n-1)}(t)|^\gamma = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_n(t) L_{n-1} \left( \nu_{n-1} |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

звідки випливає, що

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} \left| \gamma C_n J_n(t) L_{n-1} \left( \nu_{n-1} |J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Тому з (12) і (13) отримуємо явні асимптотичні співвідношення (28). Теорему доведено.

### 3. Приклад одного класу диференціальних рівнянь.

Розглянемо клас істотно нелінійних диференціальних рівнянь виду

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})}{\sum_{k=l+1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})}, \quad (29)$$

де  $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ ,  $p_k : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  – неперервна функція,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  – неперервна та правильно змінна при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функція порядку  $\sigma_{kj}$ ,  $Y_j$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ ,  $\Delta_{Y_j}$  – односторонній окіл  $Y_j$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ .

Припустимо, що для деяких  $s \in \{1, \dots, l\}$  і  $r \in \{l+1, \dots, m\}$  виконуються нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1) (\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) \quad \text{при } k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}, \quad (30)$$



$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1)(\sigma_{rj} - \sigma_{kj}) \text{ при } k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}, \tag{31}$$

де

$$\beta = \text{sign } \pi_\omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

і покажемо, що у даному випадку права частина рівняння (29) задовольняє умову  $(RN)_\infty$ .

Нехай  $z_j : [a, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_j}$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) – довільні функції, що задовольняють умови (6). В силу другої з цих умов

$$\ln |z_j(t)| = [n-j-1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

З використанням цих асимптотичних співвідношень, першої з умов (6), зображень

$$\varphi_{kj}(z_j) = |z_j|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}, k = \overline{1, m}),$$

де  $L_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  – повільно змінні функції при  $z_j \rightarrow Y_j$ , а також властивості  $\mathcal{M}_2$  повільно змінних функцій, для  $k \in \{1, \dots, l\}$  знаходимо

$$\begin{aligned} & \ln \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} [(\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln |z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - \ln L_{sj}(z_j(t))] = \\ & = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln |z_j(t)| \left( \sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} \right) = \\ & = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln |z_j(t)| (\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1)) = \\ & = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln |\pi_\omega(t)| \sum_{j=0}^{n-1} [(n-j-1)(\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) + o(1)] = \\ & = \beta \ln |\pi_\omega(t)| \left( \frac{p_k(t) - p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} + \beta \sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1)(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1)) \right) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Тут згідно з нерівністю (30) права частина прямує до  $-\infty$  при  $t \uparrow \omega$  і тому

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} = 0 \quad \text{при } k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогічним чином з використанням нерівностей (31) встановлюємо, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}.$$

В силу цих граничних співвідношень одержуємо зображення

$$\frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{\sum_{k=l+1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))} = \frac{\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

тобто має місце асимптотичне зображення (7), в якому

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_s}{\alpha_r}, \quad p(t) = \frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t)) = \frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t))} \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (32)$$

Тут  $\varphi_j(z_j)$  згідно з властивостями правильно змінних функцій є правильно змінною функцією порядку

$$\sigma_j = \sigma_{sj} - \sigma_{rj} \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad (33)$$

при  $z_j \rightarrow Y_j$ , причому її повільно змінна складова є функцією виду

$$L_j(z_j) = \frac{L_{sj}(z_j)}{L_{rj}(z_j)} \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (34)$$

Таким чином, права частина рівняння (29) задовольняє умову  $(RN)_\infty$ .

Тому у випадку, коли для деяких  $s \in \{1, \dots, l\}$  і  $r \in \{l+1, \dots, m\}$  виконуються нерівності (30), (31) і при цьому стала  $\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{rj})$  не дорівнює нулю, для рівняння (29) справедливі твердження теорем 1 і 2, у яких замість  $\alpha_0$ ,  $\sigma_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ),  $p$  і  $L_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) треба обрати їх вирази з формул (32)–(34).

**Висновки.** У даній статті для диференціального рівняння загального виду  $n$ -го порядку, яке у деякому сенсі є асимптотично близьким до двочленого рівняння з правильно змінними нелінійностями, вперше отримано результати про умови існування  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ -розв'язків, що є особливим типом у класі, так званих,  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків. Крім того, одержано асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку  $n-1$  включно, та з'ясовано питання про кількість розв'язків з даними асимптотичними зображеннями. Встановлені результати проілюстровано на прикладі одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку.

### Список використаної літератури

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Дисс.... д. физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 295 с.
2. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения. – 2011. – т. 47, № 5. – С. 628-650.

3. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. — 2013. — т.65, № 3. — С.354-380.
4. *Кусик Л. И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісник Одеського нац. ун-ту. — 2012. — т.17. — Вип. 1-2(13-14). — Матем. і механ. — С. 80-97.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. — 1985. — 144с.
6. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press. Cambridge. — 1987. — 494p.
7. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. — 2010. — Т.62, №1. — С. 52 - 80.

Одержано 05.04.2018