

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (32)

Ужгород 2018

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук, доцент.
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Задирака В. К., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,
І. А. Мич, упорядкування, 2018

© Ужгородський національний університет,
2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (32)

Uzhhorod 2018

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

1. Андрашко Ю. В., Максим В. В. Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів	7
2. Білецька Д. Ю., Шапочка І. В. Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня	15
3. Болдирева В. О., Жмихова Т. В. Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II.	29
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку	36
5. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про властивості частково впорядкованих множин ММ-типу (1, 3, 5)	50
6. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками	54
7. Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М. Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних.	61
8. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями	67
9. Зубарук О. В. Про зображувальний тип напівгрупи S_{32}^0 над довільним полем	80
10. Кирилюк О. А. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$	86
11. Кічмаренко О. Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем	93
12. Козаченко Ю. В., Василик О. І. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$	108
13. Маринець В. В., Питъовка О. Ю. Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною	116
14. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри U_2	124
15. Сапожнікова К. Ю. Часткове усереднення систем диференціальних рівнянь з максимумом	130
16. Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М. Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча	136
17. Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О. Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича	147

CONTENTS

1. <i>Andrashko Yu. V., Maksym V. V.</i> Boolean facility location problem with client preferences.....	7
2. <i>Biletska D. Yu., Shapochka I. V.</i> Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree.....	15
3. <i>Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.</i> The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.</i> Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order.....	36
5. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On properties of posets of MM -type $(1, 3, 5)$	50
6. <i>Bryla A. Yu.</i> On lexicographic optimization problem with interval parameters....	54
7. <i>Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.</i> Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\.....	61
8. <i>Drozzhina A. V.</i> Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations n -th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities.....	67
9. <i>Zubaruk O. V.</i> On representation type of the semigroup S_{32}^0 over an arbitrary field	80
10. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$...	86
11. <i>Kichmareno O. D.</i> Step-by-step averaging of functional-differential control systems.....	93
12. <i>Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.</i> Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$	108
13. <i>V. V. Marynets, O. Y. Pytovka</i> Investigation of boundary-value problem for non-linear wave equation with discontinuous right part.....	116
14. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E. V.</i> Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2	124
15. <i>Sapozhnikova K. Yu.</i> Partial averaging of differential systems with maxima.....	130
16. <i>Slyvka-Tylyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.</i> The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space.....	136
17. <i>Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.</i> On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method.....	147

УДК 512.84

О. А. Кирилюк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ РОЗВ'ЯЗНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(q, \mathbb{Z}_p)$

All minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ (q is a prime, \mathbb{Z}_p is the ring of rational p -adic integers) are described up to conjugation for $p > 2$.

Описуються з точністю до спряженості мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ (q — просте число, \mathbb{Z}_p — кільце цілих раціональних p -адичних чисел) для $p > 2$.

В [1] класифіковано мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, F)$ для довільного поля F . В [2] на основі результатів [1] методами теорії ціло-числових P -адичних зображень скінченних груп вивчалися мінімальні незвідні підгрупи повної лінійної групи над кільцем цілих P -адичних чисел. В даній роботі вивчаються з точністю до спряженості мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$, де q — просте число, а \mathbb{Z}_p — кільце цілих раціональних p -адичних чисел, а при $p > 2$ одержана їх повна класифікація.

Позначимо через M_p множину класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(q, \mathbb{Q}_p)$, де \mathbb{Q}_p — поле раціональних p -адичних чисел.

Слідуючи [1], розглянемо наступні серії підгруп групи $GL(q, \mathbb{Q}_p)$.

Абелеві групи з M_p .

Нехай P_q — силовська q -підгрупа групи \mathbb{Q}_p^* .

Теорема 1. В групі $GL(q, \mathbb{Q}_p)$ існують абелеві незвідні мінімальні підгрупи тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:

- 1) $|P_q| = q^m$ ($0 < m < \infty$), $P_q = \langle \delta \rangle$;
- 2) існує просте $r > q$ таке, що $(\mathbb{Q}_p(\varepsilon) : \mathbb{Q}_p) = q$, де ε — первісний корінь степеня r з 1.

У першому випадку M_p містить групу $H_{q^{m+1}} = \left\langle \left(\begin{array}{cc} 0 & \delta \\ E_{q-1} & 0 \end{array} \right) \right\rangle$, а у друго-

му випадку — $H_{q,r} = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & \beta_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{q-1} & \cdots & \beta_{q-1} \end{array} \right) \right\rangle$, де β_i — коефіцієнти незвідного

над \mathbb{Q}_p полінома $f(x) = -\beta_0 - \beta_1 x - \beta_{q-1} x^{q-1} + x^q$, що є дільником полінома $x^r - 1$.

Неабелеві групи з M_p .

Теорема 2. Кожна неабелева група із M_p є мономільною та є або біпримарною, або p -групою.

Серія біпримарних груп

Нехай $\delta \in \mathbb{Q}_p^*$, $\delta^{q^{l-1}} = 1$, $l = 1, 2, \dots, m$, якщо $|P_q| = q^m$ ($m > 0$). Покладемо

$$h_l = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & \delta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{q-1} & \cdots & 0 \end{array} \right) \in GL(q, \mathbb{Q}_p).$$

Нехай Π' — множина таких простих чисел p_i , для яких $P_{p_i} \neq \langle 1 \rangle$, $p_i \in \Pi$, $q_1 \neq q$, $p_i \neq \text{char} F_p$, $q_1 \equiv t \pmod{q}$. Тоді над полем Галуа $GF(q_1)$ має місце розклад полінома ділення круга $\Phi_q(x)$ на незвідні над $GF(p_i)$ поліноми

$$\Phi_q(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_s(x), \quad \deg \varphi_j(x) = t, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad s = \frac{q-1}{t}.$$

Нехай $\frac{x^{q-1}}{\varphi_j(x)} = \lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(j)}(x) + \dots + \lambda_{q-1}^{(j)}x^{q-1}$. Покладемо

$$d = d_0^{(j)} = \text{diag} \left[\eta^{\lambda_0^{(j)}}, \dots, \eta^{\lambda_{q-1}^{(j)}} 1, \dots, 1 \right], \quad \eta^{q_1} = 1,$$

$$H_{l, q_1, j} = \langle h, d_0^{(j)} \rangle, \quad \text{коли } l = 1 \text{ та } j = 1, \dots, s, \quad \text{коли } l > 1.$$

Позначимо $d_k^{(j)} = h_l^{-k} d_0^{(j)} h_l^k$, $\Delta^{(j)} = \langle d_0^{(j)} \rangle \times \dots \times \langle d_{l-1}^{(j)} \rangle$, $k = 1, \dots, t-1$. Тоді $H_{l, q_1, j} = \Delta^{(j)} \rtimes \langle h_j \rangle$, $|H_{l, q_1, j}| = p^l q_1^t$.

Серія q -груп ($q > 2$)

Нехай $\varepsilon \in Q_p^*$, $\varepsilon^q = 1$. Позначимо $a = \text{diag} [1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{q-1}]$, $H_{q^l, q} = \langle h^l, a \rangle$. Тоді $H_{q^l, q} = \langle a \rangle \rtimes \langle h^l \rangle$, $|H_{q^i, q}| = q^{l+1}$, $i = 1, \dots, m-1$.

Нехай далі $p > 2$ і

$$p-1 = q^n \cdot p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s} \tag{1}$$

— розклад числа $p-1$, де p_1, p_2, \dots, p_s — всі різні, відмінні від q прості дільники числа $p-1$, $n \geq 0$, $n_i > 0$, ($i = 1, \dots, s$).

Позначимо через Π' множину всіх таких простих чисел $r > q$, для яких $(Q_p(\varepsilon) : Q_p) = q$ (ε — первісний корінь степеня r з 1). Зберігаючи попередні позначення, розглянемо множину L_q представників класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп M_q групи $GL(q, Q_p)$. З [1] та будови поля Q_p випливає наступний опис множини L_q .

I. Якщо $p, q > 2$, то покладемо $L_q = \{H_{l, p_i, j}\} \cup \{H_{q^l, q}\} \cup \{H_{q^{n+1}}\} \cup \{H_{q, r}\}$ при $n > 0$ і $L_q = \{H_{l, p_i, 1}\} \cup \{H_{q, r}\}$ при $n = 0$ ($i = 1, \dots, s$; $l = 0, 1, \dots, n-1$ при $n > 0$ і $l = 1$ при $n = 0$; $r \in \Pi'$);

II. Якщо $q > 2$, $p = 2$, то покладемо $L_q = \{H_{1, 2, 1}\} \cup \{H_{q, r}\}$ ($r \in \Pi'$);

III. Якщо $q = 2$, $p > 3$, то покладемо при $s > 0$

$$L_2 = \{H_{l, p_i, j}\} \cup \{H_{2^{2k}}\} \cup \{H_{2^{n+1}}\} \cup \{H_{2, r}\} \quad \text{при } n > 2 \text{ і}$$

$$L_2 = \{H_{1, p_i, 1}\} \cup \{H_{2^{1+1}}\} \cup \{H_{2, r}\} \quad \text{при } n = 1 (k = 0, 1, \dots),$$

і $L_2 = \{H_2^2, 2^k\} \cup \{H_{2^{n+1}}\}$ при $n \geq 2$, $s = 0$ і $L_2 = \{H_{2^{1+1}}\} \cup \{H_{2, r}\}$ при $n = 1$, $s = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$ при $|P_2| = 2^n$;

IV. Якщо $q = 2$, $p = 2, 3$, то покладемо $L_2 = \{H_{2^{1+1}}\} \cup \{H_{2, 3}\}$.

Звідси і з теореми 1 випливає наступне твердження.

Твердження 1. 1) Кожна мінімальна незвідна розв'язна підгрупа H групи $GL(q, Q_p)$ є циклічною тоді і тільки тоді, коли $q = 2$ і $p = 2, 3$. 2) Нехай $q \neq 2$ і $p \neq 2, 3$ при $q = 2$. Тоді довільна неабелева мінімальна незвідна розв'язна підгрупа групи $GL(q, Q_p)$ є групою Міллера–Морено і спряжена в $GL(q, Q_p)$ з однією і тільки однією групою з множини L_q .

Наслідок 1. *Ненільтпотентна група G тоді і тільки тоді буде групою Міллера–Морено, коли вона ізоморфна мінімальній незвідній лінійній групі простого степеня над полем Q_p при підходящому p .*

Доведення. Нехай G – ненільтпотентна група Міллера–Морено. Тоді $|G| = q^l \cdot p_1^m$, де $q \neq p_1$; q, p_1 – прості числа; m – показник, якому належить p_1 за модулем q , $l > 1$; p_1 -підгрупа групи G_{p_1} Силова групи G є нормальною в G і є прямим добутком m групи порядку p_1 , q -підгрупа Силова G_q групи G є циклічною, а порядок центра групи G дорівнює q^{l-1} . Таким чином

$$G = G_{p_1} \times G_q, G_q = \langle u \rangle, u^{q^l} = 1 \text{ і } G_{p_1} = \langle \nu_0 \rangle \times \dots \times \langle \nu_{m-1} \rangle, \nu_i^{p_1} = 1 \text{ (} i = 0, \dots, m-1 \text{)}.$$

Очевидно $G_{p_1} = \langle u, \nu_0 \rangle$, а елементи $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{m-1}$ можна вибрати так, що

$$u^{-1} \nu_0 u = \nu_1, u^{-1} \nu_1 u = \nu_2, \dots, u^{-1} \nu_{m-2} u = \nu_{m-1}, u^{-1} \nu_{m-1} u = \nu_0^{\alpha_0} \nu_1^{\alpha_1} \dots \nu_{m-1}^{\alpha_{m-1}}, \quad (2)$$

де $\varphi(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \dots - \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m$ – незвідний над полем $GF(p_1)$ дільник полінома ділення круга $\Phi_q(x)$. Оскільки m – показник числа p_1 за модулем q , то над полем $GF(p_1)$ має місце розклад $\Phi_q(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_\nu(x)$, де $\varphi_j(x)$ – незвідний над $GF(p_1)$ поліном ($j = 1, \dots, \nu$), $\nu = \frac{p_1-1}{m}$. Замінюючи у (2) u на u^k ($(k, q) = 1$) у якості $\varphi(x)$ можна одержати кожен поліном $\varphi_j(x)$. Звідси і з (2) випливає, що трійка чисел l, q, j визначають єдину групу Міллера–Морено порядку $q^l \cdot p_1^m$.

Розглянемо арифметичну прогресію $\{1 + q^l \cdot p_1 k\}$ ($k = 1, 2, \dots$). За теоремою Діріхле серед членів цієї прогресії міститься нескінченне число простих чисел. Нехай $p = q^l \cdot p_1 k_0 + 1$ – одне з них. Тоді група Q_p^* містить елемент δ порядку q^{l-1} і елемент η порядку p_1 . Побудуємо групу $H_{l,q,j} = \langle h_l, d_j \rangle$, де

$$h_l = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad d_j = \text{diag} [\eta^{\lambda_0}, \dots, \eta^{\lambda_{m-1}}, \dots, 1]$$

– матриці порядку q . Згідно з [1] $H_{l,q,j}$ – мінімальна незвідна розв’язна підгрупа групи $GL(q, Q_p)$, що задовольняє умовам (2). Отже, $H_{l,q,j}$ – група Міллера–Морено порядку $q^l \cdot p_1^m$. Наслідок доведено.

Позначимо тепер через M_q і M'_q – множини всіх мінімальних незвідних розв’язних підгруп груп $GL(q, Q_p)$ і $GL(q, Z_p)$ відповідно, а через L_q і L'_q – підмножини представників класів спряжених підгруп з M_q і M'_q .

Будемо вважати тепер, що $p \neq 2$. Розглянемо окремо $q \neq p$ і $q = p$.

Теорема 3. *Мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(q, Z_p)$ при $q \neq p$ і $p > 2$ з точністю до спряженості вичерпуються групами:*

- 1) $H_{l,p_i,j}; H_{q^l,q}; H_{q^{n+1}}; H_{q,r}$ при $q > 2$ і $n > 0$;
- 2) $H_{l,p_i,1}; H_{q,r}$ при $q > 2$ і $n = 0$ $s > 0$; $H_{q,r}$ при $s = 0$;
- 3) $H_{l,p_i,j}; H_{2^2,2^k}; H_{2^{n+1}}; H_{2,r}$ при $q = 2$ і $n \geq 2$ $s > 0$; $H_{2^2,2^k}; H_{2^{n+1}}; H_{2,r}$ при $s = 0$;
- 4) $H_{l,p_i,1}; H_{2^{1+1}}; H_{2,r}$ при $q = 2$ і $n = 1$ $s > 0$; $H_{2^{1+1}}; H_{2,r}$ при $s = 0$;
- 5) $H_{2^{1+1}}; H_{2,3}$ при $q = 2$ і $p = 3$.

Доведення. Нехай $q \neq p$ і $p > 2$. Тоді з описання множини M'_q випливає, що довільна неабелева група з M_q є p' -підгрупою. Звідси та із того, що $M'_q \subseteq M_q$ випливає, що $L'_q = L_q$.

Нехай тепер G — абелева група. Тоді з опису множини L_q випливає, що $G \cong H_{q^{n+1}}$ або $H \cong H_{q,r}$ ($r \in \Pi'$). Оскільки циклічна група $G_n = \langle a \rangle$ порядку p має точні незвідні \mathbb{Z}_p -зображення степеня q тоді і тільки тоді, коли $q = 2; p = 3$, то у всіх інших випадках $r \neq p$ і G — p' -підгрупа групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ і $L'_q = L_q$. Якщо G — абелева мінімальна незвідна розв'язна підгрупа групи $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ типу $H_{2,3}$, то G спряжена в $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ з $H_{2,3}$. Звідси $L'_2 = L_2$ при $p = 3$. Теорема доведена.

Нехай тепер $q = p; p > 2$. Враховуючи зв'язок між спряженістю скінченних підгруп групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ і підгруп групи $GL(p, \mathbb{Q}_p)$ (див. [2]) і описання множини L'_q , в цьому випадку одержимо, що з точністю до ізоморфізму нециклічні мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ вичерпуються біпримарними групами Міллера-Морено G_j порядків

$$|G_j| = p \cdot p_j^{m_j} \quad (j = 1, \dots, s). \tag{3}$$

Тоді з (1) випливає, що $p - 1 = p_j^{m_j} \dots p_s^{m_s}$ і класифікація випливає з описання множини L_q .

Доведемо кілька лем для групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$, аналогічних лемам з [1].

Лема 1. *Нехай $H \in M'_p$ неабелева група. Тоді H мономіальна.*

Доведення. Нехай неабелева група з M'_p . Тоді $H \cong G_j$ для деякого $j, 1 \leq j \leq s$ і $H = B_j \rtimes G$, де $G = \langle C \rangle$, а $j = \langle b_j \rangle \dots \langle b_{m_j-1} \rangle$. Якщо H імпримітивна, то H мономіальна, оскільки p — просте число. Припустимо, що H є примітивною групою. B_j є нормальною підгрупою групи H і, в силу теореми Кліфорда, є цілком звідною і над \mathbb{Z}_p . За наслідком з цієї теореми незвідні частини H попарно еквівалентні над кільцем \mathbb{Z}_p . Так як степінь незвідної частини групи H дорівнює 1, то H — група скалярних матриць і тому є абелевою. Суперечність. Отже, H — мономіальна. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай H — абсолютно незвідна мономіальна розв'язна підгрупа групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$, S_p — симетрична група степеня p , V — \mathbb{Z}_p -модуль розмірності p і*

$$V = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{p-1} \tag{4}$$

— розклад модуля V на системи імпримітивності групи H , а

$$f : H \rightarrow S_p \tag{5}$$

— гомоморфізм, визначений розкладом (4). Тоді в $\text{Ker } f$ є нескалярна матриця.

Доведення. Нехай $h \in H$. Оскільки H імпримітивна, то $h(W_j) = W_j$ ($i, j = 0, 1, \dots, p - 1$) і h визначає підстановку \bar{h} множини $0, 1, \dots, p - 1$, таку що $\bar{h}(i) = j$. Нехай $f : H \rightarrow S_p$ — гомоморфізм, визначений розкладом (4). Тоді $\Gamma = \text{Im } f$ — транзитивна підгрупа групи S_n . Тому $|\Gamma| \leq |\Gamma_p|$, де Γ_p — максимальна транзитивна розв'язна підгрупа групи S_p і $|\Gamma_p| = p(p - 1)$. Звідси $|\text{Im } f| \leq p(p - 1)$. Нехай всі матриці з $\text{Ker } f$ скалярні. Тоді кожна лінійно незалежна над \mathbb{Z}_p система елементів з H містить не більше $p(p - 1)$ елементів, але група H , що розглядається як підгрупа групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ є абсолютно незвідною тоді і тільки тоді, коли в ній знайдеться p^2 лінійно незалежних елементів. Одержана суперечність доводить лему.

Доведення. З леми 4 випливає, що $H = D \langle h \rangle$, де $h^p = E$, $D = \langle d_0 \rangle \cdots \langle d_{p-1} \rangle$ і $H = \langle h, d_0 \rangle$. В силу (3) $|H| = p \cdot p_i^{m_i}$, звідки $|D| = p_i^{m_i}$, $D \cong \langle b_0 \rangle \cdots \langle b_{m_i-1} \rangle$. Тому знайдуться такі елементи $d'_0, \dots, d'_{m_i-1} \in D$, що $D \cong \langle d'_0 \rangle \cdots \langle d'_{m_i-1} \rangle$. Оскільки $b_0^{m_i} = 1$, то $(d'_0)^{p_i} = d^{p_i} = E$, а так як $G_{i_0} = \langle h, b_0 \rangle$, то $G_{i_0} = H$. Якщо в якості d взяти матрицю d'_0 , то одержимо необхідне. Лемі доведено.

Лема 6. $\det d = 1$, тобто $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{p-1} = 0$.

Доведення. Нехай $H = \langle h, d \rangle$, де h має вигляд (10), d — вигляд (11). Якщо розглядати H як підгрупу групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$, то, в силу [1], $\det d = 1$, звідки випливає твердження леми.

Теорема 4. 1) Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ ($p > 2$) з точністю до спряженості вичерпуються групами $H_{p,r}$, де r пробігає множини Π' . 2) Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ при $p > 2$ з точністю до спряженості вичерпуються групами $H_i = \langle h, d \rangle$ порядків $|H| = p \cdot p_i^{m_i}$ ($i = 1, \dots, s$), де h має вигляд (10), а d_i — вигляд (11), η — елемент порядку p_i групи \mathbb{Z}_p^* (p_i пробігає різні прості дільники числа $p-1$, m_i — показник, якому належить p_i за модулем h).

Доведення. 1) Нехай $G \subset M'_r$ абелева. Тоді з опису множини L'_r випливає, що $G \cong H_{q,r}$ ($r \in \Pi'$). Так як група $C_p = \langle a \rangle$ порядку p не має точних незвідних \mathbb{Z}_p -зображень степеня p , то $G \in p'$ -групою. Тому дві абелеві групи спряжені в групі $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ тоді і тільки, коли вони спряжені в групі $GL(p, \mathbb{Q}_p)$ і тому група G спряжена в $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ групою $H_{p,r}$.

Доведемо 2). За лемою 6 $\det d_i = 1$.

Нехай $G_1 = \langle h, c_0 \rangle$, $G_2 = \langle h, d_0 \rangle$, де c_0 і d_0 — матриці виду (11) і покажемо, що G_1 і G_2 спряжені в групі $GL(p, \mathbb{Z}_p)$.

Нехай $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{p-1}$ — \mathbb{Z}_p -базис p -вимірного \mathbb{Z}_p -модуля V . Тоді

$$h(\nu_0) = \nu_1, \dots, h(\nu_{p-2}) = \nu_{p-1}, \quad h(\nu_{p-1}) = \nu_0.$$

Якщо покласти $c_0 = \text{diag} [\eta^{\lambda_0}, \dots, \eta^{\lambda_{p-1}}] d_0 = \text{diag} [\eta^{\mu_0}, \dots, \eta^{\mu_{p-1}}]$, то в силу (3) можна вважати, що $\mu_j = \lambda_{sj}$, де j, sj суть елементи поля $GF(p)$ і $s \neq 0$. Розглянемо елемент $t \in GL(p, \mathbb{Z}_p)$, такий що $t(\nu_j) = \nu_{js}$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) і $t \in$ мономіальною матрицею і тому $\det t = \pm 1$ і $t \in GL(p, \mathbb{Z}_p)$. Тоді

$$t^{-1} d_0 t(\nu_j) = t^{-1} d_0(\nu_{js}) = t^{-1}(\eta^{\lambda_{js}} \nu_{js}) = \eta^{\mu_j} \nu_j.$$

Таким чином, $t^{-1} d_0 t = c_0$. Легко бачити, що також $t^{-1} h t = h^{s^{-1}}$, звідки $t^{-1} G_1 t = G_2$. Звідси і з лем 1–6 одержуємо необхідне. Теорему доведено.

Нехай тепер $p = 2$. Має місце наступна теорема.

Теорема 5. 1) Нехай $\psi(q)$ — число класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(q, \mathbb{Z}_2)$, n — показник, якому належить 2 за модулем q . Тоді $\psi(q) \geq 2^{s+1} - 1$, де $s = \frac{q-1}{m}$.

2) Якщо 2 є первісним коренем за модулем q , то мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються гру-

нами

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
 W_1 &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
 W_2 &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Доведення теореми не відрізняється від доведень аналогічного результату для групи $GL(q, \mathbb{Z})$ (див. [4, 5]).

Список використаної літератури

1. Юферев В. П. Классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп простой степени // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем. наук. – М.: Наука, 1974. – № 2. – С. 5–10.
2. Гудивок П. М., Кириллюк А. А. О минимальных неприводимых подгруппах полной линейной группы над кольцом P -адических чисел // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2002. – Вип. № 7. – С. 37–43.
3. Кириллюк А. А. О конечных неприводимых p -подгруппах $GL(q, \mathbb{R}_p)$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2003. – Вип. № 8. – С. 63–69.
4. Кириллюк А. А., Рудько В. П. О конечных неприводимых разрешимых подгруппах $GL(p, \mathbb{Z})$ // Докл. АН УССР. Серия А. – К., 1980. – № 8. – С. 16–20.
5. Гудивок П. М., Кириллюк А. А., Рудько В. П., Циткин А. И., О конечных подгруппах группы $GL(n, \mathbb{Z})$ // Кибернетика. – 1982. – № 6. – С. 71–82.

Одержано 03.03.2018