

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Випуск №1 (32)*

Ужгород 2018

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук, доцент.  
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.  
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.  
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Задирака В. К., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.  
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.  
Перестюк М. О., академік НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор.  
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,  
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.  
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.  
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,  
І. А. Мич, упорядкування, 2018

© Ужгородський національний університет,  
2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF  
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 1 (32)*

Uzhhorod 2018

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

## EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).  
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).  
    Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,  
    Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).  
    Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).  
    Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.  
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.  
Published twice a year.  
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

## ЗМІСТ

1. Андрашко Ю. В., Максим В. В. Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів . . . . .	7
2. Білецька Д. Ю., Шапочка І. В. Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня . . . . .	15
3. Болдирева В. О., Жмихова Т. В. Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II. . . . .	29
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку . . . . .	36
5. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про властивості частково впорядкованих множин ММ-типу (1, 3, 5) . . . . .	50
6. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками . . . . .	54
7. Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М. Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних. . . . .	61
8. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь $n$ -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями . . . . .	67
9. Зубарук О. В. Про зображувальний тип напівгрупи $S_{32}^0$ над довільним полем	80
10. Кирилюк О. А. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ . . .	86
11. Кічмаренко О. Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем . . . . .	93
12. Козаченко Ю. В., Василик О. І. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ . . . . .	108
13. Маринець В. В., Питьовка О. Ю. Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною . . . . .	116
14. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри $U_2$ . . . . .	124
15. Сапожнікова К. Ю. Часткове усереднення систем диференціальних рівнянь з максимумом . . . . .	130
16. Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М. Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча . . . . .	136
17. Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О. Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича . . . . .	147

# CONTENTS

1. <i>Andrashko Yu. V., Maksym V. V.</i> Boolean facility location problem with client preferences.....	7
2. <i>Biletska D. Yu., Shapochka I. V.</i> Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree.....	15
3. <i>Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.</i> The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.</i> Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order.....	36
5. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On properties of posets of $MM$ -type $(1, 3, 5)$ .....	50
6. <i>Bryla A. Yu.</i> On lexicographic optimization problem with interval parameters....	54
7. <i>Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.</i> Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\.....	61
8. <i>Drozhzhina A. V.</i> Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations $n$ -th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities.....	67
9. <i>Zubaruk O. V.</i> On representation type of the semigroup $S_{32}^0$ over an arbitrary field	80
10. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$ ...	86
11. <i>Kichmarengo O. D.</i> Step-by-step averaging of functional-differential control systems.....	93
12. <i>Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.</i> Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$ .....	108
13. <i>V. V. Marynets, O. Y. Pytovka</i> Investigation of boundary-value problem for non-linear wave equation with discontinuous right part.....	116
14. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E. V.</i> Perfect disjunctive normal forms of algebra $U_2$ .....	124
15. <i>Sapozhnikova K. Yu.</i> Partial averaging of differential systems with maxima.....	130
16. <i>Slyvka-Tylyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.</i> The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space.....	136
17. <i>Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.</i> On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method.....	147

УДК 519.21

**Ю. В. Козаченко**, (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка; Донецький нац. ун-т ім. В. Стуса),

**О. І. Василик** (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

## РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ВЕЙВЛЕТ-РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З КЛАСІВ $V(\varphi, \psi)$

In the paper, we give conditions for uniform convergence of wavelet expansions of the random processes from the classes  $V(\varphi, \psi)$ , which are more general than the classes of Gaussian and  $\varphi$ -sub-Gaussian processes.

У цій роботі отримано умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів  $V(\varphi, \psi)$ , які узагальнюють класи гауссових та  $\varphi$ -субгауссових процесів.

**1. Вступ.** Простори гауссових, субгауссових та передгауссових випадкових величин є підпросторами певних просторів Орліча випадкових величин. Простори Орліча випадкових величин та випадкові процеси з цих просторів детально вивчаються в книзі [1] та у роботі [6]. Зокрема, у згаданій монографії розглядаються властивості просторів  $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$  (тобто, просторів  $\varphi$ -субгауссових випадкових величин), властивості сум незалежних випадкових величин з цих просторів, випадкові процеси з просторів  $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ , умови обмеженості та оцінки розподілів супремумів таких процесів для випадку, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом. У монографії [9] наведено результати досліджень ще більш загальних класів випадкових процесів, а саме класів  $V(\varphi, \psi)$ . Класи  $\varphi$ -субгауссових та  $V(\varphi, \psi)$  випадкових процесів є дуже цікавими з точки зору практичного застосування у фізиці, теорії масового обслуговування та фінансовій математиці, зокрема, для моделювання реальних випадкових процесів.

Для моделювання випадкових процесів використовуються різноманітні методи та зображення, наприклад, спектральні зображення та розклади в ряди. Цікавими як з теоретичної точки зору, так і з точки зору практичного застосування є задачі дослідження вейвлет-розкладів таких процесів. Основні поняття теорії вейвлетів, багаторівневого аналізу, методи побудови вейвлетів та знаходження швидкості збіжності вейвлет-розкладів, а також приклади застосування теорії вейвлетів до математичної статистики та теорії випадкових процесів зацікавлений читач може знайти у книзі Ю.В. Козаченка “Лекції з вейвлет аналізу” [10]. У роботі [7] отримано умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів  $\varphi$ -субгауссових випадкових процесів.

У даній статті розглядається більш загальний випадок, а саме досліджуються вейвлет-розклади випадкових процесів з класів  $V(\varphi, \psi)$ . У другому розділі наведено необхідні означення та властивості випадкових процесів з класів  $V(\varphi, \psi)$ . Третій розділ містить інформацію та важливі для подальшої роботи результати щодо вейвлетів та вейвлет-розкладів. У четвертому розділі отримано умови рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів  $V(\varphi, \psi)$ .

## **2. Випадкові процеси з класів $V(\varphi, \psi)$ .**

Наведемо деякі означення та відомості про випадкові процеси з класів  $V(\varphi, \psi)$ , необхідні для отримання основних результатів цієї роботи.

**Означення 1.** [1, 9] Неперервна парна опукла функція  $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$  називається  $N$ -функцією Орліча, якщо  $\varphi(0) = 0$  та  $\varphi(x) > 0$ , коли  $x \neq 0$  та мають місце такі умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

*Приклад 1.* Такі функції є  $N$ -функціями:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C|x|^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha > 1; \\ \varphi(x) &= \exp\{|x|\} - |x| - 1; \\ \varphi(x) &= \exp\{a|x|^\alpha\} - 1, \quad a > 0, \quad \alpha > 1; \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{коли } |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{коли } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Умова Q.** Для  $N$ -функції  $\varphi$  виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

*Зауваження 1.* Можливо, що  $c = +\infty$ .

**Означення 2.** [9]  $N$ -функція  $\varphi_1$  підпорядкована  $N$ -функції  $\varphi_2$  ( $\varphi_1 \prec \varphi_2$ ), якщо існують певні сталі  $c > 0$  та  $x_0 > 0$  такі, що для  $x > x_0$  має місце нерівність  $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$ .  $N$ -функції  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  еквівалентні, якщо  $\varphi_1 \prec \varphi_2$  та  $\varphi_2 \prec \varphi_1$ .

Нехай  $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$  — стандартний імовірнісний простір.

**Означення 3.** [1, 9] Нехай  $\varphi$  —  $N$ -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина  $\xi$  належить простору  $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ , якщо  $E\xi = 0$ ,  $E \exp\{\lambda\xi\}$  існує для всіх  $\lambda \in \mathbb{R}$  та існує така стала  $a > 0$ , що для всіх  $\lambda \in \mathbb{R}$  виконується така нерівність

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Простір  $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$  є простором Банаха відносно норми [1]

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf\{a \geq 0: E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(a\lambda)\}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

*Зауваження 2.* Якщо  $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ , тоді простір  $\text{Sub}_\varphi(\Omega) = \text{Sub}(\Omega)$  називається простором субгауссових випадкових величин.

Нехай  $T$  — деякий параметричний простір.

**Означення 4.** [9] Випадковий процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  називається  $\varphi$ -субгауссовим, якщо випадкові величини  $X(t)$ ,  $t \in T$  є  $\varphi$ -субгауссовими ( $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$ ).

Якщо при цьому  $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ , тоді такі процеси називаються субгауссовими.

*Приклад 2.* Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим процесом.

**Означення 5.** [9] Нехай  $\varphi \prec \psi$  — дві  $N$ -функції Орліча. Випадковий процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  належить класу  $V(\varphi, \psi)$ , якщо для всіх  $t \in T$  процес  $X(t)$  належить простору  $\text{Sub}_\psi(\Omega)$  та для всіх  $s, t \in T$  прирости  $X(t) - X(s)$  належать простору  $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ .



*Приклад 3.* Нехай  $\varphi \prec \psi$  — дві  $N$ -функції Орліча. Розглянемо такий випадковий процес:  $X(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$ ,  $t \in T$ , де  $\varphi$  — така  $N$ -функція Орліча, що  $\varphi(\sqrt{x})$  — опукла, випадкова величина  $\xi_0 \in \text{Sub}_{\psi}(\Omega)$ ,  $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\} \in \text{Sub}_{\varphi}(\Omega)$  та  $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_{\varphi}(\xi_k) |f_k(t)| < \infty$ . Тоді випадковий процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  належить класу  $V(\varphi, \psi)$ .

**Означення 6.** [1] Якщо існує скінчене  $\varepsilon$ -покриття множини  $T$ , тоді  $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$  означає кількість елементів в найменшому  $\varepsilon$ -покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченного  $\varepsilon$ -покриття множини  $T$ , то покладемо  $N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty$ . Функцію  $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , будемо називати метричною масивністю множини  $T$  відносно псевдометрики (метрики)  $\rho$  або просто метричною масивністю.

**Означення 7.** [1] Метричною ентропією відносно псевдометрики (метрики)  $\rho$  або просто метричною ентропією називається функція

$$H_{(T,\rho)}(u) := \begin{cases} \ln N_{(T,\rho)}(u), & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) < +\infty, \\ +\infty, & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty, \end{cases}$$

де  $N_{(T,\rho)}(u)$  — метрична масивність множини  $T$ .

*Приклад 4.* Якщо  $T$  — це відрізок  $[a, b]$ , а  $\rho$  — евклідова відстань, тоді

$$\ln \left( \max \left\{ \frac{b-a}{2u}, 1 \right\} \right) \leq H_{(T,\rho)}(u) \leq \ln \left( \frac{b-a}{2u} + 1 \right).$$

**Означення 8.** [9] Нехай  $q$  — така функція, що  $q(t) > 0$  та неперервна при  $t \in T$ . Простір  $C(T, q)$  — це простір неперервних функцій  $f$  на  $T$  таких, що  $\sup_{t \in T} q(t) |f(t)| < \infty$ . Простір  $C_0(\mathbb{R}, q)$  — це простір неперервних функцій  $f$  таких, що  $\sup_{t \in T} q(t) |f(t)| < \infty$  та  $q(t) f(t) \rightarrow 0$  при  $|t| \rightarrow \infty$ .

Нехай  $(T, \rho)$  — сепарабельний псевдометричний простір, який можна розбити на злічену кількість компактних множин, котрі позначимо через  $B_l$ ,  $l = \overline{1, \infty}$ , тобто  $T = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$ .

Розглянемо сепарабельний випадковий процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  з класу  $V(\varphi, \psi)$ ,  $\varphi \prec \psi$ , і припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції  $\sigma_l = \{\sigma_l(h), h > 0\}$ , що  $\sigma_l(h) \rightarrow 0$ , коли  $h \rightarrow 0$ , та для цих функцій мають місце такі нерівності

$$\sup_{\substack{\rho(t,s) \leq h, \\ t,s \in B_l}} \tau_{\varphi}(X(t) - X(s)) \leq \sigma_l(h).$$

Нехай  $q = \{q(t), t \in T\}$  — така неперервна функція, що  $|q(t)| < 1$ .

Введемо такі позначення:  $\delta_l = \sup_{t \in B_l} |q(t)|$ ,  $w_l$  — довільна точка з множини  $B_l$ ,

$$z_l = \tau_{\psi}(X(w_l)), \kappa_l = \sigma_l \left( \sup_{t \in B_l} \rho(t, w_l) \right), l = \overline{1, \infty}, \zeta_{\varphi}(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}.$$

З леми 3.1 з роботи [11] та нерівності Чебишева випливає така теорема.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови*

$$\int_0^{p\kappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad l = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \left( \int_0^{p\kappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du \right) < \infty.$$

Тоді, якщо  $d = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l < \infty$  та  $\beta = \sup_l \frac{\kappa_l}{z_l} < \infty$ , то для всіх  $\varepsilon > 0$  має місце нерівність

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} |q(t)X(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq \inf_{0 < p < 1} \inf_{\lambda > 0} \Gamma(\lambda, p) \exp\{-\lambda\varepsilon\},$$

де

$$\Gamma(\lambda, p) = 2 \exp \left\{ \psi \left( \frac{\lambda d}{1-p} \right) (1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l z_l}{d} \varphi \left( \frac{\lambda d \kappa_l}{z_l (1-p)p} \right) p \right. \\ \left. + \frac{2\lambda}{p(1-p)} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\kappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du \right\}.$$

*Зауваження 3.* Якщо в теоремі 1 вимагати, щоб виконувалася умова вибіркової неперервності процесу  $X$ , то з ймовірністю одиниця його траєкторії будуть належати простору  $C(\mathbf{T}, q)$ .

### 3. Вейвлет-розклади.

Теорія вейвлетів почала бурхливо розвиватися на початку 90-х років ХХ-го сторіччя. Це досить нова, дуже цікава галузь математики. Розклади випадкових процесів по системах вейвлетів використовуються для їх моделювання та збереження траєкторій цих процесів з метою їх подальшого відновлення. Детальну інформацію щодо вейвлетів можна знайти у роботах [2–5, 8, 10].

Нехай  $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$  — це деяка функція з простору  $L_2(\mathbb{R})$ , а  $\hat{\phi}(y) \in$  перетворенням Фур'є функції  $\phi$ , тобто  $\hat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \phi(x) dx$ . Припустимо, що справедливе таке припущення:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(y + 2\pi k) \right|^2 = 1$$

майже всюди.

Нехай існує функція  $m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$  така, що  $m_0(x)$  має період  $2\pi$ ,

$$\hat{\phi}(y) = m_0[y/2] \hat{\phi}[y/2],$$

$\hat{\phi}(0) \neq 0$  і функція  $\hat{\phi}(y)$  неперервна в 0. Тоді функція  $\phi(x)$  називається  $f$ -вейвлетом.

Нехай  $\mu(x) \in$  оберненим перетворенням Фур'є функції

$$\hat{\mu}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Функція  $\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} \hat{\mu}(y) dy$  називається  $m$ -вейвлетом.

Нехай  $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ ;  $\mu_{jk}(x) = 2^{j/2} \mu(2^j x - k)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Відомо, що сім'я функцій  $\{\phi_{0k}, \mu_{jk}, j = 0, 1, 2, k \in \mathbb{Z}\}$  є ортонормованим базисом у  $L_2(\mathbb{R})$  (див., наприклад, [10], [2], [3], [4], [5], [8]). Тоді довільну функцію  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$  можна зобразити у такому вигляді:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \mu_{jk}(x), \quad (1)$$

$$\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0k}(x)} dx; \quad \beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\mu_{jk}(x)} dx.$$

Зображення (1) називається вейвлет-розкладом функції  $f$ . Ряд (1) збігається за нормою простору  $L_2(\mathbb{R})$ , тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{jk}|^2 < \infty.$$

Зауважимо, що інтеграли, які визначають  $\alpha_{0k}$  та  $\beta_{jk}$  можуть існувати для функції з  $L_1(\mathbb{R})$  та інших функцій.

**Означення 9.** [7] Нехай  $\phi$  —  $f$ -вейвлет. Будемо казати, що для  $\phi$  виконується припущення  $S$ , якщо існує спадна функція  $\Phi = \{\Phi(x), x \geq 0\}$ , для якої  $|\phi(x)| \leq \Phi(|x|)$  майже всюди і

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) dx < \infty.$$

В подальшому нам буде потрібна наступна теорема, яка була доведена у роботі [7].

**Теорема 2.** Нехай  $\phi$  —  $f$ -вейвлет, а  $\mu$  —  $m$ -вейвлет, який відповідає  $\phi$ , причому для  $\phi$  і  $\mu$  виконується припущення  $S$  та

$$\int_{\mathbb{R}} c(x) \Phi(|x|) dx < \infty,$$

де  $c = \{c(x), x \in \mathbb{R}\}$  — така парна функція, що  $c(x) > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c(x)$  зростає, коли  $x > 0$ , та для неї існує така функція  $0 < A(a) < \infty$ ,  $a > 0$ , що для досить великих  $x$  виконується умова  $c(ax) \leq c(x) A(a)$ .

Нехай  $f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$  вимірна на  $\mathbb{R}$  функція, причому  $|f(x)| < c(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , і  $f(x)$  неперервна на інтервалі  $(a, b)$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . Позначимо

$$f_m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk} \mu_{jk}(x),$$

де  $\alpha_{0k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0k}(x)} dx$ ,  $\beta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\mu_{jk}(x)} dx$ .

Тоді  $f_m(x) \rightarrow f(x)$ ,  $m \rightarrow \infty$  рівномірно на кожному відрізку  $[\alpha, \beta]$  такому, що  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ .

#### 4. Умови рівномірної збіжності вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ .

Розглянемо сепарабельний випадковий процес  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  з класу  $V(\varphi, \psi)$ ,  $\varphi \prec \psi$ .

Нехай  $B_l = [a_l, a_{l+1}]$ ,  $a_{l+1} - a_l > e$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $w_l$  — довільна точка з множини  $B_l$ .

Припустимо, що для випадкового процесу  $X$  існують неспадні функції  $\sigma_l = \{\sigma_l(h), h > 0\}$ , такі що  $\sigma_l(h) > 0$ ,  $\sigma_l(h) \rightarrow 0$ , коли  $h \rightarrow 0$ , і

$$\sup_{t, s \in B_l: \rho(t, s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma_l(h).$$

Нехай  $c = \{c(t), t \in \mathbb{R}\}$  — неперервна парна функція така, що  $c(t) > 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $c(t)$  зростає, коли  $t > 0$ , та для досить великих  $t$  виконується умова:  $c(at) \leq c(t) \cdot A(a)$ ,  $0 < A(a) < +\infty$ ,  $a > 0$ .

Наступна теорема, яка містить умови вибіркової неперервності сепарабельного випадкового процесу з класу  $V(\varphi, \psi)$ , визначеного на компактній множині буде використана для доведення основної теореми.

**Теорема 3.** [див. [9]] *Нехай  $(T, \rho)$  — метричний сепарабельний простір,  $B$  — компактна множина,  $X = \{X(t), t \in B\}$  — сепарабельний випадковий процес з класу  $V(\varphi, \psi)$ ,  $\varphi \prec \psi$ , для якого існує така неперервна монотонно зростаюча функція  $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ , що  $\sigma(h) \rightarrow 0$ , коли  $h \rightarrow 0$ , та має місце нерівність*

$$\sup_{\rho(t, s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (2)$$

Якщо для сепарабельного випадкового процесу  $X = \{X(t), t \in B\}$  з класу  $V(\varphi, \psi)$ ,  $\varphi \prec \psi$ , виконується умова (2) і для довільного  $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \zeta_\varphi(H_B(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad (3)$$

то  $X$  є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються такі умови:*

$$1) \int_0^{\chi_l} \zeta_\varphi \left( \ln \left( \frac{a_{l+1} - a_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty, \\ de \zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}, \chi_l = \sup_{t \in B_l} \tau_\varphi(X(t) - X(w_l));$$

$$2) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l z_l < \infty, de \delta_l = \sup_{t \in B_l} \frac{1}{c(t)}, z_l = \tau_\psi(X(w_l));$$

$$3) \sup_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\chi_l}{z_l} \leq \beta < \infty;$$

$$4) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l \int_0^{\chi_l} \zeta_\varphi \left( \ln \left( \frac{a_{l+1} - a_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty;$$

5) для відрізка  $[a, b] = I$  існує неспадна функція  $\sigma_I = \{\sigma_I(h), h > 0\}$ , така що  $\sigma_I(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  та

$$\sup_{t,s \in I: \rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma_I(h),$$

$$\int_0^{\chi_I} \zeta_\varphi \left( \ln \left( \frac{b-a}{2\sigma_I^{(-1)}(u)} \right) + 1 \right) du < \infty, \quad (4)$$

$$\text{де } \chi_I = \sup_{a \leq t, s \leq b} \tau_\varphi(X(t) - X(s));$$

6) для  $f$ -вейвлета  $\phi$  та  $m$ -вейвлета  $\mu$ , який відповідає  $\phi$ , виконується припущення  $S$  та

$$\int_{\mathbb{R}} c(x) \Phi(|x|) dx < \infty.$$

Тоді з ймовірністю одиниця існують  $a_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\phi_{0k}(t)} dt$ ,  
 $b_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\mu_{jk}(t)} dt$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $j = \overline{0, +\infty}$ , та  $X_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) +$   
 $\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{jk} \mu_{jk}(x) \rightarrow X(x)$ ,  $m \rightarrow \infty$ , з ймовірністю одиниця рівномірно на  
 кожному відрізку  $[\alpha, \beta]$  такому, що  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .

**Доведення.** З прикладу 4 і умови(4) випливає, що для сепарабельного випадкового процесу  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  та компактної множини  $[a, b] = I$  виконуються умови (2)–(3) теореми 3. Отже, вибіркові траєкторії процесу  $X$  неперервні з ймовірністю одиниця.

З прикладу 4 і умов 1)–4) теореми 4 випливає, що виконуються умови теореми 1. Оскільки ми довели, що випадковий процес  $X$  є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця на відрізку  $[a, b]$ , то, згідно із зауваженням 3, з ймовірністю одиниця він належить простору  $C([a, b], q)$ , де функція  $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$  визначається так:  $q(t) = \frac{1}{c(t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тобто, отримуємо наступне:

$$|X(t)| < \xi \cdot c(t), \quad (5)$$

де  $\xi > 0$  — випадкова величина, для якої  $\mathbf{P}\{\xi < \infty\} = 1$ .

Таким чином, з умов теореми 4 та нерівності (5) випливає, що для випадкової функції  $X$  виконуються умови теореми 2. Отже, з ймовірністю одиниця існують  $a_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\phi_{0k}(t)} dt$  та  $b_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \overline{\mu_{jk}(t)} dt$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $j = \overline{0, +\infty}$ , такі, що  $X_m =$

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{jk} \mu_{jk}(x) \rightarrow X(x)$ ,  $m \rightarrow \infty$ , з ймовірністю одиниця рівномірно на кожному відрізку  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .

### Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. – American Mathematical Society, Providence RI, 2000. – 257 pp.
2. Chui C. K. An Introduction to Wavelets. – New York: Academic Press, 1992. – 264 pp.
3. Daubechies I. Ten lecture on wavelets. – Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1992. – 357 pp.

4. *Härdle W., Kerkycharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelet. Approximation and statistical applications. – New York: Springer, 1998. – 265 pp.
5. *Hernandez E., Weiss G.* A first course on wavelets. – CRC Press Inc. Boca Ratan FL., 1996. – 489 pp.
6. *Kozachenko Yu.* Random processes in Orlicz spaces. I. // Theory Probab. Math. Stat. –1984. – **31**. – P. 103–117.
7. *Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I.* On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of  $\varphi$ -sub-Gaussian Random Process. // Random Operators and Stochastic Equations. – 2006. – **14**, No.3. – P. 209–232.
8. *Walter G., Shen X.* Wavelet and other ortogonal systems. – Chapman and Hall/CRC, London, 2000. – 392 pp.
9. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.*  $\varphi$ -субгауссові випадкові процеси. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.
10. *Козаченко Ю. В.* Лекції з вейвлет аналізу. – К.: ТВіМС, 2004. – 147 с.
11. *Козаченко Ю. В., Василик О. І.* Випадкові процеси з класів  $V(\varphi, \psi)$  // Теор. ймовірност. та матем. статист. – 2000. – **63**. – С. 100–111.

Одержано 03.03.2018