МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

# НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

## МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Випуск №1 (32)*

Ужгород 2018

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету**. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.



Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

# SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 1 (32)*

Uzhhorod 2018

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University**. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

## EDITORIAL



Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: `f-mat@uzhnu.edu.ua`.

# ЗМІСТ

# CONTENTS

УДК 519.21

**Ю. В. Козаченко,** (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка; Донецький нац. ун-т ім. В. Стуса)**,**
**О. І. Василик** (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ВЕЙВЛЕТ-РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З КЛАСІВ $V(\varphi,\psi)$

In the paper, we give conditions for uniform convergence of wavelet expansions of the random processes from the classes $V(\varphi,\psi)$, which are more general than the classes of Gaussian and $\varphi$–sub–Gaussian processes.

У цій роботі отримано умови рівномірної збіжності вейвлет–розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$, які узагальнюють класи гауссових та $\varphi$–субгауссових процесів.

**1. Вступ.** Простори гауссових, субгауссових та передгауссових випадкових величин є підпросторами певних просторів Орліча випадкових величин. Простори Орліча випадкових величин та випадкові процеси з цих просторів детально вивчаються в книзі [1] та у роботі [6]. Зокрема, у згаданій монографії розглядаються властивості просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (тобто, просторів $\varphi$–субгауссових випадкових величин), властивості сум незалежних випадкових величин з цих просторів, випадкові процеси з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, умови обмеженості та оцінки розподілів супремумів таких процесів для випадку, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом. У монографії [9] наведено результати досліджень ще більш загальних класів випадкових процесів, а саме класів $V(\varphi,\psi)$. Класи $\varphi$–субгауссових та $V(\varphi,\psi)$ випадкових процесів є дуже цікавими з точки зору практичного застосування у фізиці, теорії масового обслуговування та фінансовій математиці, зокрема, для моделювання реальних випадкових процесів.

Для моделювання випадкових процесів використовуються різноманітні методи та зображення, наприклад, спектральні зображення та розклади в ряди. Цікавими як з теоретичної точки зору, так і з точки зору практичного застосування є задачі дослідження вейвлет–розкладів таких процесів. Основні поняття теорії вейвлетів, багаторівневого аналізу, методи побудови вейвлетів та знаходження швидкості збіжності вейвлет–розкладів, а також приклади застосування теорії вейлетів до математичної статистики та теорії випадкових процесів зацікавлений читач може знайти у книзі Ю.В. Козаченка “Лекції з вейвлет аналізу” [10]. У роботі [7] отримано умови рівномірної збіжності вейвлет–розкладів $\varphi$–субгауссових випадкових процесів.

У даній статті розглядається більш загальний випадок, а саме досліджуються вейвлет–розклади випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$. У другому розділі наведено необхідні означення та властивості випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$. Третій розділ містить інформацію та важливі для подальшої роботи результати щодо вейвлетів та вейвлет–розкладів. У четвертому розділі отримано умови рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет–розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$.

**2. Випадкові процеси з класів** $V(\varphi,\psi)$**.**

Наведемо деякі означення та відомості про випадкові процеси з класів $V(\varphi,\psi)$, необхідні для отримання основних результатів цієї роботи.

**Означення 1.** [1, 9] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається $N$–функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$ та мають місце такі умови

$$(A_0) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \qquad (A_\infty) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

*Приклад* 1. Такі функції є $N$–функціями:

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = C|x|^\alpha,\ C > 0,\ \alpha > 1;\\
&\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1;\\
&\varphi(x) = \exp\{a|x|^\alpha\} - 1,\ a > 0,\ \alpha > 1;\\
&\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{коли } |x| \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}};\\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{коли } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ 0 < \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

**Умова Q**. Для $N$–функції $\varphi$ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

*Зауваження* 1. Можливо, що $c = +\infty$.

**Означення 2.** [9] $N$–функція $\varphi_1$ підпорядкована $N$–функції $\varphi_2$ ($\varphi_1 \prec \varphi_2$), якщо існують певні сталі $c > 0$ та $x_0 > 0$ такі, що для $x > x_0$ має місце нерівність $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$. $N$–функції $\varphi_1$ та $\varphi_2$ еквівалентні, якщо $\varphi_1 \prec \varphi_2$ та $\varphi_2 \prec \varphi_1$.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ — стандартний імовірнісний простір.

**Означення 3.** [1, 9] Нехай $\varphi$ — $N$–функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми [1]

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf(a \ge 0\colon\ \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(a\lambda)\}, \lambda \in \mathbb{R}).$$

*Зауваження* 2. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, тоді простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega) = \mathrm{Sub}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

Нехай $T$ — деякий параметричний простір.

**Означення 4.** [9] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається $\varphi$–субгауссовим, якщо випадкові величини $X(t)$, $t \in T$ є $\varphi$–субгауссовими ($X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$).

Якщо при цьому $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, тоді такі процеси називаються субгауссовими.

*Приклад* 2. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим процесом.

**Означення 5.** [9] Нехай $\varphi \prec \psi$ — дві $N$–функції Орліча. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ процес $X(t)$ належить простору $\mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$ та для всіх $s, t \in T$ прирости $X(t) - X(s)$ належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

*Приклад* 3. Нехай $\varphi \prec \psi$ — дві $N$–функції Орліча. Розглянемо такий випадковий процес: $X(t) = \xi_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, $t \in T$, де $\varphi$ — така $N$-функція Орліча, що $\varphi(\sqrt{x})$ — опукла, випадкова величина $\xi_0 \in \mathrm{Sub}_{\psi}(\Omega)$, $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\} \in \mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tau_{\varphi}(\xi_k)|f_k(t)| < \infty$. Тоді випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$.

**Означення 6.** [1] Якщо існує скінчене $\varepsilon$–покриття множини $T$, тоді $\mathsf{N}_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ означає кількість елементів в найменшому $\varepsilon$–покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченого $\varepsilon$–покриття множини $T$, то покладемо $\mathsf{N}_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty$. Функцію $\mathsf{N}_{(T,\rho)}(\varepsilon), \varepsilon > 0$, будемо називати метричною масивністю множини $T$ відносно псевдометрики (метрики) $\rho$ або просто метричною масивністю.

**Означення 7.** [1] Метричною ентропією відносно псевдометрики (метрики) $\rho$ або просто метричною ентропією називається функція

$$\mathsf{H}_{(T,\rho)}(u) := \begin{cases} \ln \mathsf{N}_{(T,\rho)}(u), & \text{якщо} \quad \mathsf{N}_{(T,\rho)}(\varepsilon) < +\infty, \\ +\infty, & \text{якщо} \quad \mathsf{N}_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty, \end{cases}$$

де $\mathsf{N}_{(T,\rho)}(u)$ — метрична масивність множини $T$.

*Приклад* 4. Якщо $T$ — це відрізок $[a, b]$, а $\rho$ — евклідова відстань, тоді

$$\ln\left(\max\left\{\frac{b-a}{2u}, 1\right\}\right) \le \mathsf{H}_{(T,\rho)}(u) \le \ln\left(\frac{b-a}{2u} + 1\right).$$

**Означення 8.** [9] Нехай $q$ — така функція, що $q(t) > 0$ та неперервна при $t \in T$. Простір $C(T, q)$ — це простір неперервних функцій $f$ на $T$ таких, що $\sup\limits_{t\in T} q(t)|f(t)| < \infty$. Простір $C_0(\mathbb{R}, q)$ — це простір неперервних функцій $f$ таких, що $\sup\limits_{t\in T} q(t)|f(t)| < \infty$ та $q(t)f(t) \ \to \ 0$ при $|t| \to \infty$.

Нехай $(T, \rho)$ — сепарабельний псевдометричний простір, який можна розбити на злічену кількість компактних множин, котрі позначимо через $B_l$, $l = \overline{1, \infty}$, тобто $T = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l$.

Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ з класу $V(\varphi, \psi)$, $\varphi \prec \psi$, і припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_l = \{\sigma_l(h), h > 0\}$, що $\sigma_l(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та для цих функцій мають місце такі нерівності

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le h, \\ t,s\in B_l}} \tau_{\varphi}(X(t) - X(s)) \le \sigma_l(h).$$

Нехай $q = \{q(t), t \in T\}$ — така неперервна функція, що $|q(t)| < 1$.

Введемо такі позначення: $\delta_l = \sup\limits_{t\in B_l} |q(t)|$, $w_l$ — довільна точка з множини $B_l$, $z_l = \tau_{\psi}(X(w_l))$, $\kappa_l = \sigma_l\left(\sup\limits_{t\in B_l} \rho(t, w_l)\right)$, $l = \overline{1, \infty}$, $\zeta_{\varphi}(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$.

З леми 3.1 з роботи [11] та нерівності Чебишева випливає така теорема.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови*

$$\int_0^{p\kappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du < \infty, \quad l = 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \left( \int_0^{p\kappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)) \right) du < \infty.$$

*Тоді, якщо* $d = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l < \infty$ *та* $\beta = \sup\limits_l \frac{\kappa_l}{z_l} < \infty$, *то для всіх* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in T} |q(t)X(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq \inf_{0<p<1} \inf_{\lambda>0} \Gamma(\lambda, p) \exp\{-\lambda\varepsilon\},$$

*де*

$$\Gamma(\lambda, p) = 2\exp\left\{ \psi\left( \frac{\lambda d}{1-p} \right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l z_l}{d} \varphi\left( \frac{\lambda d \kappa_l}{z_l(1-p)p} \right) p \right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda}{p(1-p)} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\kappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du \right\}.$$

*Зауваження* 3. Якщо в теоремі 1 вимагати, щоб виконувалася умова вибіркової неперервності процесу $X$, то з ймовірністю одиниця його траєкторії будуть належати простору $C(\mathbf{T}, q)$.

**3. Вейвлет–розклади.**

Теорія вейвлетів почала бурхливо розвиватися на початку 90-х років XX-го сторіччя. Це досить нова, дуже цікава галузь математики. Розклади випадкових процесів по системах вейвлетів використовуються для їх моделювання та збереження траєкторій цих процесів з метою їх подальшого відновлення. Детальну інформацію щодо вейвлетів можна знайти у роботах [2–5, 8, 10].

Нехай $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — це деяка функція з простору $L_2(\mathbb{R})$, а $\hat{\phi}(y)$ є перетворенням Фур'є функції $\phi$, тобто $\hat{\phi}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iyx}\phi(x)\,\mathrm{d}x$. Припустимо, що справедливе таке припущення:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(y + 2\pi k) \right|^2 = 1$$

майже всюди.

Нехай існує функція $m_0(x) \in L_2([0, 2\pi])$ така, що $m_0(x)$ має період $2\pi$,

$$\hat{\phi}(y) = m_0[y/2]\,\hat{\phi}[y/2],$$

$\hat{\phi}(0) \neq 0$ і функція $\hat{\phi}(y)$ неперервна в 0. Тоді функція $\phi(x)$ називається $f$–вейвлетом.

Нехай $\mu(x)$ є оберненим перетворенням Фур'є функції

$$\hat{\mu}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2} + \pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Функція $\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iyx} \hat{\mu}(y)\, \mathrm{d}y$ називається $m$–вейвлетом.

Нехай $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$; $\mu_{jk}(x) = 2^{j/2}\mu(2^j x - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Відомо, що сім'я функцій $\{\phi_{0k},\ \mu_{jk},\ j = 0, 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ є ортонормованим базисом у $L_2(\mathbb{R})$ (див., наприклад, [10], [2], [3], [4], [5], [8]). Тоді довільну функцію $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ можна зобразити у такому вигляді:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk}\mu_{jk}(x), \tag{1}$$

$$\alpha_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\phi_{0k}(x)} \mathrm{d}x; \quad \beta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\mu_{jk}(x)} \mathrm{d}x.$$

Зображення (1) називається вейвлет–розкладом функції $f$. Ряд (1) збігається за нормою простору $L_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{jk}|^2 < \infty.$$

Зауважимо, що інтеграли, які визначають $\alpha_{0k}$ та $\beta_{jk}$ можуть існувати для функції з $L_1(\mathbb{R})$ та інших функцій.

**Означення 9.** [7] Нехай $\phi$ — $f$–вейвлет. Будемо казати, що для $\phi$ виконується припущення $S$, якщо існує спадна функція $\Phi = \{\Phi(x), x \geq 0\}$, для якої $|\phi(x)| \leq \Phi(|x|)$ майже всюди і

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(|x|)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

В подальшому нам буде потрібна наступна теорема, яка була доведена у роботі [7].

**Теорема 2.** *Нехай $\phi$ — $f$–вейвлет, а $\mu$ — $m$–вейвлет, який відповідає $\phi$, причому для $\phi$ і $\mu$ виконується припущення $S$ та*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} c(x)\, \Phi(|x|)\, dx < \infty,$$

*де $c = \{c(x), x \in \mathbb{R}\}$ — така парна функція, що $c(x) > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $c(x)$ зростає, коли $x > 0$, та для неї існує така функція $0 < A(a) < \infty$, $a > 0$, що для досить великих $x$ виконується умова $c(ax) \leq c(x)\, A(a)$.*

*Нехай $f = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ вимірна на $\mathbb{R}$ функція, причому $|f(x)| < c(x)$, $x \in \mathbb{R}$, і $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Позначимо*

$$f_m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{jk}\mu_{jk}(x),$$

*де $\alpha_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\phi_{0k}(x)}\, dx$, $\beta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\mu_{jk}(x)}\, dx$.*

*Тоді $f_m(x) \to f(x)$, $m \to \infty$ рівномірно на кожному відрізку $[\alpha,\ \beta]$ такому, що $[\alpha,\ \beta] \subset (a,\ b)$.*

**4. Умови рівномірної збіжності вейвлет–розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$.**

Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ з класу $V(\varphi,\psi)$, $\varphi \prec \psi$.

Нехай $B_l = [a_l,\, a_{l+1}]$, $a_{l+1} - a_l > e$, $l \in \mathbb{Z}$, $w_l$ — довільна точка з множини $B_l$.

Припустимо, що для випадкового процесу $X$ існують неспадні функції $\sigma_l = \{\sigma_l(h), h > 0\}$, такі що $\sigma_l(h) > 0$, $\sigma_l(h) \to 0$, коли $h \to 0$, і

$$\sup_{t,\, s \in B_l:\, \rho(t,\, s) \le h} \tau_\varphi \left(X(t) - X(s)\right) \le \sigma_l(h).$$

Нехай $c = \{c(t), t \in \mathbb{R}\}$ — неперервна парна функція така, що $c(t) > 1$, $t \in \mathbb{R}$, $c(t)$ зростає, коли $t > 0$, та для досить великих $t$ виконується умова: $c(at) \le c(t) \cdot A(a)$, $0 < A(a) < +\infty$, $a > 0$.

Наступна теорема, яка містить умови вибіркової неперервності сепарабельного випадкового процесу з класу $V(\varphi,\psi)$, визначеного на компактній множині буде використана для доведення основної теореми.

**Теорема 3.** *[див. [9]] Нехай $(T,\rho)$ — метричний сепарабельний простір, $B$ — компактна множина, $B \subset T$, $X = \{X(t), t \in B\}$ — сепарабельний випадковий процес з класу $V(\varphi,\psi)$, $\varphi \prec \psi$, для якого існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та має місце нерівність*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h). \tag{2}$$

*Якщо для сепарабельного випадкового процесу $X = \{X(t), t \in B\}$ з класу $V(\varphi,\psi)$, $\varphi \prec \psi$, виконується умова (2) і для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \zeta_\varphi(H_B(\sigma^{(-1)}(u)))\, du < \infty, \tag{3}$$

*то $X$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця.*

**Теорема 4.** *Нехай виконуються такі умови:*

*1)* $\int\limits_0^{\chi_l} \zeta_\varphi \left( \ln \left( \frac{a_{l+1}-a_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty,$
*де* $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$, $\chi_l = \sup\limits_{t \in B_l} \tau_\varphi(X(t) - X(w_l))$;

*2)* $\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l z_l < \infty$, *де* $\delta_l = \sup\limits_{t \in B_l} \frac{1}{c(t)}$, $z_l = \tau_\psi(X(w_l))$;

*3)* $\sup\limits_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\chi_l}{z_l} \le \beta < \infty$;

*4)* $\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l \int\limits_0^{\chi_l} \zeta_\varphi \left( \ln \left( \frac{a_{l+1}-a_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} \right) + 1 \right) du < \infty$;

5) *для відрізка* $[a,b] = I$ *існує неспадна функція* $\sigma_I = \{\sigma_I(h),\, h > 0\}$, *така що* $\sigma_I(h) \to 0$ *при* $h \to 0$ *та*

$$\sup_{t,s\in I:\, \rho(t,s)\le h} \tau_\varphi\left(X(t) - X(s)\right) \le \sigma_I(h),$$

$$\int_0^{\chi_I} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma_I^{(-1)}(u)}\right) + 1\right) du < \infty, \tag{4}$$

*де* $\chi_I = \sup_{a\le t,s\le b} \tau_\varphi\left(X(t) - X(s)\right)$;

6) *для* $f$*–вейвлета* $\phi$ *та* $m$*–вейвлета* $\mu$, *який відповідає* $\phi$, *виконується припущення* $S$ *та*

$$\int_{\mathbb{R}} c(x)\,\Phi(|x|)\,dx < \infty.$$

*Тоді з ймовірністю одиниця існують* $a_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}\,dt$, $b_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\mu_{jk}(t)}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{0,+\infty}$, *та* $X_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{jk}\mu_{jk}(x)(x) \to X(x)$, $m \to \infty$, *з ймовірністю одиниця рівномірно на кожному відрізку* $[\alpha,\, \beta]$ *такому, що* $[\alpha,\, \beta] \subset [a,\, b]$.

***Доведення.*** З прикладу 4 і умови(4) випливає, що для сепарабельного випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ та компактної множини $[a,b] = I$ виконуються умови (2)–(3) теореми 3. Отже, вибіркові траєкторії процесу $X$ неперервні з ймовірністю одиниця.

З прикладу 4 і умов 1)—4) теореми 4 випливає, що виконуються умови теореми 1. Оскільки ми довели, що випадковий процес $X$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця на відрізку $[a,b]$, то, згідно із зауваженням 3, з ймовірністю одиниця він належить простору $C([a,b],q)$, де функція $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ визначається так: $q(t) = \frac{1}{c(t)}$, $t \in \mathbb{R}$. Тобто, отримуємо наступне:

$$|X(t)| < \xi \cdot c(t), \tag{5}$$

де $\xi > 0$ — випадкова величина, для якої $\mathbf{P}\{\xi < \infty\} = 1$.

Таким чином, з умов теореми 4 та нерівності (5) випливає, що для випадкової функції $X$ виконуються умови теореми 2. Отже, з ймовірністю одиниця існують $a_{0k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}\,\mathrm{d}t$ та $b_{jk} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\mu_{jk}(t)}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{0,+\infty}$, такі, що $X_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{jk}\mu_{jk}(x)(x) \to X(x)$, $m \to \infty$, з ймовірністю одиниця рівномірно на кожному відрізку $[\alpha,\, \beta] \subset [a,\, b]$.

## Список використаної літератури


1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – American Mathematical Society, Providence RI, 2000. – 257 pp.
2. *Chui C. K.* An Introduction to Wavelets. – New York: Academic Press, 1992. – 264 pp.
3. *Daubechies I.* Ten lecture on wavelets. – Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1992. – 357 pp.

4. *Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelet. Approximation and statistical applications. – New York: Springer,, 1998. – 265 pp.
5. *Hernandez E., Weiss G.* A first course on wavelets. – CRC Press Inc. Boca Ratan FL., 1996. – 489 pp.
6. *Kozachenko Yu.* Random processes in Orlicz spaces. I. // Theory Probab. Math. Stat. –1984. – **31.** – P. 103–117.
7. *Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I.* On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of $\varphi$-sub-Gaussian Random Process. // Random Operators and Stochastic Equations. – 2006. – **14**, No.3. – P. 209–232.
8. *Walter G., Shen X.* Wavelet and other ortogonal systems. – Chapman and Hall/CRC, London, 2000. – 392 pp.
9. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* $\varphi$-субгауссові випадкові процеси. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.
10. *Козаченко Ю. В.* Лекції з вейвлет аналізу. – К.: ТВіМС, 2004. – 147 с.
11. *Козаченко Ю. В., Василик О. І.* Випадкові процеси з класів $V(\varphi, \psi)$ // Теор. ймовірност. та матем. статист. – 2000. – **63.** – С. 100–111.


Одержано 03.03.2018