МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (32)

Ужгород 2018

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: `f-mat@uzhnu.edu.ua`.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (32)

Uzhhorod 2018

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty "UzhNU", Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

1. *Андрашко Ю. В., Максим В. В.* Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів . . . 7
2. *Білецька Д. Ю., Шапочка І. В.* Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня . . . 15
3. *Болдирєва В. О., Жмихова Т. В.* Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II. . . . 29
4. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку . . . 36
5. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про властивості частково впорядкованих множин MM-типу $(1,3,5)$ . . . 50
6. *Брила А. Ю.* Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками . . . 54
7. *Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М.* Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних. . . . 61
8. *Дрожжина А. В.* Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями . . . 67
9. *Зубарук О. В.* Про зображувальний тип напівгрупи S_{32}^0 над довільним полем 80
10. *Кирилюк О. А.* Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q,\mathbb{Z}_p)$ . . . 86
11. *Кічмаренко О. Д.* Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем . . . 93
12. *Козаченко Ю. В., Василик О. І.* Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$ . . . 108
13. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю.* Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівнння з розривною правою частиною . . . 116
14. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри U_2 . . . 124
15. *Сапожнікова К. Ю.* Часткове усереднення систем дифференціальних рівнянь з максимумом . . . 130
16. *Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М.* Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча . . . 136
17. *Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О.* Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича . . . 147

CONTENTS

1. *Andrashko Yu. V., Maksym V. V.* Boolean facility location problem with client preferences 7
2. *Biletska D. Yu., Shapochka I. V.* Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree 15
3. *Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.* The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II. 29
4. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order 36
5. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On properties of posets of MM-type $(1, 3, 5)$ 50
6. *Bryla A.Yu.* On lexicographic optimization problem with interval parameters 54
7. *Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.* Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\ 61
8. *Drozhzhina A. V.* Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations n-th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities 67
9. *Zubaruk O. V.* On representation type of the semigroup S_{32}^0 over an arbitrary field 80
10. *Kyryl'uk O. A.* Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$ ... 86
11. *Kichmarenko O. D.* Step-by-step averaging of functional-differential control systems 93
12. *Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.* Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$ 108
13. *V. V. Marynets, O. Y. Pytovka* Investigation of boundary–value problem for non–linear wave equation with discontinuous right part 116
14. *Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E.V.* Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2 124
15. *Sapozhnikova K. Yu.* Partial averaging of differential systems with maxima 130
16. *Slyvka-Tylyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.* The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space 136
17. *Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.* On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method 147

УДК 517.946

В. В. Маринець (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»),
О. Ю. Питьовка (Мукачівський держ. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

We established the sufficient conditions of existence and uniqueness of regular or irregular solution of boundary–value problem for non–linear wave equation with discontinuous right part in domain with complicated structure.

Встановлюються достатні умови існування та єдиності регулярного або іррегулярного розв'язку крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною в області зі складною структурою краю.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених в статтях [1, 2].

Розглянемо в $\mathbb{R}^2$ область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де

$$D_1 = \{(x, y)|x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}\,,\ x_0 < x_1 < x_2,$$

$$D_2 = \{(x, y)|x \in [x_0, x_1], y \in (y_1, g_1(x))\}\,,\ y_0 < y_1 < y_2,$$
$$D_3 = \{(x, y)|x \in (x_1, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\}\,,$$

а $y = g_r(x) \Leftrightarrow x = k_r(y)$, $r = 1,\ 2$ — "вільні" криві, причому $g_r'(x) > 0$, $g_1(x_{r-1}) = y_r$, $g_2(x_r) = y_{r-1}$.

Позначимо через $D^* := D\ \backslash E_1 \cup E_2$, $E_1 = \{(x, y)|\ x \in [x_0, x_1],\ y = y_1\}$, $E_2 = \{(x, y)|\ y \in [y_0, y_1],\ x = x_1\}$

Дослідимо задачу: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D^*) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок рівняння

$$\begin{gathered} L_{(1.1)}u(x, y) = f(x, y, u(x, y)) := f[u(x, y)], \\ L_{(1.1)}u(x, y) := u_{xy}(x, y) + a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y), \end{gathered} \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$u(x_0, y) = \psi(y), y \in [y_0, y_1],\ \ u(x, y_0) = \varphi(x), x \in [x_0, x_1], \tag{2}$$

$$u(x, g_1(x)) = \omega_1(x), x \in [x_0, x_1], \tag{3}$$

$$u(x, g_2(x)) = \omega_2(x), x \in [x_1, x_2], \tag{4}$$

$$\psi(y_0) = \varphi(x_0),\ \psi(y_1) = \omega_1(x_0),\ \varphi(x_1) = \omega_2(x_1), \tag{5}$$

а права частина рівняння (1) $f[u(x, y)] = f_s[u_s(x, y)]$, $(x, y) \in \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, де $f_s[u_s(x, y)] \in C(\overline{B}_s)$, $f_s : \overline{B}_s \to \mathbb{R}$, $\overline{B}_s \subset \mathbb{R}^3$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_s = \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, причому

$$u_2(x, y_1) = u_1(x, y_1),\ x \in [x_0, x_1], \tag{6}$$

$$u_3(x_1, y) = u_1(x_1, y), \ y \in [y_0, y_1]. \tag{7}$$

Зауважимо, що умови (5) є умовами узгодженості крайових умов (2)—(4), а (6), (7) — умови неперервності розв'язку задачі (1)—(5), якщо він існує. Права частина рівняння (1) $f[u(x, y)]$ всюди неперервна функція в області $\overline{B}$, $\overline{B} := \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup \overline{B}_3$, за виключенням характеристик рівняння (1) $y = y_1$, $x = x_1$, вздовж яких вона може мати скінчені розриви. Очевидно, якщо існує розв'язок задачі (1)—(7) $u(x, y)$, то $u(x, y) = u_s(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, де $u_1(x, y)$ є розв'язком задачі Гурса (1), (2), (5) при $(x, y) \in \overline{D}_1$, $u_2(x, y)$ — задачі Дарбу (1), (3), (5), (6), $(x, y) \in \overline{D}_2$, а $u_3(x, y)$ — задачі Дарбу (1), (4), (5), (7), при $(x, y) \in \overline{D}_3$.

Надалі вважатимемо, що $a_1(x, y) \in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x, y) \in C^{(0.1)}(D)$, $\psi(y) \in C^1[y_0, y_1]$, $\varphi(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\omega_r(x, y) \in C^1[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2$, причому

$$a_{1x}(x, y) = a_{2y}(x, y). \tag{8}$$

Справедлива наступна

Лема 1. *Якщо $f_s[u_s(x, y)] \in C(\overline{B}_s)$ і виконується умова (8), то крайова задача (1)—(7) еквівалентна системі інтегральних рівнянь вигляду*

$$u_s(x, y) = \gamma_s(x, y) + \epsilon_s T_{1,s} F_1[u_1(\xi, \eta)] + T_s F_s[u_s(\xi, \eta)], \ (x, y) \in \overline{D}_s, \ s = 1, 2, 3, \tag{9}$$

де $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, а

$$F_s[u_s(x, y)] := f_s[u_s(x, y)] + [a_{2y}(x, y) + a_1(x, y)a_2(x, y)]\, u_s(x, y),$$

$$T_1 F_1[u_1(\xi, \eta)] := \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} K(x, y; \xi, \eta) F_1[u_1(\xi, \eta)] d\eta d\xi, (x, y) \in \overline{D}_1,$$

$$\gamma_1(x, y) := \psi(y) \exp\left(\int_{x}^{x_0} a_2(\xi, y) d\xi\right) + \int_{x_0}^{x} K(x, y; \xi, y_0) \left[\varphi'(\xi) + a_2(\xi, y_0)\varphi(\xi)\right] d\xi,$$

$$T_2 F_2[u_2(\xi, \eta)] := \int_{k_1(y)}^{x} \int_{y_1}^{y} K(x, y; \xi, \eta) F_2[u_2(\xi, \eta)] d\eta d\xi, (x, y) \in \overline{D}_2,$$

$$\gamma_2(x, y) := \omega_1(k_1(y)) \exp\left(\int_{x}^{k_1(y)} a_2(\xi, y) d\xi\right) +$$
$$+ \int_{k_1(y)}^{x} K(x, y; \xi, y_0) \left[\varphi'(\xi) + a_2(\xi, y_0)\varphi(\xi)\right] d\xi,$$

$$T_{1,2} F_1[u_1(\xi, \eta)] := \int_{k_1(y)}^{x} \int_{y_0}^{y_1} K(x, y; \xi, \eta) F[u_1(\xi, \eta)] d\eta d\xi,$$

$$T_3 F_3[u_3(\xi, \eta)] := \int_{g_2(x)}^{y} \int_{x_1}^{x} K(x, y; \xi, \eta) F_3[u_3(\xi, \eta)] d\xi d\eta, (x, y) \in \overline{D}_3,$$

$$\gamma_3(x,y) := \omega_2(x)\exp\left(\int\limits_y^{g_2(x)} a_1(x,\eta)d\eta\right) +$$
$$+ \int\limits_{g_2(x)}^{y} K(x,y;x_0,\eta)\left[\psi'(\eta)+a_1(x_0,\eta)\psi(\eta)\right]d\eta,$$

$$T_{1,3}F_1[u_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x_1} K(x,y;\xi,\eta)F_1[u_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$K(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int\limits_y^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau + \int\limits_x^{\xi} a_2(\zeta,y)d\zeta\right).$$

Із умов (6), (7) випливає, що

$$u_{2x}(x,y_1) = u_{1x}(x,y_1),\ x\in[x_0,x_1] \text{ і } u_{3y}(x_1,y) = u_{1y}(x_1,y),\ y\in[y_0,y_1], \text{ а}$$

$$\begin{aligned} u_{2y}(x,y_1) - u_{1y}(x,y_1) &= [\rho_1+\delta_1(x)]\exp\left(\int\limits_x^{x_0} a_2(\xi,y_1)d\xi\right), x\in[x_0,x_1],\\ u_{3x}(x_1,y) - u_{1x}(x_1,y) &= [\rho_2+\delta_2(y)]\exp\left(\int\limits_y^{y_0} a_1(x_1,\eta)d\eta\right), y\in[y_0,y_1], \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\rho_2 := \omega_2'(x_1) - \varphi'(x_1) + g_2'(x_1)\Bigg\{a_1(x_1,y_0)\omega_2(x_1) - [\psi'(y_0)+a_1(x_0,y_0)\psi(y_0)]\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{x_1}^{x_0} a_2(\xi,y_0)d\xi\right) - \int\limits_{x_0}^{x_1} F_1(\xi,y_0,\varphi(\xi))\exp\left(\int\limits_{x_1}^{\xi} a_2(\tau,y_0)d\tau\right)d\xi\Bigg\},$$

$$\rho_1 := -\psi'(y_1) + k_1'(y_1)\Bigg\{\omega_1'(x_0) + a_2(x_0,y_1)\omega_1(x_0) - [\varphi'(x_0)+a_2(x_0,y_0)\varphi(x_0)]\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_1(x_0,\eta)d\eta\right) - \int\limits_{y_0}^{y_1} F_1(x_0,\eta,\psi(\eta))\exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(x_0,\tau)d\tau\right)d\eta\Bigg\},$$

$$\delta_1(x) := \int\limits_{x_0}^{x}\exp\left(\int\limits_{x_0}^{\xi} a_2(\tau,y_1)d\tau\right)\left[f_2[u_2(\xi,y_1)] - f_1[u_1(\xi,y_1)]\right]d\xi,\ x\in[x_0,x_1],$$

$$\delta_2(y) := \int\limits_{y_0}^{y}\left[f_3[u_3(x_1,\eta)] - f_1[u_1(x_1,\eta)]\right]\exp\left(\int\limits_{y_0}^{\eta} a_1(x_1,\tau)d\tau\right)d\eta,\ y\in[y_0,y_1].$$

Із умов (10) випливає справедливість

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 і крайова задача (1)—(7) має розв'язок $u(x,y)$. Тоді він належатиме просторові $C^{(1.1)}(D)\cap C(\overline{D})$ (буде регулярним), якщо $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$ і $\rho_1=\rho_2=0$.*

У супротивному випадку виконуються рівності (10) і розв'язок задачі (1)—(7) буде іррегулярним.

Встановимо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)—(7). З цією метою введемо в розгляд простір функцій $C_1(\overline{B}_s)$.

Означення 1. *Будемо говорити, що* $F_s[u_s(x,y)] \in C_1(\overline{B}_s)$, *якщо функція* $F_s[u_s(x,y)]$ *задовольняє наступні умови [3]:*

1) $F_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$,

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_{s,1})$, $\overline{B}_{s,1} \subset \mathbb{R}^4$, $Пp_{xOy}\overline{B}_{s,1} = \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, *існує така функція* $H_s(x,y,u_s(x,y);v_s(x,y)) := H_s[u_s(x,y);v_s(x,y)]$, *що*

   (a) $H_s[u_s(x,y);u_s(x,y)] \equiv F_s[u_s(x,y)]$,

   (b) для довільної пари неперервних функцій $u_s(x,y)$, $v_s(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$, *які задовольняють умову* $u_s(x,y) \geq v_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, *в області* $\overline{B}_{s,1}$ *виконується нерівність*

$$H_s[u_s(x,y);v_s(x,y)] \geq H_s[v_s(x,y);u_s(x,y)], \tag{11}$$

3) функція $H_s[u_s(x,y);v_s(x,y)]$ *в області* $\overline{B}_{s,1}$ *задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для довільних двох пар неперервних в* $\overline{D}_s$ *функцій* $u_{s,r}(x,y)$, $v_{s,r}(x,y)$, $r = 1,2$, *виконується умова*

$$|H_s[u_{s,1}(x,y);u_{s,2}(x,y)] - H_s[v_{s,1}(x,y);v_{s,2}(x,y)]| \leq L_s(|w_{s,1}(x,y)| + |w_{s,2}(x,y)|),$$

де $w_{s,r}(x,y) := u_{s,r}(x,y) - v_{s,r}(x,y)$, $r = 1,2$, *де* L_s *— стала Ліпшиця,* $s = 1,2,3$.

Зауважимо, що якщо функція $F_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$ і має обмежену частинну похідну першого порядку по $u_s(x,y)$, то вона завжди належить просторові $C_1(\overline{B}_s)$, $s = 1,2,3$. Зворотнє твердження не справедливе.

Нехай $z_{s,p}(x,y)$, $v_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$ належать області $\overline{B}_{s,1}$ для всіх $s = 1,2,3$ та $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$w_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - v_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\begin{gathered}
f_s^p(x,y) := H_s[z_{s,p}(x,y);v_{s,p}(x,y)],\\
f_{s,p}(x,y) := H_s[v_{s,p}(x,y);z_{s,p+1}(x,y)],\\
f_{s,p}^*(x,y) := H_s[v_{s,p}(x,y);z_{s,p}(x,y)],\\
\alpha_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - \gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta),\\
\beta_{s,p}(x,y) := v_{s,p}(x,y) - \gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_{1,p}^*(\xi,\eta) - T_s f_{s,p}^*(\xi,\eta),\\
z_{s,p}^*(x,y) := z_{s,p}(x,y) - q_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y),\\
v_{s,p}^*(x,y) := v_{s,p}(x,y) + c_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y),\\
(x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,
\end{gathered} \tag{12}$$

$$F_s^p(x,y) := H[z_{s,p}^*(x,y);v_{s,p}^*(x,y)],\ F_{s,p}(x,y) := H[v_{s,p}^*(x,y);z_{s,p+1}(x,y)],$$

$$R_s^p(x,y) := \gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F_1^p(\xi,\eta) + T_s F_s^p(\xi,\eta),$$

$$\begin{gathered}R_{s,p}(x,y) := \gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F_{1,p}(\xi,\eta) + T_s F_{s,p}(\xi,\eta),\\ \alpha^*_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - R^p_s(x,y),\\ \beta^*_{s,p}(x,y) := v_{s,p}(x,y) - R_{s,p}(x,y),\end{gathered} \tag{13}$$

де $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)$ є довільними з простору $C(\overline{D}_s)$ невід'ємними функціями, які задовольняють умови

$$0 \le q_{s,p}(x,y) \le 0,5,\ 0 \le c_{s,p}(x,y) \le 0,5 \tag{14}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ та $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$ згідно формул [4, 5]

$$\begin{gathered}z_{s,p+1}(x,y) = R^p_s(x,y),\ v_{s,p+1}(x,y) = R_{s,p}(x,y),\\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\end{gathered} \tag{15}$$

де за нульове наближення $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$ вибираємо довільні з простору $C(\overline{D}_s)$ функції, які при $(x,y) \in \overline{D}_s$ задовольняють умови

$$w_{s,0}(x,y) \ge 0,\ \alpha_{s,0}(x,y) \ge 0,\ \beta_{s,0}(x,y) \le 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s. \tag{16}$$

Означення 2. *Функції $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, які належать області $\overline{B}_{s,1}$ і задовольняють умови (16), називаються функціями порівняння крайової задачі (1)—(7).*

Зауважимо, що в силу умови $F_s[u_s(x,y)] \in C(\overline{B}_s)$ функції порівняння задачі (1)—(7) взагалі кажучи існують (див. [6]).

Відмітимо, що в силу (14), (16) якщо $v_{s,0}(x,y)$, $z_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$, то і $v^*_{s,0}(x,y)$, $z^*_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_{s,1}$, а із виконання умов (16) випливає, що $\alpha^*_{s,0}(x,y) \ge 0$, $\beta^*_{s,0}(x,y) \le 0$.

Із (12), (13) та (15) маємо

$$Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) = \alpha^*_{s,p}(x,y),\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) = \beta^*_{s,p}(x,y), \tag{17}$$

$$w_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F^p_1(\xi,\eta) - F_{1,p}(\xi,\eta)) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)), \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F^p_1(\xi,\eta) - f^{p+1}_1(\xi,\eta)) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - f^{p+1}_s(\xi,\eta)),\\ \beta_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F_{1,p}(\xi,\eta) - f^*_{1,p+1}(\xi,\eta)) + T_s(F_{s,p}(\xi,\eta) - f^*_{s,p+1}(\xi,\eta)),\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\alpha^*_{s,p+1}(x,y) - \alpha_{s,p+1}(x,y) =\\ = \epsilon_s T_{1,s}(f^{p+1}_1(\xi,\eta) - F^{p+1}_1(\xi,\eta)) + T_s(f^{p+1}_s(\xi,\eta) - F^{p+1}_s(\xi,\eta)),\\ \beta^*_{s,p+1}(x,y) - \beta_{s,p+1}(x,y) =\\ = \epsilon_s T_{1,s}(f^*_{1,p+1}(\xi,\eta) - F_{1,p+1}(\xi,\eta)) + T_s(f^*_{s,p+1}(\xi,\eta) - F_{s,p+1}(\xi,\eta)),\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}v_{s,p}(x,y) - z_{s,p+1}(x,y) = \beta_{s,p}(x,y) +\\ + \epsilon_s T_{1,s}(f^*_{1,p}(\xi,\eta) - F^p_1(\xi,\eta)) + T_s(f^*_{s,p}(\xi,\eta) - F^p_s(\xi,\eta)),\\ z_{s,p}(x,y) - v_{s,p+1}(x,y) = \alpha_{s,p}(x,y) +\\ + \epsilon_s T_{1,s}(f^p_1(\xi,\eta) - F_{1,p}(\xi,\eta)) + T_s(f^p_s(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)),\\ p \in \mathbb{N}_0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3.\end{gathered} \tag{21}$$

Приймаючи до уваги умови (11), (14) та (16), із (17)—(21) методом математичної індукції переконуємося, що якщо на кожному кроці ітерації (15) функції $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувались нерівності

$$\begin{gathered} z_{s,p}(x,y) - z_{s,p+1}(x,y) - q_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y) \geq 0, \\ v_{s,p}(x,y) - v_{s,p+1}(x,y) + c_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y) \leq 0, \\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3. \end{gathered} \tag{22}$$

то послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (15), (22), задовольнятимуть в області $\overline{B}_{s,1}$ умови

$$\begin{gathered} v_{s,p}(x,y) \leq v_{s,p+1}(x,y) \leq z_{s,p+1}(x,y) \leq Z_{s,p}(x,y), \\ \alpha_{s,p}(x,y) \geq 0,\ \beta_{s,p}(x,y) \leq 0 \end{gathered} \tag{23}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ та $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Лема 3. *Нехай $F_s[u_s(x,y)] \in C_1(\overline{B}_s)$ і в області $\overline{B}_{s,1}$ існують функції порівняння задачі (1)—(7) $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.*

Тоді якщо виконуються умови леми 1, то множина функцій $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y)$, які задовольняють умови (14), (22) непорожня.

Доведення. Дійсно, покладемо на кожному кроці ітерації (15), (16)

$$q_{s,p}(x,y) = \begin{cases} \alpha_{s,p}(x,y)\rho_{s,p}^{-1}(x,y), & \text{при } w_{s,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{при } w_{s,p}(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$c_{s,p}(x,y) = \begin{cases} -\beta_{s,p}(x,y)\rho_{s,p}^{-1}(x,y), & \text{при } w_{s,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{при } w_{s,p}(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$\rho_{s,p}(x,y) := \alpha_{s,p}(x,y) - \beta_{s,p}(x,y) + w_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ p \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, що вибрані таким чином функції $q_{s,p}(x,y)$ та $c_{s,p}(x,y)$ в силу (23) задовольняють умови (14), а приймаючи до уваги (17) маємо

$$z_{s,p}(x,y) - z_{s,p+1}(x,y) - q_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y) = \alpha_{s,p}^*(x,y) -$$

$$-\alpha_{s,p}(x,y)\rho_{s,p}^{-1}(x,y)w_{s,p}(x,y) \geq \alpha_{s,p}^*(x,y)\left(1 - \tfrac{w_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}\right) \geq 0,$$

$$v_{s,p}(x,y) - v_{s,p+1}(x,y) + c_{s,p}(x,y)w_{s,p}(x,y) \leq \beta_{s,p}^*(x,y)\left(1 - \tfrac{w_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}\right) \leq 0,$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}_0,$$

і лема 3 доведена.

Таким чином нами доведена наступна

Теорема 1. *Нехай функції $F_s[\,u_s(x,y)\,] \in C_1(\,\overline{B}_s\,)$, $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(\overline{D})$ і виконується умова (8), а в області $\overline{B}_{s,1}$ існують функції порівняння крайової задачі (1) — (7) $z_{s,0}(x,y)$, $v_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$.*

Тоді для функцій $z_{s,p}(x,y)$, $v_{s,p}(x,y)$, побудованих згідно формул (15), (16), де $q_{s,p}(x,y)$, $c_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$ задовольняють в області $\overline{B}_{s,1}$ умови (14), (22), справедливі нерівності (23) для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ та $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Ввівши позначення

$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} w_{s,0}(x,y) = d, \ \max_{s,p} \sup_{\overline{D}_s} (1 - q_{s,p}(x,y) - c_{s,p}(x,y)) \le q,$$
$$\max_s L_s = l, \ \max\left\{1, \sup_{\overline{D}} (y - y_0 + x - x_0)\right\} = \gamma,$$
$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} K(x,y;\xi,\eta) \le 0,5K, \ s = 1,2,3,$$

та повторюючи міркування, приведені в роботі [1], переконуємось у справедливості наступної теореми

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ *та* $\{v_{s,p}(x,y)\}$*, побудовані згідно закону (14), (15), (16), (22):*

1) *збігаються рівномірно до единого неперервного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (12) при* $(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,$

2) *мають місце оцінки*

$$w_{s,p}(x,y) \le \frac{1}{p!} \left[lKq\gamma(x - x_0 + y - y_0)\right]^p d, \ (x,y) \in \overline{D}_s, \ s = 1,2,3,$$

3) *в області* $\overline{B}_{s,1}$ *мають місце нерівності*

$$v_{s,p}(x,y) \le v_{s,p+1}(x,y) \le u_s(x,y) \le z_{s,p+1}(x,y) \le z_{s,p}(x,y)$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, *де* $u_s(x,y)$ *— единий розв'язок системи інтегральних рівнянь (9),*

4) *збіжність ітераційного методу (14), (15), (16), (22) не повільніша збіжності методу (15), коли* $q_{s,p}(x,y) = c_{s,p}(x,y) \equiv 0$ *і* $F_{s,p}(x,y) \equiv f_{s,p}(x,y)$.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 2.*

Тоді в просторі функцій $C^*(\overline{D})$ *існує единий іррегулярний розв'язок задачі (1)–(7).*

Якщо ж права частина рівняння (1) $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$ *і виконуються умови* $\rho_k = 0$, $k = 1,2$, *то розв'язок крайової задачі (1)–(7) буде регулярним (належатиме просторові* $C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$*).*

Наслідок 2. *Нехай* $\psi(y) = \varphi(x) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}_1$, $\omega_r(x) = 0$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1,2$ *і* $F_s[u_s(x,y)] \in C_1(\overline{B}_s)$, *причому* $F_s[u_s(x,y)] \equiv H_s[u_s(x,y);0]$.

Тоді якщо $F_s[0] \le (\ge) 0$ *в* $\overline{B}_s$, *то розв'язок крайової задачі (1)–(7) при* $(x,y) \in \overline{D}$ *задовольняє нерівності*

$$u(x,y) \le (\ge) 0, \ (x,y) \in \overline{D}.$$

Список використаної літератури

1. *Marynets V. V. and Marynets K. V.* On Goursat–Darboux boundary–value problem for systems of non–linear differential equations of hyperbolic type // Miskolc Mathematical Notes. — 2013. — V.14, No.3. — P. 1009–1020.

2. *Marynets V. V., Marynets K. V., Pytovka O.Yu.* On one constructive method of the boundary–value problem investigation for the differential equations of the hyperbolic type// Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2015. — Вип.2(27). — С. 76—85.
3. *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про один підхід дослідження крайових задач для нелінійних рівнянь гіперболічного типу в області із складною структурою краю // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матем. науки: Збірник наукових праць ІК ім.В.М.Глушкова НАНУ. — 2017. Випуск 15. — С. 113—119.
4. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.:Наука, 1969. — 456 с.
5. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения.— Киев: Наук.думка, 1980. — 268 с.
6. *Маринець В. В.* Про один конструктивний метод дослідження крайової задачі Дарбу–Гурса // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2016. — Вип.2(29). — С. 72—80.

Одержано 11.02.2018