

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Випуск №1 (32)*

Ужгород 2018

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

## РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.

Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук, доцент.

Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.

Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.

Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.

Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.

Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.

Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.

Задирака В. К., академік НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор.

Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.

Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Перестюк М. О., академік НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор.

Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,

Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,

Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.

Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.

Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченю радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець — Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,  
І. А. Мич, упорядкування, 2018

© Ужгородський національний університет,  
2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHGOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF  
UZHGOROD UNIVERSITY**

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 1 (32)*

Uzhhorod 2018

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

## EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).

Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).

Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).

Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,

Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,

Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Slyvka-Tlyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6  
dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska  
str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail:  
[f-mat@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mat@uzhnu.edu.ua).

## ЗМІСТ

1. <i>Андрашко Ю. В., Максим В. В.</i> Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів . . . . .	7
2. <i>Білецька Д. Ю., Шапочка І. В.</i> Тензорні добутки нерозкладних ціличислових матричних зображень симетричної групи третього степеня . . . . .	15
3. <i>Болдирєва В. О., Жмихова Т. В.</i> Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II. . . . .	29
4. <i>Бондаренко В. М., Заціха Я. В.</i> Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку . . . . .	36
5. <i>Бондаренко В. М., Стьопочкина М. В.</i> Про властивості частково впорядкованих множин $MM$ -типу (1, 3, 5) . . . . .	50
6. <i>Брила А. Ю.</i> Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками . . . . .	54
7. <i>Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М.</i> Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних. . . . .	61
8. <i>Дрожжесина А. В.</i> Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь $n$ -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями . . . . .	67
9. <i>Зубарук О. В.</i> Про зображення типу напівгрупи $S_{32}^0$ над довільним полем	80
10. <i>Кирилюк О. А.</i> Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ . . .	86
11. <i>Кічмаренко О. Д.</i> Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем . . . . .	93
12. <i>Козаченко Ю. В., Василік О. І.</i> Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ . . . . .	108
13. <i>Маринець В. В., Питьовка О. Ю.</i> Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною . . . . .	116
14. <i>Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.</i> Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри $U_2$ . . . . .	124
15. <i>Сапожникова К. Ю.</i> Часткове усереднення систем дифференціальних рівнянь з максимумом . . . . .	130
16. <i>Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М.</i> Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння тепlopровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча . . . . .	136
17. <i>Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О.</i> Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича . . . . .	147

## CONTENTS

1. <i>Andrashko Yu. V., Maksym V. V.</i> Boolean facility location problem with client preferences.....	7
2. <i>Biletska D. Yu., Shapochka I. V.</i> Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree .....	15
3. <i>Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.</i> The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.</i> Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order .....	36
5. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On properties of posets of <i>MM</i> -type (1, 3, 5) .....	50
6. <i>Bryla A. Yu.</i> On lexicographic optimization problem with interval parameters ....	54
7. <i>Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.</i> Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\ .....	61
8. <i>Drozhzhina A. V.</i> Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations n-th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities .....	67
9. <i>Zubaruk O. V.</i> On representation type of the semigroup $S_{32}^0$ over an arbitrary field	80
10. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$ ...	86
11. <i>Kichmarenko O. D.</i> Step-by-step averaging of functional-differential control systems.....	93
12. <i>Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.</i> Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$ .....	108
13. <i>V. V. Marynets, O. Y. Pytovka</i> Investigation of boundary-value problem for nonlinear wave equation with discontinuous right part .....	116
14. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E. V.</i> Perfect disjunctive normal forms of algebra $U_2$ .....	124
15. <i>Sapozhnikova K. Yu.</i> Partial averaging of differential systems with maxima .....	130
16. <i>Slyvka-Tulyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.</i> The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space .....	136
17. <i>Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.</i> On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method .....	147

УДК 510

**I. A. Мич, В. В. Ніколенко, О. В. Варцава** (ДВНЗ «Ужгородський нац.  
ун-т»)

## ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ АЛГЕБРИ $U_2$

The complete identities system of algebra  $U_2$  have been constructed in the paper. On the basis of the complete identities system an algorithm for constructing the perfect disjunctive normal form is developed.

У роботі побудована повна система тотожностей алгебри  $U_2$  на основі якої розроблений алгоритм побудови досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

У роботах [1, 2] розглядаються класи алгебр  $P = \{U_n = (A_{n \times n}, \Omega), n \in N\}$ , де  $A_{n \times n}$  — множина всіх бінарних квадратних матриць порядку  $n \geq 1$ ,  $\Omega = \{\vee, \wedge, T_i, i = 0, 1, \dots, 7\}$ ,  $x \vee y = \max(x, y)$ ,  $x \wedge y = \min(x, y)$ ,  $T_i, i \in Z_8$  — множина унарних операцій, які у даній роботі задають перестановку елементів матриці, що еквівалентна поворотам зображення кратним  $90^\circ$  відносно осей або центра симетрії квадрата. Показано, що довільні формули  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  і  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  алгебри  $U_n$  можна привести до диз'юнктивних нормальних форм  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m$  та  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_l$ . У цих роботах наведено алгоритм побудови досконалих диз'юнктивних нормальних форм формул алгебр  $U_k$ ,  $k \geq 3$ , а також показано, що в цих алгебрах ДНФ формул співпадає з ДДНФ.

В алгебрі  $U_2$  ці формули не є досконалими диз'юнктивними нормальними формами. Метою даної роботи є побудова алгоритму знаходження досконалої диз'юнктивної нормальної форми формул алгебри  $U_2$ .

**Означення 1.** Зображення  $A_c^1$  ( $A_c^0$ ), в якому всі піксели дорівнюють одиниці (нулеві), називаються константою одиниці (константою нуля).

Для констант  $A_c^1$  і  $A_c^0$  та довільного бінарного зображення  $x$  виконуються тотожності:

$$\begin{aligned} A_c^1 \vee A_c^0 &= A_c^1; A_c^1 \wedge A_c^0 = A_c^0; A_c^1 \vee x = A_c^1; \\ A_c^0 \vee x &= x; A_c^1 \wedge x = x; A_c^0 \wedge x = A_c^0. \end{aligned}$$

**Означення 2.** Формула  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  алгебри  $U_2$  зберігає константу одиниці (константу нуля), якщо  $\varphi(A_c^1, A_c^1, \dots, A_c^1) = A_c^1$  ( $\varphi(A_c^0, A_c^0, \dots, A_c^0) = A_c^0$ ).

З означень операцій алгебри  $U_n$  випливає, що всі формули цієї алгебри зберігають константу одиниці (константу нуля), а отже має місце твердження.

**Твердження 1.** В алгебрах  $U_n$  не існує формул, які задають константу одиниці або константу нуля.

**Означення 3.** Формула  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  алгебри  $U_n$ ,  $n \geq 1$ , називається квазінулем, якщо

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} A_c^1, & \text{якщо } x_1 = x_2 = \dots = x_n = A_c^1, \\ A_c^0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

**Означення 4.** Формула  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  алгебри  $U_n$ ,  $n \geq 1$ , називається квазіодиницею, якщо

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} A_c^0, & \text{якщо } x_1 = x_2 = \dots = x_n = A_c^0, \\ A_c^1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

**Твердження 2.** Якщо  $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — квазіодиниця,  $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — квазінуль, то для довільної формулі  $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$  алгебри  $U_n$  такої, що  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  мають місце тодіжності:

$$\varphi \vee \varphi_1 = \varphi_1; \varphi \wedge \varphi_1 = \varphi; \varphi \vee \varphi_2 = \varphi; \varphi \wedge \varphi_2 = \varphi_2.$$

Твердження 2 випливає з означень квазіодиниці і квазінуля та операцій алгебри  $P$ .

**Означення 5.** Формула  $\varphi_1$  називається локальною одиницею (локальним нулем) для формулі  $\varphi_2$ , якщо  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_2$  ( $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \varphi_1$ ).

Значення формулі  $\varphi(x) = x^{T_i}$ ,  $i \in Z_8$ , на всіх можливих зображеннях  $A_j^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , алгебри  $U_2$  ( $k$  вказує число одиниць зображення  $A_j$ , а  $j$  — порядковий номер зображення для цього числа  $k$  одиниць) представимо у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

$A_j^k$	$A_1^3$	$A_2^3$	$A_3^3$	$A_4^3$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_4^1$
$x^{T_i}$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$	
$x^{T_0}$	$A_1^3$	$A_2^3$	$A_3^3$	$A_4^3$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_4^1$
$x^{T_1}$	$A_1^3$	$A_4^3$	$A_3^3$	$A_2^3$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_1^1$	$A_4^1$	$A_3^1$	$A_2^1$
$x^{T_2}$	$A_4^3$	$A_1^3$	$A_2^3$	$A_3^3$	$A_4^2$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_4^1$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$
$x^{T_3}$	$A_2^3$	$A_3^3$	$A_4^3$	$A_1^3$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_1^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_4^1$	$A_1^1$
$x^{T_4}$	$A_3^3$	$A_2^3$	$A_1^3$	$A_4^3$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_3^1$	$A_2^1$	$A_1^1$	$A_4^1$
$x^{T_5}$	$A_2^3$	$A_1^3$	$A_3^3$	$A_4^3$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_4^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_2^1$	$A_1^1$	$A_4^1$	$A_3^1$
$x^{T_6}$	$A_4^3$	$A_3^3$	$A_2^3$	$A_1^3$	$A_1^2$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_4^1$	$A_3^1$	$A_2^1$	$A_1^1$
$x^{T_7}$	$A_3^3$	$A_4^3$	$A_1^3$	$A_2^3$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_3^1$	$A_4^1$	$A_1^1$

За допомогою таблиці 1 можна переконатись, що формула  $q_1(x) = x^{T_0}x^{T_1} \vee x^{T_0}x^{T_4} \vee x^{T_1}x^{T_7} \vee x^{T_2}x^{T_5} \vee x^{T_2}x^{T_6} \vee x^{T_3}x^{T_5} \vee x^{T_3}x^{T_6} \vee x^{T_4}x^{T_7}$  є квазіодиницею для формул алгебри  $U_2$ .

Для кожної змінної  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  формули  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можливий один з двох випадків:

- 1) змінна  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , не входить у елементарну кон'юнкцію  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;
- 2) змінна  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  може входити у елементарну кон'юнкцію від одного до восьми разів у вигляді множників  $x_j^{T_i}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \in Z_8$ .

Домноживши довільну елементарну кон'юнкцію  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , в яку змінна  $x$  входить не більше одного разу, на  $q_1(x)$ , отримаємо елементарні кон'юнкції, в яких змінна  $x$  зустрічається не менше двох разів. Тобто, після виконання операції домноження на квазіодиницю, в елементарних кон'юнкціях

кількість множників однієї змінної буде не менше двох. Використовуючи таблицю 1 побудуємо таблицю 2 обчислення значень виразу  $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}}$ ,  $i_1, i_2 \in Z_8$ . Зауважимо, що таких кон'юнкцій для  $i_1 \neq i_2$  є двадцять вісім, врахувавши, що  $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}} = x^{T_{i_2}}x^{T_{i_1}}$ .

Таблиця 2

$A_j^k$	$A_1^3$	$A_2^3$	$A_3^3$	$A_4^3$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_4^1$
$x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}}$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$
$x^{T_0}x^{T_1}$	$A_1^3$	$A_5^2$	$A_3^3$	$A_5^2$	$A_1^1$	$A_1^1$	$A_3^1$	$A_3^1$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_1^1$	$A_c^0$	$A_3^1$	$A_c^0$
$x^{T_0}x^{T_4}$	$A_6^2$	$A_2^3$	$A_6^2$	$A_4^3$	$A_4^1$	$A_2^1$	$A_2^1$	$A_4^1$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_c^0$	$A_2^1$	$A_c^0$	$A_4^1$
$x^{T_1}x^{T_7}$	$A_6^2$	$A_4^3$	$A_6^2$	$A_2^3$	$A_2^1$	$A_4^1$	$A_4^1$	$A_2^1$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_c^0$	$A_4^1$	$A_c^0$	$A_2^1$
$x^{T_2}x^{T_5}$	$A_5^2$	$A_1^3$	$A_5^2$	$A_3^3$	$A_3^1$	$A_1^1$	$A_1^1$	$A_3^1$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_c^0$	$A_1^1$	$A_c^0$	$A_3^1$
$x^{T_2}x^{T_6}$	$A_4^3$	$A_6^2$	$A_2^3$	$A_6^2$	$A_4^1$	$A_4^1$	$A_2^1$	$A_2^1$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_4^1$	$A_c^0$	$A_2^1$	$A_c^0$
$x^{T_3}x^{T_5}$	$A_2^3$	$A_6^2$	$A_4^2$	$A_6^2$	$A_2^1$	$A_2^1$	$A_4^1$	$A_4^1$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_2^1$	$A_c^0$	$A_4^1$	$A_c^0$
$x^{T_3}x^{T_6}$	$A_5^2$	$A_3^3$	$A_5^2$	$A_1^3$	$A_1^1$	$A_3^1$	$A_3^1$	$A_1^1$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_c^0$	$A_3^1$	$A_c^0$	$A_1^1$
$x^{T_4}x^{T_7}$	$A_3^3$	$A_5^2$	$A_1^3$	$A_5^2$	$A_3^1$	$A_3^1$	$A_1^1$	$A_1^1$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_3^1$	$A_c^0$	$A_1^1$	$A_c^0$
$x^{T_0}x^{T_7}$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_c^0$									
$x^{T_1}x^{T_4}$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_c^0$									
$x^{T_2}x^{T_3}$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_c^0$									
$x^{T_5}x^{T_6}$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_c^0$									
$x^{T_0}x^{T_5}$	$A_2^2$	$A_2^2$	$A_4^2$	$A_4^2$	$A_c^0$									
$x^{T_0}x^{T_6}$	$A_1^2$	$A_3^2$	$A_3^2$	$A_1^2$	$A_1^2$	$A_c^0$								
$x^{T_1}x^{T_2}$	$A_1^2$	$A_1^2$	$A_3^2$	$A_3^2$	$A_c^0$									
$x^{T_1}x^{T_3}$	$A_2^2$	$A_4^2$	$A_4^2$	$A_2^2$	$A_c^0$									
$x^{T_2}x^{T_4}$	$A_4^2$	$A_2^2$	$A_2^2$	$A_4^2$	$A_c^0$									
$x^{T_3}x^{T_4}$	$A_3^2$	$A_3^2$	$A_1^2$	$A_1^2$	$A_c^0$									
$x^{T_5}x^{T_7}$	$A_3^2$	$A_1^2$	$A_1^2$	$A_3^2$	$A_c^0$									
$x^{T_6}x^{T_7}$	$A_4^2$	$A_4^2$	$A_2^2$	$A_2^2$	$A_c^0$									
$x^{T_0}x^{T_2}$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_4^1$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_0}x^{T_3}$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_4^2$	$A_1^2$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_4^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_1}x^{T_5}$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_2^1$	$A_1^1$	$A_4^1$	$A_3^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_1}x^{T_6}$	$A_1^2$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_1^1$	$A_4^1$	$A_3^1$	$A_2^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_2}x^{T_7}$	$A_4^2$	$A_1^2$	$A_2^2$	$A_3^2$	$A_3^1$	$A_4^1$	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_2}x^{T_3}$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_5^2$	$A_6^2$	$A_c^0$									
$x^{T_4}x^{T_5}$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_4^2$	$A_3^1$	$A_2^1$	$A_1^1$	$A_4^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_4}x^{T_6}$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_4^1$	$A_3^1$	$A_2^1$	$A_1^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$
$x^{T_4}x^{T_6}$	$A_4^2$	$A_3^2$	$A_2^2$	$A_1^2$	$A_4^1$	$A_3^1$	$A_2^1$	$A_1^1$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$	$A_c^0$

**Твердження 3.** Тільки елементарні кон'юнкції

$$r_1^2(x) = x^{T_0}x^{T_1}; r_2^2(x) = x^{T_0}x^{T_4}; r_3^2(x) = x^{T_1}x^{T_7}; r_4^2(x) = x^{T_2}x^{T_5};$$

$$r_5^2(x) = x^{T_2}x^{T_6}; r_6^2(x) = x^{T_3}x^{T_5}; r_7^2(x) = x^{T_3}x^{T_6}; r_8^2(x) = x^{T_4}x^{T_7}$$

формули  $q_1(x)$ , на наборах зображення  $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$  можуть приймати значення відмінне від  $A_c^0$ .

Твердження 3 випливає безпосередньо з таблиці 2. В алгоритмі побудови досконалих диз'юнктивних нормальних форм елементарні кон'юнкції  $r_i^2(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , не змінюються.

З таблиці 2 отримаємо, що формули  $q_1^2(x) = x^{T_0}x^{T_7} \vee x^{T_2}x^{T_3}$ ,  $q_2^2(x) = x^{T_1}x^{T_4} \vee x^{T_5}x^{T_6}$  є локальними одиницями для елементарних кон'юнкцій  $x^{T_0}x^{T_7}$ ,  $x^{T_2}x^{T_3}$ ,  $x^{T_1}x^{T_4}$ ,  $x^{T_5}x^{T_6}$ . Домноживши елементарні кон'юнкції  $x^{T_0}x^{T_7}$ ,  $x^{T_2}x^{T_3}$  на  $q_2^2(x)$ , а елементарні кон'юнкції  $x^{T_1}x^{T_4}$ ,  $x^{T_5}x^{T_6}$  на  $q_1^2(x)$ , отримаємо диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, кожна з яких має чотири множники.

**Твердження 4.** Тільки елементарні кон'юнкції з чотирма множниками  $r_1^4(x) = x^{T_0}x^{T_1}x^{T_4}x^{T_7}$  і  $r_2^4(x) = x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}$  на зображеннях  $A_5^2$  і  $A_6^2$  можуть приймати значення, які відмінні від  $A_c^0$ . Інші елементарні кон'юнкції з чотирма і більше множниками на цих зображеннях приймають значення  $A_c^0$ .

Доведення цього твердження випливає з таблиці 2.

Елементарні кон'юнкції з трьома множниками  $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}}x^{T_{i_3}}$ ,  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , на наборах  $A_5^2$  і  $A_6^2$  можуть приймати значення відмінні від  $A_c^0$  тільки тоді, коли  $\{T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3}\} \subset \{T_0, T_1, T_4, T_7\}$  або  $\{T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3}\} \subset \{T_2, T_3, T_5, T_6\}$ .

Для цих елементарних кон'юнкцій формули  $q_1^2(x)$  і  $q_2^2(x)$  є локальними одиницями і домноживши першу групу на  $q_2^2(x)$ , а другу на  $q_1^2(x)$ , отримаємо елементарні кон'юнкції, які мають не менше чотирьох множників.

З тверджень 3 і 4 випливає

**Твердження 5.** *Формула*

$$\begin{aligned} q_1^4(x) &= x^{T_0}x^{T_6}x^{T_1}x^{T_3} \vee x^{T_0}x^{T_6}x^{T_2}x^{T_3} \vee x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7} \vee x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7} \vee \\ &\vee x^{T_0}x^{T_5}x^{T_1}x^{T_2} \vee x^{T_0}x^{T_5}x^{T_3}x^{T_4} \vee x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_7} \vee x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7} \end{aligned}$$

є локальною одиницею для всіх елементарних кон'юнкцій, крім  $r_i^2(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  та  $r_1^4(x)$  і  $r_2^4(x)$ .

Домноживши всі елементарні кон'юнкції на їх локальну одиницю отримаємо елементарні кон'юнкції, що містять не менше чотирьох множників.

**Твердження 6.** Тільки елементарні кон'юнкції

$$\begin{aligned} r_3^4(x) &= x^{T_0}x^{T_6}x^{T_1}x^{T_3}; r_4^4(x) = x^{T_0}x^{T_6}x^{T_2}x^{T_4}; r_5^4(x) = x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7}; \\ r_6^4(x) &= x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}; r_7^4(x) = x^{T_0}x^{T_5}x^{T_1}x^{T_2}; r_8^4(x) = x^{T_0}x^{T_5}x^{T_3}x^{T_4}; \\ r_9^4(x) &= x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_6}; r_{10}^4(x) = x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7} \end{aligned}$$

при підстановці зображень  $A_1^2$ ,  $A_2^2$ ,  $A_3^2$ ,  $A_4^2$  можуть приймати значення відмінні від  $A_c^0$ . Решта елементарних кон'юнкцій від чотирьох і більше змінних на цих зображеннях приймають значення  $A_c^0$ .

Далі при побудові досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгоритм не змінює елементарні кон'юнкції  $r_i^2(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ,  $r_i^4(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

**Твердження 7.** *Формула*

$$\begin{aligned} q_1^4(x) &= x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_6}x^{T_7} \vee \\ &\vee x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6} \vee \end{aligned}$$

$$\vee x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$$

є локальною одиницею для всіх елементарних кон'юнкцій, крім  $r_i^2(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ,  $r_j^4(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 10$ .

Домноживши елементарні кон'юнкції на їх локальну одиницю, отримаємо елементарні кон'юнкції, які містять не менше шести змінних.

**Твердження 8.** Тільки елементарні кон'юнкції, які входять в  $q_1^4(x)$ , на наборах  $A_1^3$ ,  $A_2^3$ ,  $A_3^3$ ,  $A_4^3$  можуть приймати значення відмінні від  $A_c^0$ . Всі інші елементарні кон'юнкції на цих наборах зображені приймають значення  $A_c^0$ .

У результаті виконання алгоритму, описаного вище, отримаємо диз'юнктивну нормальну форму, в якій елементарні кон'юнкції, що складаються з множників  $r_i^2(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ,  $r_i^4(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  та восьми множників, які є доданками в формулі  $q_1^4(x)$ .

Всі ці елементарні кон'юнкції зведені в таблицю 3. Перший стовпчик таблиці показує, яке зображення підставляється в елементарну кон'юнкцію, а перший рядок вказує значення, яке може приймати відповідна елементарна кон'юнкція.

Таблиця 3

	$A_1^1$	$A_2^1$	$A_3^1$	$A_4^1$
$A_1^3$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$
$A_2^3$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$
$A_3^3$	$x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$
$A_4^3$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}$
$A_1^2$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}$
$A_2^2$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}$	$x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_7}$
$A_3^2$	$x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7}$
$A_4^2$	$x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}$
$A_1^1$	$x^{T_0}x^{T_1}$	$x^{T_3}x^{T_5}$	$x^{T_4}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_6}$
$A_2^1$	$x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_4}$	$x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_7}$
$A_3^1$	$x^{T_4}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}$	$x^{T_3}x^{T_5}$
$A_4^1$	$x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_4}$

**Означення 6.** Елементарні кон'юнкції в таблиці 3, які належать одному стовпчику називають однотипними.

**Твердження 9.** Елементарна кон'юнкція в отриманій диз'юнктивній нормальній формі не дорівнює  $A_c^0$ , якщо її множники є однотипними.

**Твердження 10.** Якщо в елементарній кон'юнкції всі множники однотипні, то для неї існує єдиний набір зображень, на якому вона приймає значення відмінні від  $A_c^0$ .

Всі елементарні кон'юнкції, які складаються з неоднотипних множників можна опустити так, як вони є квазінулями.

**Теорема 1.** Диз'юнктивна нормальна форма всі елементарні кон'юнкції якої є однотипними є досконалою диз'юнктивною нормальнюю формою.

**Доведення.** Нехай  $f_1 = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m$ ,  $f_2 = q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_l$  диз'юнктивна нормальна форма формул  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ . Використовуючи алгоритм, приведений вище формули  $f_1$  і  $f_2$  можна привести до виду  $\hat{f}_1 = \hat{p}_1 \vee \hat{p}_2 \vee \dots \vee \hat{p}_{\hat{m}}$ ,  $\hat{f}_2 = \hat{q}_1 \vee \hat{q}_2 \vee \dots \vee \hat{q}_{\hat{l}}$ , де  $\hat{p}_i$  і  $\hat{q}_j$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, \hat{m}\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, \hat{l}\}$  елементарні кон'юнкції, в яких всі множники є однотипними елементарними кон'юнкціями. Покажемо, що  $\hat{f}_1$  і  $\hat{f}_2$  досконалі диз'юнктивні нормальні форми формул  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ . Нехай  $\hat{p}_i = r(x_{i_1})r(x_{i_2})\dots r(x_{i_t})$  однотипна елементарна кон'юнкція. Тоді всі елементарні кон'юнкції  $r(x_{i_\alpha})$ ,  $\alpha = 1, \dots, t$  належать одному стовпчику таблиці 3, наприклад, третьому. Тоді відповідні значення першого стовпчика вказують на такі зображення  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$ , що  $r(A_{i_1})r(A_{i_2})\dots r(A_{i_t}) = A_2^1$ , на всіх інших наборах  $\hat{p}_i$  буде приймати значення  $A_c^0$ . На наборі зображень  $\gamma_1 : x_{i_1} = A_{i_1}, x_{i_2} = A_{i_2}, \dots, x_{i_t} = A_{i_t}, x_{i_\beta} = A_c^0$ , якщо  $x_{i_\beta} \notin p_i$ , формула  $\hat{f}_1$  приймає значення  $A_2^1$ . Формула  $f_2$  на наборі зображень  $\gamma_1$  прийме значення  $A_1^0$  тільки тоді, коли існує  $q_j$  таке, що  $q_j \subset p_i$ . Задаючи відповідний для  $q_j$  набір  $\gamma_2$  на якому  $\hat{f}_2(\gamma_2) = A_2^1$  тільки тоді коли існує  $p_\xi$ ,  $\xi \in \{1, 2, \dots, \hat{m}\}$ , що  $p_\xi \subset q_j$ , а тому  $p_\xi \subset p_i$  що неможливо, оскільки в досконалій диз'юнктивній нормальній формі ні одна елементарна кон'юнкція не може бути підформулою іншої. Таким чином, якщо  $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$  то  $\forall p_i, i \in \{1, 2, \dots, m\} \exists q_j, j \in \{1, 2, \dots, l\}$  така, що  $p_i \subset q_j$ . Теорема доведена.

### Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. Мич І. А., Ніколенко В. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. 2 (31). – С. 123–128.

Одержано 10.03.2018