

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (32)

Ужгород 2018

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – випуск №1 (32). – 160 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук, доцент.
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Задирака В. К., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 6 від 21.06.2018 р.

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,
І. А. Мич, упорядкування, 2018

© Ужгородський національний університет,
2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (32)

Uzhhorod 2018

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2018. – Issue no 1 (32). – 160 p.

EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 6 dated by June 21, 2018.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

1. Андрашко Ю. В., Максим В. В. Булева задача розміщення із урахуванням переваг клієнтів	7
2. Білецька Д. Ю., Шапочка І. В. Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня	15
3. Болдирева В. О., Жмихова Т. В. Ймовірність небанкрутства страхової компанії з витратами на рекламу та інвестиціями у банківський депозит за Каско страхуванням топ-10 страхових компаній України. II.	29
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку	36
5. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про властивості частково впорядкованих множин ММ-типу (1, 3, 5)	50
6. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками	54
7. Глебена М. І., Глебена В. Ф., Попельський О. М. Визначення оптимальних параметрів моделей доступу до інформації у файлах баз даних.	61
8. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями	67
9. Зубарук О. В. Про зображувальний тип напівгрупи S_{32}^0 над довільним полем	80
10. Кирилюк О. А. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$. . .	86
11. Кічмаренко О. Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-дифференціальних систем	93
12. Козаченко Ю. В., Василик О. І. Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$	108
13. Маринець В. В., Питъовка О. Ю. Дослідження крайової задачі для нелінійного хвильового рівняння з розривною правою частиною	116
14. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри U_2	124
15. Сапожнікова К. Ю. Часткове усереднення систем диференціальних рівнянь з максимумом	130
16. Сливка-Тилищак Г. І., Михасюк М. М. Властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною з простору Орліча	136
17. Чуйко С. М., Чуйко О. С., Чечетенко В. О. Про розв'язання нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач методом Ньютона-Канторовича	147

CONTENTS

1. <i>Andrashko Yu. V., Maksym V. V.</i> Boolean facility location problem with client preferences.....	7
2. <i>Biletska D. Yu., Shapochka I. V.</i> Tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of third degree.....	15
3. <i>Boldyreva V. O., Zhmykhova T. V.</i> The probability of non-ruin of an insurance company with advertising expenses and investing in bank term deposit by MHull insurance of 10 Top insurance companies of Ukraine. II.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.</i> Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order.....	36
5. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On properties of posets of MM -type $(1, 3, 5)$	50
6. <i>Bryla A. Yu.</i> On lexicographic optimization problem with interval parameters....	54
7. <i>Hlebena M. I., Hlebena V. F., Popelskyi O. M.</i> Finding the optimum parameters of models of access to information in database files. \\.....	61
8. <i>Drozzhina A. V.</i> Asymptotic of solutions of the nonlinear differential equations n -th order asymptotically close to the equations with regularly varying nonlinearities.....	67
9. <i>Zubaruk O. V.</i> On representation type of the semigroup S_{32}^0 over an arbitrary field	80
10. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q, \mathbf{Z}_p)$...	86
11. <i>Kichmarengo O. D.</i> Step-by-step averaging of functional-differential control systems.....	93
12. <i>Kozachenko Yu. V., Vasylyk O. I.</i> Uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the classes $V(\varphi, \psi)$	108
13. <i>V. V. Marynets, O. Y. Pytovka</i> Investigation of boundary-value problem for non-linear wave equation with discontinuous right part.....	116
14. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Varcaba E. V.</i> Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2	124
15. <i>Sapozhnikova K. Yu.</i> Partial averaging of differential systems with maxima.....	130
16. <i>Slyvka-Tylyshchak G. I., Mykhasiuk M. M.</i> The properties of generalized solution of Cauchy problems for the heat equations with a random right side from Orlicz space.....	136
17. <i>Chuiko S. M., Chuiko O. S., Chechetenko V. O.</i> On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method.....	147

УДК 517.9

К. Ю. Сапожнікова (Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЧАСТКОВЕ УСЕРЕДНЕННЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАКСИМУМОМ

In this work system of differential equations with dynamics depending on the maximum of solutions over prehistory is studied. For such system partly averaged system with maximum is considered and the justification of application of of partly averaging is proved. An example is provided.

В даній роботі вивчається система дифференціальних рівнянь, динаміка яких залежить від максимуму розв'язку на інтервалі передісторії. Для такої системи розглянута відповідна частково усереднена системи з максимумом та обґрунтовано застосування схеми часткового усереднення. Наведено приклад.

1. Вступ. Дифференціальні рівняння з максимумом належать до класу рівнянь із запізненням, де функція запізнення залежить від стану об'єкта у попередній момент часу. Рівняння такого типу виникають при моделюванні економічних [1], технічних [2], біологічних [3], [4] процесів тощо. Через наявність максимуму, у правій частині рівняння, воно є нескінченно-вимірним та нелінійним, навіть коли функція правої частини є лінійною. Деякі методи дослідження таких систем наведені у [5]. Зокрема, у [5] авторами була запропонована схема повного усереднення систем дифференціальних рівнянь з максимумом, особливістю якої є відсутність максимуму в усередненій системі. Для схеми усереднення у роботі [6] пропонується, у ролі усередненої системи, розглядати систему з максимумом. Перевагою такого методу є те, що усереднена система зберігає особливість вихідної задачі, недоліком – складність системи, і як результат, можлива складність при аналізуванні. У випадку, коли вдається підібрати функцію, яка хоча і залежить від часу але є зручною для інтегрування, застосовується схема часткового усереднення. Для систем звичайних дифференціальних рівнянь цей метод запропоновано у роботі [7]. У цій статті ми обґрунтовуємо застосування методу часткового усереднення для систем дифференціальних рівнянь з максимумом та ілюструємо застосування методу на прикладі.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему дифференціальних рівнянь з максимумом:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} x(\tau)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

та початковою умовою:

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\min_{t \geq 0} g(t), 0], \quad (2)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, функції $g, \gamma \in C([0, \infty); [0, \infty))$ такі, що $g(t) \leq \gamma(t) \leq t$, $t \in [0, \infty)$, початкова функція $\varphi \in C([\min_{t \geq 0} g(t), 0]; \mathbb{R}^n)$.

Нехай існує функція $\tilde{f}(t, x, y)$ для якої

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(t, x(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} x(\tau)) - \tilde{f}(t, x(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} x(\tau)) \right) dt = 0. \quad (3)$$

Поставимо у відповідність системі (1) наступну частково усереднену систему

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \tilde{f}(t, y(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} y(\tau)), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

з початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [\min_{t \geq 0} g(t), 0]. \quad (5)$$

3. Основний результат. Розглянемо питання близькості розв'язків задач (1), (2) та (4), (5) на скінченному асимптотично великому проміжку часу.

Теорема 1. *Нехай в області $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ виконуються наступні умови:*

- 1) *функції $f(t, x, y)$ та $\tilde{f}(t, x, y)$ неперервні за t та існують константи $M > 0$ та $\lambda > 0$ такі, що*

$$\|f(t, x, y)\| \leq M, \quad \|\tilde{f}(t, x, y)\| \leq M,$$

$$\|f(t, x, y) - f(t, x', y')\| \leq \lambda(\|x - x'\| + \|y - y'\|),$$

$$\|\tilde{f}(t, x, y) - \tilde{f}(t, x', y')\| \leq \lambda(\|x - x'\| + \|y - y'\|);$$

- 2) *рівномірно по x в області D існує межа (3);*

- 3) *функції g, γ рівномірно-неперервні на для всіх $t \in [0, \infty)$;*

- 4) *існує $\rho > 0$ таке, що розв'язок $y = y(t)$, $y(0) = x(0) \in D' \subset D$ частково усередненої системи (4) при $t \geq 0$, належить разом з ρ -околом області D , для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*

Тоді для будь-яких $\eta \in (0, \rho)$ та $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для будь-яких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ буде виконуватися наступна оцінка

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta, \quad (6)$$

де x – розв'язок задачі (1), (2) на $[0, \infty)$.

Доведення. З умов 1), 2) теореми слідує, що у задач (1), (2) та (4), (5) існують єдині продовжені при $t \geq 0$ розв'язки допоки x, y належать області D .

Запишемо (1), (2) та (4), (5) відповідно в інтегральній формі

$$x(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t \left(f(s, x(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} x(\tau)) \right) ds, \quad (7)$$

$$y(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t \left(\tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds. \quad (8)$$

Для $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ оцінимо різницю $x(t) - y(t)$, додавши до правої частини $\pm f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau))$, отримаємо

$$x(t) - y(t) = \varepsilon \int_0^t \left[f(s, x(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} x(\tau)) - f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) + f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right] ds.$$

Використовуючи умову 1) теореми маємо

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \lambda \varepsilon \int_0^t \left(\|x(s) - y(s)\| + \left\| \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} x(\tau) - \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau) \right\| \right) + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq 2\varepsilon \lambda \int_0^t \left(\left\| \max_{\sigma \in [0, s]} \|x(\sigma) - y(\sigma)\| \right\| \right) ds + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds \right\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Для того, щоб отримати оцінку для останнього доданку у (9), розіб'ємо інтервал $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин точками $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ та позначимо $y(t_i) := y_i$, $\max_{\tau \in [g(t_i), \gamma(t_i)]} y(\tau) := \check{y}_i$. Нехай $t \in (t_k, t_{k+1})$ для деякого $k \in [0, m-1]$.

Маємо

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - f(s, y_i, \check{y}_i) \right\| ds + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \tilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} \check{y}(\tau)) \right\| ds + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_{i-1}} f(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_i} f(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y_k, \check{y}_k) \right) ds \right\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Для першого доданку у (10) маємо

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - f(s, y_i, \check{y}_i) \right\| ds \leq \\ & \leq \lambda \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\|y(s) - y_i\| + \left\| \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau) - \check{y}_i \right\| \right) ds \leq \\ & \leq 2\varepsilon \lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \max_{\sigma \in [0, s]} y(\sigma) - y_i \right\| ds = \\ & = 2\varepsilon \lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \max_{\sigma \in [0, s]} \left\| \int_{t_i}^{\sigma} \tilde{f}(\zeta, y(\zeta), \max_{\tau \in [g(\zeta), \gamma(\zeta)]} y(\tau)) d\zeta \right\| ds \leq \\ & \leq 2\varepsilon \lambda M \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{\sigma} d\zeta ds = 2\varepsilon \lambda M \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\sigma - t_i) ds = 2\varepsilon \lambda M \frac{L^2}{m}. \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо для другого доданку у (10)

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \tilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} \check{y}(\tau)) \right\| ds \leq 2\varepsilon \lambda M \frac{L^2}{m}.$$

З умови 2) теореми слідує, що існує монотонно спадна функція $\mu(t)$, яка прямує до 0 при $t \rightarrow \infty$ і така, що в усій області D виконується нерівність

$$\left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds \right\| \leq t\mu(t) \leq \omega(\varepsilon),$$

де $\omega(\varepsilon) := \sup_{\tau \in [0, L]} [\tau \mu(\frac{\tau}{\varepsilon})]$, $\tau := \varepsilon t$. Зауважимо, що $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \omega(\varepsilon) = 0$. Таким чином

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_{i-1}} f(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_i} f(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \\ & + \varepsilon \left\| \int_0^t (f(s, y_i, \check{y}_i) - \tilde{f}(s, y_k, \check{y}_k)) ds \right\| \leq 2m\omega(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) - \tilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds \right\| \leq \\ & \leq 2\varepsilon \lambda M \frac{L^2}{m} + 2m\omega(\varepsilon) := \tilde{\omega}(\varepsilon, m). \end{aligned}$$

Зауважимо, що при достатньо великому m та достатньо малому ε величина $\tilde{\omega}$ може бути зроблена як завгодно малою. Таким чином, вважаючи, що $\eta > \tilde{\omega}(\varepsilon, m)$ маємо

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta. \quad (11)$$

Теорему доведено.

Приклад 1. Розглянемо наступну задачу Коші

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon(-\frac{1}{2}x(t) \sin t - \max_{\tau \in [t-1, t]} x(\tau)), & t \in [0, \infty), \\ x(t) &= 1, & t \in [-1, 0], \end{aligned} \quad (12)$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що функція

$$f(t, x(t), \max_{\tau \in [t-1, t]} x(\tau)) := -\frac{1}{2}x(t) \sin t - \max_{\tau \in [t-1, t]} x(\tau),$$

неперервна за часом та задовольняє умову Ліпшиця за другим та третім аргументом з константою $\lambda > 1$. Отже, існує єдиний розв'язок $x = x(t)$ задачі (12). Для функції

$$\tilde{f}(t, x(t), \max_{\tau \in [t-1, t]} x(\tau)) := -\max_{\tau \in [t-1, t]} x(\tau),$$

виконується умова

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f(t, x, y) - \tilde{f}(t, x, y)) dt \right| = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2T} \int_0^T \sin t dt \right| = 0.$$

Тоді, частково усереднена система має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\varepsilon \max_{\tau \in [t-1, t]} y(\tau), & t \in [0, \infty), \\ y(t) &= 1, & t \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (13)$$

На наступних рисунках 1–4 для різних значень ε побудовано графіки вхідної (12) та усередненої (13) задач на відповідних проміжках часу.

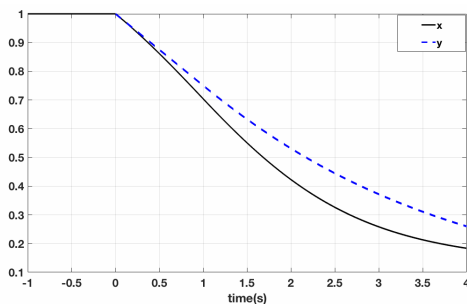


Рис. 1. Графік розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.25$, $L = 1$

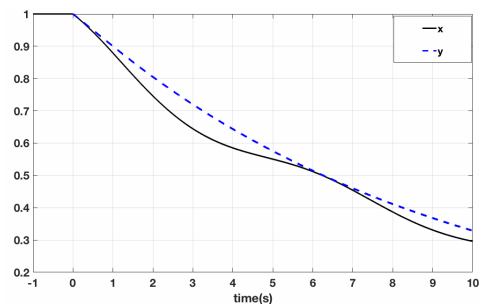


Рис. 2. Графік розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.1$, $L = 1$

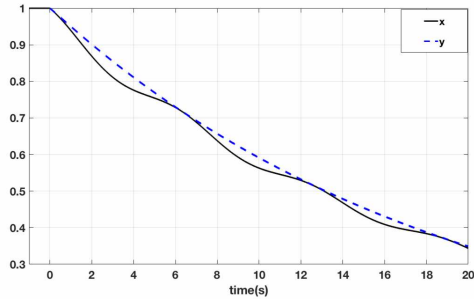


Рис. 3. Графік розв’язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.05, L = 1$

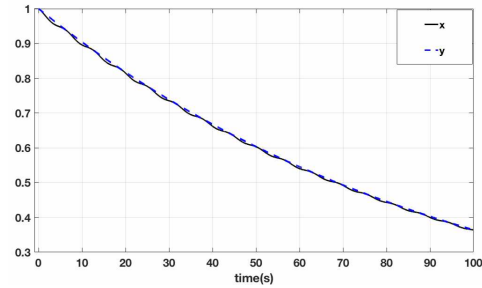


Рис. 4. Графік розв’язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.01, L = 1$

У наведеній нижче таблиці представлені оцінки близькості розв’язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при різних значеннях параметра ε .

ε	0.25	0.1	0.05	0.01	0.001
$\max_{t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]} x(t) - y(t) $	0.1012	0.0700	0.0501	0.0021	0.0002

Отже, розв’язки вхідної (12) та усередненої (13) задач задовольняють оцінку (11).

Список використаної літератури

1. *Appleby J.A.D., Wu H.*, Exponential growth and Gaussian-like fluctuations of solutions of stochastic differential equations with maximum functionals // J. of Physics: Conference series.– 2008.– **138**, №1.– pp.1–25.
2. *Azhmyakov V., Aftab A., Verriest E. I.* On the optimal control of systems evolving with state suprema // InProceedings: 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC).–2016.– pp.3617–3623.
3. *Chan D.M., Kent C.M., Kocić V., Stević S.* A proposal for an application of a max-type difference equation to epilepsy // InProceedings:International Conference on Differential & Difference Equations and Applications.– 2017.– pp.193–210.
4. *Karafyllis I., Jiang Z.-P.* Stability and stabilization of nonlinear systems.- New York:Springer Science & Business Media, 2011.- - 385p.
5. *Bainov D., Hristova S.* Differential Equations with Maxima.- New York: CRC Press, 2011.– 291p.
6. *Plotnikov V.A., Kichmarenko O.D.* A note on the averaging method for differential equations with maxima //Iranian J. of optimization.– 2009.–**2**, №1.– pp.132–140.
7. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления.– К.: Лыбидь.– 1992.– 187с.

Одержано 04.05.2018