УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).7-11

С. І. Балога

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат фізико-математичних наук
switlana.baloha@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1221-9072

СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНОГО МНОГОВИДУ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Теорія розширень динамічних рівнянь на торі є важливим розділом теорії звичайних диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається та має важливе прикладне застосування до різноманітних задач науки та техніки. Дана теорія описує процеси, що носять коливний характер.

Одним з важливих питань математичної теорії багаточастотних коливань є проблема існування та стійкості інваріантних тороїдальних многовидів, питання грубості інваріантного многовиду, його збереження при малих збуреннях для систем диференціальних рівнянь, які визначені у прямому добутку тора та евклідового простору. Такі многовиди служать носіями багаточастотних коливань у системі. Основи цієї теорії були розроблені А. М. Самойленком.

У даній статті досліджено клас диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, для якого мають місце умови існування асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду. Формулюються та доводяться достатні умови для існування та асимптотичної стійкості інваріантного тора одного класу нелінійних розширень динамічних систем на торі, що має специфічні властивості в ω-граничній множині Ω вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$.

Наведено дві теореми, які встановлюють умови існування асимптотично стійких інваріантних множин для лінійного розширення динамічної системи на торі та відповідної збуреної системи. Інваріантний многовид нелінійної системи шукаємо ітераційним методом.

Ключові слова: нелінійна система диференціальних рівнянь, інваріантний многовид, асимптотична стійкість, m-вимірний тор, n-вимірний Евклідів простір, ω-гранична множина, ітераційний метод.

1. Вступ. Теорія розширень динамічних рівнянь на торі [1] є важливим розділом теорії звичайних диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається та має важливе прикладне застосування до різноманітних задач науки та техніки. Дана теорія описує процеси, що носять коливний характер. Одним з важливих питань математичної теорії багаточастотних коливань є проблема існування та стійкості інваріантних тороїдальних многовидів, питання грубості інваріантного многовиду, його збереження при малих збуреннях. Основи цієї теорії були розроблені А. М. Самойленком і узагальнено в працях [1] і [2].

Дана робота присвячена дослідженню умов існування асимптотично стійкого інваріантного многовиду нелінійної системи диференціальних рівнянь, визначеної в просторі $T^m \times R^n$.

2. Постановка задачі та фомулювання одержаного результату. Розглянемо лінійне розширення динамічної системи рівнянь на торі з малим параметром

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T \in T^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $A(\varphi)$ і $f(\varphi) \in C(T^m)$, $C(T^m)$ — простір неперервних 2π-періодичних по кожній з компонент φ_j, $j = 1, 2, \dots, m$ функцій, визначених на m-вимірному торі T^m, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T^m)$, $\varepsilon > 0$ − малий параметр.

Відомо [1], що при $\varepsilon = 0$ система (1) має інваріантний тор для кожної вектор-функції $f(\varphi) \in C^1(T^m)$ тільки у випадку, коли $det A(\varphi) \neq 0$ для всіх $\varphi \in T^m$. Для того, щоб система (1) ($\varepsilon > 0$) мала інваріантний тор для довільної функції $f(\varphi) \in C^1(T^m)$, дійсні частини всіх власних чисел матриці $A(\varphi)$ для кожного фіксованого $\varphi \in T^m$ повинні бути відмінні від нуля [1].

Нехай Ω_φ — ω-гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t^\varepsilon(\varphi)$ такого, що

$$\varphi_0^\varepsilon(\varphi) = \varphi, \quad \Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi.$$

Особливу цікавість викликають системи, елементи яких володіють певними властивостями лише на ω-граничній множині Ω, а не на всьому торі T^m. Зокрема, такі системи розглядалися в [3] і [4].

Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ існує границя

$$\lim_{t \to \infty} A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) = A, \tag{2}$$

де $\varphi_t^\varepsilon(\varphi)$ — розв'язок задачі Коші $\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi)$, $\varphi_0^\varepsilon(\varphi) = \varphi$. Це означає, що матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $A(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Поряд із системою (1) розглянемо збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi), \ \dot{x} = (A(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \tag{3}$$

Спочатку наведемо дві теореми [4], які встановлюють умови існування асимптотично стійких тороїдальних множин для систем (1) і (3).

Теорема 1. *Нехай має місце рівність (2) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні $Re(\lambda_j(A)) < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тоді існує таке число $\varepsilon_0 > 0$, що при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, \dots, m$ функції $f(\varphi)$ система (1) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину $x = u_\varepsilon(\varphi)$.*

Теорема 2. *Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя (2) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні $Re(\lambda_j(A)) < 0$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Тоді існують такі числа $\varepsilon_0 > 0$ і $b > 0$, що при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і для будь-якої неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, \dots, m$ матриці $B(\varphi)$ такої, що*

$$\max_{\varphi \in T^m} \|B(\varphi)\| \leq b$$

система (3) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi), \ \dot{x} = F(\varphi, x), \tag{4}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T^m)$, $F(\varphi, x) \in C_{\varphi,x}^{(0,2)}(\varphi \in T^m, x \in R^n)$, $\|x\| \leq h$. Перепишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi), \ \dot{x} = A(\varphi)x + B(\varphi, x)x + f(\varphi), \tag{5}$$

де $f(\varphi) = F(\varphi, 0)$, $B_1(\varphi, x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$, $B(\varphi, x) = B_1(\varphi, x) - B_1(\varphi, 0)$, $A(\varphi) = B_1(\varphi, 0)$.

Як і раніше, вважатимемо, що матриця $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $A(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$.

Інваріантний многовид системи (5) шукатимемо ітераційним методом, запропонованим у роботі [2] як границю послідовності

$$M_k: \ x = u^{(k)}(\varphi), \ \varphi \in T^m, \ k = 1, 2, \ldots, \ u^{(0)}(\varphi) = 0,$$

кожна з яких є інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь:

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi), \ \dot{x} = A(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{6}$$

де $x = u^{(k-1)}(\varphi)-$ інваріантний многовид на $(k-1)-$му кроці. За теоремою 2, інваріантний многовид $x = u^{(k)}(\varphi)$ на кожному кроці k матиме вигляд

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Psi_\tau^0(\varphi, k) f(\varphi_\tau^\varepsilon(\varphi)) d\tau, \tag{7}$$

де $\Psi_\tau^t(\varphi, k)-$ матрицант однорідної системи

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi), \ \dot{x} = A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))x + B(\varphi_t^\varepsilon(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)))x, \tag{8}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра і задовольняє оцінку

$$\left\| \Psi_\tau^t(\varphi, k) \right\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \tag{9}$$

при всіх $t \geq \tau$, $\varphi \in T^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, якщо тільки

$$\max_{\varphi \in \ T^m} \left\| B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)) \right\| \leq b.$$

Позначимо

$$\max_{\varphi \in \ T^m} \| f(\varphi)) \| = m.$$

З вигляду (7) і оцінки (9) легко бачити, що

$$\left\| u^{(k)}(\varphi) \right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \left\| \Psi_\tau^0(\varphi, k) \right\| \| f(\varphi_s^\varepsilon(\varphi)) \| \, ds \leq \frac{K}{\gamma} \max_{\varphi \in \ T^m} \| f(\varphi) \| \, . \tag{10}$$

Вважатимемо, що γ і K такі, що виконується нерівність

$$\left\| u^{(k)}(\varphi) \right\| \leq h.$$

Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$.

Оцінимо різницю $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$. Для будь-якого $\varphi \in T^m$ $u^{(k)}(\varphi)$ є інваріантним многовидом рівняння (6), тобто $u^{(k)}(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt} u^{(k)}(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) = (A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) + B(\varphi_t^\varepsilon(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))))u^{(k)}(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) + f(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)).$$

Тому легко бачити, що $u^{(k+1)}(\varphi)-u^{(k)}(\varphi)$ інваріантним тором системи рівнянь

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ \dot{x}=(A(\varphi)+B(\varphi,u^{(k)}(\varphi)))x+(B(\varphi,u^{(k)}(\varphi))-B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi),$$

а отже, враховуючи (10), задовольняє нерівність

$$\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(k+1)}(\varphi)-u^{(k)}(\varphi)\right\|\leq\frac{K}{\gamma}\left\|B(\varphi,u^{(k)}(\varphi))-B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi))\right\|\left\|u^{(k)}(\varphi)\right\|.$$

Нехай функція $B(\varphi,x)$ ліпшицева. Тоді

$$\max_{\varphi\in\ T^m}\left\|u^{(k+1)}(\varphi)-u^{(k)}(\varphi)\right\|\leq L\frac{K}{\gamma}h\left\|u^{(k)}(\varphi)-u^{(k-1)}(\varphi)\right\|.$$

Вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$L\frac{K}{\gamma}h<1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$

$$\lim_{k\to\infty}u^{(k)}(\varphi)=u_\varepsilon(\varphi).$$

Перейшовши до границі, коли $k\to\infty$ в рівності (7), бачимо, що функція $u_\varepsilon(\varphi)$ допускає представлення

$$x=u_\varepsilon(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}\Psi_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau^\varepsilon(\varphi))d\tau,$$

де $\Psi_\tau^t(\varphi)-$ матрицант однорідної системи

$$\dot{\varphi}=\varepsilon a(\varphi),\ \dot{x}=A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))x+B(\varphi_t^\varepsilon(\varphi),u_\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)))x,$$

який задовольняє оцінку

$$\left\|\Psi_\tau^t(\varphi)\right\|\leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}$$

при всіх $t\geq\tau$, $\varphi\in T^m$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і деяких $K\geq1$, $\gamma>0$, $\varepsilon_0>0$.

Отже, справедлива теорема.

Теорема 3. *Нехай в системі (4) матриця $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні $Re\lambda_j(A)<0$, $j=1,2,\dots,n$. Тоді існують достатньо малі $b_0>0$, $\varepsilon_0>0$ і достатньо мала стала Ліпшиця L, що при всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і для будь-якої неперервної по φ і x в області $\varphi\in\ T^m$, $\|x\|\leq h$, 2π-періодичної по φ_j, $j=1,2,\dots,m$ матриці $F(\varphi,x)$ такої, що*

$$\max_{\varphi\in\ T^m}\|F(\varphi,0))\|=m,$$

$$\max_{\varphi\in\ T^m,\ \|x\|\leq h}\|B(\varphi,x))\|\leq b_0$$

$$\left\|B(\varphi,x^{'})-B(\varphi,x^{''})\right\|\leq L\left\|x^{'}-x^{''}\right\|,$$

система (4) має асимптотично стійкий інваріантний многовид.

3. Висновки. У роботі встановлено достатні умови асимптотичної стійкості інваріантного тороїдального многовиду нелінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром, визначеної у прямому добутку m-вимірного тора T^m і n-вимірного евклідового простору R^n.

Список використаної літератури

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова: монографія. Київ: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы: монографія. Москва: Наука, 1987. 304 с.
3. Перестюк М. О., Балога С. І. Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання.* 2008. Т. 11, №4. С. 520–529.
4. Балога С. І. Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2018. Вип. 33, №2. С. 14–18.

Baloha S. I. Stability of invariant manifold of nonlinear system of differential equations.

The theory of extensions of the dynamical equations on the torus is an important section of the theory of ordinary differential equations that is intensively evolving and has an important applied application to various tasks of science and technology. This theory describes processes that have oscillatory character. One of the important questions of mathematical theory of multifrequency oscillations is the problem of the existence and stability of invariant toroidal manifolds, the problem of the structural stability of the invariant manifold, its preservation under small perturbations for the systems of differential equations that are defined in the direct product of a torus and Euclidean space. Such manifolds serve as carriers of multifrequency oscillations in the system. The basics of this theory have been developed by A. M. Samoilenko.

In this paper the class of differential equations, defined in the direct product of m-dimensional torus T^m and n-dimensional Euclidean space R^n for which there exist conditions for the existence of an asymptotically stable invariant toroidal manifold, is investigated. We formulate and prove sufficient conditions for the existence and asymptotic stability of invariant toroidal class of nonlinear extensions of dynamical systems on torus, that has specific properties in ω-limit set Ω of the trajectories $\varphi_t(\varphi)$. Two theorems, that define the conditions for the existence of asymptotically stable invariant sets for linear expansion of the dynamical system on torus and corresponding perturbed system, are given. We search an invariant manifold of a nonlinear system by the iterative method, proposed by A. M. Samoilenko.

Keywords: nonlinear system of differential equations, invariant manifold, asymptotic stability, m-dimensional torus, n-dimensional Euclidean space, ω-limit set, iteration method.

References

1. Mitropolsky, Yu. A., Samoilenko, A. M., & Kulyk, V. L. (1990). Investigation of dichotomy of linear system of differential equations via Lyapunov functions. *Kyiv: Naukova dumka* [in Ukrainian].
2. Samoilenko, A. M. (1987). Elements of mathematical theory of multi-frequency oscillations. Invariant torus. *Moskow: Nauka* [in Russian].
3. Perestyuk, N. A., & Baloha, S. I. (2008). Existence of an invariant torus for a class of systems of differential equations. *Nonlinear Oscillations, 11(4)*, 520–529 [in Ukrainian].
4. Baloha, S. I. (2018). Invariant manifolds of one class of systems differential equations. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, series of mathematics and informatics, 2(33)*, 14–18 [in Ukrainian].

Одержано 30.04.2019