УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).12-25

В. М. Бондаренко[1], Я. В. Заціха[2]

[1] Інститут математики НАН України, Київ,
провідний науковий співробітник відділу влгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Інститут математики НАН України, Київ,
аспірант 2012-2015 рр. навчання
zatsikha@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7792-5381

КАНОНІЧНІ ФОРМИ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ КОМУТАТИВНИХ МОНОЇДІВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не так добре, як скінченних груп; зокрема, для груп, на відміну від напівгруп, отримано критерій ручності (В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозд). Якщо говорити про опис нерозкладних зображень напівгруп, то слід виділити деякі окремі результати про цілком прості напівгрупи (І. С. Понізовский) та напівгрупи всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовский і К. Рінгель, у випадку скінченного зображувального типу) і для напівгруп Рісса (С. М. Дяченко) та напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична, як у випадку скінченного типу, так і ручного нескінченного типу). Опис зображень мономіальної алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов) і мономіальної алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко і К. Рінгель) також природно розглядати як результати про зображення напівгруп.

Ця стаття присвячена знаходженню канонічних форм матричних зображень над довільним полем для напівгруп малого порядку.

Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ є тривіальними. Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. (під описом, традиційно, мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності). Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

У попередніх роботах автори описали напівгрупи третього порядку і некомутативні моноїди четвертого порядку, які мають скінченний зображувальний тип над полем. Для всіх таких напівгруп вказана канонічна форма їх матричних зображень. При цьому для кожної напівгрупи вказана мінімальна система твірних і відповідні визначальні співвідношення.

У цій роботі аналогічні результати отримано для комутативних моноїдів четвертого порядку.

Ключові слова: визначальні співвідношення, приєднана та неприєднана одиниця, матричні зображення, ручний моноїд, моноїд скінченного та нескінченного типів, канонічна форма.

1. Вступ. Ця стаття присвячена матричним зображенням комутативних моноїдів четвертого порядку над довільним полем і є логічним продовженням досліджень роботи [1].

2. Моноїди четвертого порядку. Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчаються давно. Випадки $n = 1, 2$ є тривіальними, а напівгрупи порядку 3 вперше описав у 1953 р. Т. Тамура [2]; опис отримано у вигляді таблиць Келі. Пізніше вони вивчалися, зокрема, в [3–5]. Напівгрупи порядку 4 вперше описав в 1954 р. також Т. Тамура [6], а в 1955 р. Г. Е. Форсайт [7] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми (в обох роботах опис отримано в термінах таблиць Келі). Зауважимо, що під описом традиційно мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності (дуальною до напівгрупи називається та ж сама множина з операцією множення $x \circ y = yx$). Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються *різними*. Очевидно, комутативні напівгрупи різні тоді і лише тоді, коли вони не є ізоморфними.

Приведемо деякі пояснення до задання моноїдів (які розглядаються нижче). В круглих дужках вказано всі елементи моноїда, а в кутових – мінімальну систему твірних. Через 0 та e позначається відповідно нульовий та одиничний елементи; визначальні співвідношення для них виписуватись не будуть. Наявність різних букв в позначеннях твірних різних напівгруп визначається специфікою запропонованого першим автором алгоритму знаходження мінімальних систем твірних (див., наприклад, [5]).

Моноїд M називається *з приєднаним одиничним елементом* (відповідно *з приєднаним нульовим елементом*), якщо $M' = M \setminus e$ (відповідно $M' = M \setminus 0$) — напівгрупа.

При нумерації моноїдів четвертого порядку скорочення cm означає комутативний моноїд без приєднаного одиничного елемента. Якщо такий моноїд має приєднаний нульовий елемент, а напівгрупа з відкинутим нулем також має нульовий елемент, то він позначається через 0_1. Визначальні співвідношення для 0_1 також не виписуються.

Мінімальні системи твірних та відповідних визначальних співвідношень для всіх напівгруп третього порядку вказані в роботі [8]. Звідси маємо те ж саме для моноїдів четвертого порядку з приєднаною одиницею.

Переходимо до випадку моноїдів четвертого порядку без приєднаної одиниці.

Теорема 1. *Моноїди вигляду*

1*cm*) $(e, 0, b, d) = \langle b, d\rangle$: $b^2 = 0$, $d^2 = e$, $db = bd = b$;

2*cm*) $(e, 0, 0_1, d) = \langle 0, 0_1, d\rangle$: $d^2 = e$;

3*cm*) $(e, 0, c, c^2) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = e$;

4*cm*) $(e, c, d, d^2) = \langle c, d\rangle$: $c^2 = e$, $d^3 = d$, $dc = cd = d$;

5*cm*) $(e, a, d, ad) = \langle a, d\rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $da = ad$;

6*cm*) $(e, b, c, bc) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = e$, $c^2 = e$, $cb = bc$;

7*cm*) $(e, c, c^2, c^3) = \langle c\rangle$: $c^4 = e$.

утворюють повну систему попарно неізоморфних комутативних моноїдів четвертого порядку без приєднаної одиниці.

Зауважимо, що ми не ставили перед собою задачу, щоб системи визначальних співвідношень були обов'язково мінімальними; для вивчення матричних зображень напівгруп це і не потрібно (інколи, для нашого методу вивчення, зайві співвідношення можуть бути навіть корисними).

Переходимо до доведення теореми 1.

Із основного результату роботи [9] випливає, що комутативні моноїди порядку 4 з неприєднаною одиницею вичерпуються напівгрупами з номерами 58, 88, 99, 112, 118, 125, 126 (заданими у вигляді таблиць Келі). Випишемо ці таблиці і (у випадках, коли потрібно) зробимо перетворення з ними, щоб виділити мінімальні системи; після цього елементи які є одиничними чи нульовими, позначимо через e та 0 і вкажемо визначальні співвідношення. З формальних міркувань при вказаному процесі елементи напівгруп декілька разів перенумеровуються.

58) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Таблиця Келі в повному вигляді (після перепозначення елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного та нульового елементів:

	0	b	e	d
0	0	0	0	0
b	0	0	b	b
e	0	b	e	d
d	0	b	d	e

Отже, моноїд складається з елементів $e, 0, b, d$ і має мінімальну систему твірних b, d зі співвідношеннями $b^2 = 0$, $d^2 = e$, $bd = b$, $db = b$, які є визначальними (оскільки вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

88) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Таблиця Келі в повному вигляді (після перепозначення елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного та нульового елементів:

	0	b	e	d
0	0	0	0	0
b	0	b	b	b
e	0	b	e	d
d	0	b	d	e

Отже, моноїд складається з елементів $e, 0, b, d$ і має мінімальну систему твірних $0, b, d$ зі співвідношеннями $b^2 = b$, $d^2 = e$, $bd = b$, $db = b$, які є визначальними (оскільки вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

99) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 3\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного та нульового елементів:

	0	e	c	c^2
0	0	0	0	0
e	0	e	c	c^2
c	0	c	c^2	e
c^2	0	c^2	e	c

Отже, моноїд складається з елементів $e, 0, c, c^2$ і має мінімальну систему твірних $0, c$ зі співвідношенням $c^3 = e$, яке є визначальним (оскільки вже забезпечує наявність не більше чотирьох елементів).

112) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 3\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\boldsymbol{\langle 3\rangle^2}$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	d^2	e	c	d
d^2	d^2	d^2	d^2	d
e	d^2	e	c	d
c	d^2	c	e	d
d	d	d	d	d^2

Отже, моноїд складається з елементів e, c, d, d^2 і має мінімальну систему твірних c, d зі співвідношеннями $c^2 = e$, $d^3 = d$, $cd = d$, $dc = d$, які є визначальними (оскільки вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

118) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 2\rangle = \langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 3\rangle$
$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 3\rangle}$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	a	e	ad	d
a	a	a	ad	ad
e	a	e	ad	d
ad	ad	ad	a	a
d	ad	d	a	e

Отже, моноїд складається з елементів e, a, d, ad і має мінімальну систему твірних a, d зі співвідношеннями $a^2 = a$, $d^2 = e$, $da = ad$, які є визначальними (оскільки вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

125) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 3\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	e	b	c	bc
e	e	b	c	bc
b	b	e	bc	c
c	c	bc	e	b
bc	bc	c	b	e

Отже, моноїд складається з елементів e, b, c, bc і має мінімальну систему твірних b, c зі співвідношеннями $b^2 = e$, $c^2 = e$, $bc = cb$, які є визначальними (оскільки вже забезпечують наявність не більше чотирьох елементів).

126) Таблиця Келі має вигляд

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Зробимо заміни в таблиці Келі (записаної в повному вигляді з перепозначенням елементів):

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 3\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

Заключна таблиця після перепозначення елементів з врахуванням одиничного елемента:

	e	c^2	c	c^3
e	e	c^2	c	c^3
c^2	c^2	e	c^3	c
c	c	c^3	c^2	e
c^3	c^3	c	e	c^2

Отже, моноїд складається з елементів e, c, c^2, c^3 і має мінімальну систему твірних c зі співвідношенням $c^4 = e$, яке є визначальним (оскільки вже забезпечує наявність не більше чотирьох елементів).

Порівнюючи отримані моноїди та їх задання з моноїдами у формулюванні теореми, завершуємо її доведення.

3. Формулювання основних теорем. Під зображенням завжди розуміємо матричне зображення над (довільним) полем K.

Зауваження 1. Будемо вважати, що матриця зображення моноїда, що відповідає одиничному елементу, — одинична матриця E. Якщо ж моноїд (чи взагалі напівгрупа) має нульовий елемент, то будемо вважати, що йому відповідає нульова матриця. Такі умови природні, бо при цьому (див. [10]) "втрачається" лише одне нерозкладне зображення, а саме одновимірне зображення, що складається із нульових матриць в першому випадку і одиничних матриць в другому випадку. Елементу ж 0_1 (якщо він є), звичайно, не обов'язково відповідає нульова матриця (в усій напівгрупі 0_1 — просто ідемпотент із деякими додатковими властивостями).

При вивченні зображень напівгруп порядку 4, вказаних в теоремі 1, матриця зображення, що відповідає твірному елементу a, b, c, d позначається відповідно через A, B, C, D; матриці, що відповідають елементам $0, 0_1$ позначаються такими ж символами.

Нагадаємо, що напівгрупа називається ручною (відповідно дикою) над полем K, якщо задача про опис її зображень є ручною (відповідно дикою); точні означення приведено в роботі [11]. Якщо напівгрупа має, з точністю до еквівалентності, нескінченне число нерозкладних зображень над полем K, то кажуть, що вона має нескінченний зображувальний тип над K. В іншому разі — скінченний зображувальний тип.

Теорема 2. *Всі комутативні моноїди четвертого порядку є ручними.*

Аналогічне твердження для некомутативних моноїдів доведено в роботі [1].

Теорема 3. *Комутативні моноїди четвертого порядку, що мають нескінченний зображувальний тип над полем K, вичерпуються (з точністю до ізоморфізму) наступними моноїдами:*

a) $(e, 0, b, c) = \langle e, b, c\rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $c^2 = 0$*,* $cb = bc = 0$*;*
K — поле довільної характеристики;
b) $(e, 0, b, c) = \langle b, c\rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $c^2 = e$*,* $cb = bc = b$*;*
характеристика поля K дорівнює 2*;*
c) $(e, b, c, bc) = \langle b, c\rangle$*:* $b^2 = e$*,* $c^2 = e$*,* $cb = bc$*;*
характеристика поля K дорівнює 2*.*

Доведення теореми 3. Той факт, що моноїд a) має нескінченний зображувальний тип випливає із теореми 1 роботи [8] (оскільки цей моноїд з приєднаною одиницею). У випадку b) після заміни $\overline{c} = c+e$ маємо локальну алгебру з радикалом, породженим елементами b, c зі співвідношеннями $b^2 = 0$, $\overline{c}^2 = 0$, $\overline{c}b = b\overline{c}$, яка має нескінченний зображувальний тип згідно випадку напівгрупи a).

У випадку c) після заміни $\overline{b} = b + e$, $\overline{c} = c + e$ маємо локальну алгебру з радикалом, породженим елементами b, c зі співвідношеннями $\overline{b}^2 = 0$, $\overline{c}^2 = 0$, $\overline{c}\overline{b} = \overline{b}\overline{c}$, яка має нескінченний зображувальний тип, оскільки містить як фактор-алгебру алгебру, вказану при розгляді випадку b).

Для всіх інших випадків комутативні моноїди четвертого порядку мають скінченний зображувальний тип над K згідно теореми 1 роботи [8] (для моноїдів з приєднаною одиницею) і теореми 4 (для моноїдів з неприєднаною одиницею), яка сформульована і доведена нижче.

Теорема 3 доведена.

Оскільки згідно результатів параграфу 6 роботи [8] моноїд a) ручний, то із доведення теореми 3 випливає теорема 2.

Переходимо до формулювання теореми про канонічні форми матричних зображень моноїдів четвертого порядку з неприєднаною одиницею $1cm), \ldots, 7cm)$, за виключенням моноїдів $1cm)$ і $6cm)$ для $char\, K = 2$ (див. теорему 3).

За традицією теорії матричних задач через E будемо позначати одиничну матрицю довільного розміру $n \times n$ ($n \geq 0$), а тому довільні дві клітини E в матрицях не обов'язково рівні (якщо їх рівність не випливає із деяких умов). Це робиться для того, щоб не загромаджувати індекси.

Теорема 4. *Канонічна форма для матричних зображень комутативних моноїдів четвертого порядку з неприеднаним одиничним елементом, що мають скінченний зображувальний тип, така:*

$1cm)$ $(e, 0, b, d) = \langle b, d\rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $d^2 = e$*,* $db = bd = b$*;*

char $K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}.$$

2*ст*) $(e, 0, 0_1, d) = \langle 0, 0_1, d\rangle$: $d^2 = e$;

$$0_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

для char $K \neq 2$ *і*

$$0_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для char $K = 2$.

3*ст*) $(e, 0, c, c^2) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = e$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon E & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 E \end{pmatrix}$$

для char $K \neq 3$, *якщо в* K *існує кубічний корінь* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці;*

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & -E & -E \end{pmatrix}$$

для char $K \neq 3$, *якщо в* K *не існує кубічного кореня* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці;*

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для char $K = 3$.

4*ст*) $(e, c, d, d^2) = \langle c, d\rangle$: $c^2 = e$, $d^3 = d$, $dc = cd = d$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char\, K \neq 2$ *і*

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char\, K = 2$.

5*ст*) $(e, a, d, ad) = \langle a, d\rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $da = ad$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

для $char\, K \neq 2$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $char\, K = 2$.

6*ст*) $(e, b, c, bc) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = e$, $c^2 = e$, $cb = bc$;
$char\, K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}.$$

7*ст*) $(e, c, c^2, c^3) = \langle c\rangle$: $c^4 = e$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

для $char\, K \neq 2$, *якщо в* K *існує квадратний корінь* i *з* -1;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{pmatrix},$$

для $\mathit{char}\, K \neq 2$*, якщо в* K *не існує квадратного кореня з* -1*;*

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $\mathit{char}\, K = 2$*.*

4. Доведення теореми 4. Оскільки теорема доводиться таким же методом, як теорема 2 [8], то при приведенні матриць занадто детальні міркування опускаються.

Доведення для моноїдів $3cm$) і $7cm$) випливає з відомих результатів лінійної алгебри (нормальна форма Жордана та Фробеніуса). У випадку моноїда $2cm$) ці результати треба застосувати до матриці D, яка після приведення матриці 0_1 (яка відповідає елементу 0_1) до вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(також за теоремою про нормальну форму Жордана) і врахування співвідношень для елемента 0_1 має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix}.$$

І теорему про нормальну форму Жордана потрібно застосувати до матриці D_{22} (яка задовольняє рівність $D_{22}^2 = E$). Нормальна форма в цьому випадку залежить від характеристики поля; її для $\mathit{char}\, K \neq 2$ і $\mathit{char}\, K = 2$ можна записати відповідно у вигляді

$$D_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \text{ і } D_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Аналогічно розглядається випадок $5cm$). Після приведення матриці A до такого ж вигляду, як матриці 0_1 (і врахування співвідношення $da = ad$) матриця D має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix}$$

(про нормальну форму Жордана матриць D_{11}, D_{22}, які задовольняють рівності $D_{11}^2 = E$, $D_{22}^2 = E$, див. вище).

Також аналогічно розглядаються випадки $1cm)$, $6cm)$ і випадок $4cm)$ для $char\, K \neq 2$. Після приведення матриці D у випадку $1cm)$ і матриці C у випадку $6cm)$ до вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

матриця B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в першому випадку і вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

в другому випадку. У випадку $4cm)$ для $char\, K \neq 2$ після приведення матриці C до такого ж вигляду, як у випадку $6cm)$, матриця D має такий вигляд, як матриця B у випадку $1cm)$, а саме

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(нормальна форма Жордана матриці D_{11}, яка задовольняє рівність $D_{11}^3 = D$, є прямою сумою матриць E, $-E$ і 0).

Залишилося розглянути випадок $4cm)$ для $char\, K = 2$.

За допомогою перетворень подібності (одночасно матриць C і D) приведемо матрицю D до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці D), і використання співвідношень $dc = cd = d$ вона має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix}.$$

Залишилося лише привести матрицю D_{44} (яка задовольняє рівність $D_{44}^2 = E$) до нормальної форми Жордана.

Теорема 4 доведена.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі описуються, з посиланням на попередні результати авторів про напівгрупи третього порядку, всі комутативні моноїди четвертого порядку (з точністю до ізоморфізму, в термінах твірних та визначальних співвідношень). Описано всі комутативні моноїди четвертого порядку, які мають скінченний зображувальний тип над полем, і для кожного з них вказана канонічна форма його матричних зображень. Доведено, що всі комутативні моноїди четвертого порядку є ручними.

Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні інших класів напівгруп.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2018. Вип. 33, № 2. С. 19–26.
2. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 1953. Vol. 3. P. 1–11.
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки).* 2013. №14. С. 62–67.
4. Chotchaisthit S. Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3. *Appl. Math. Sci. (Ruse).* 2014. Vol. 8. P. 1261–1269.
5. Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.* 2015. Vol. 20, no. 1. P. 32–39.
6. Tamura T. Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 1954. Vol. 5. P. 17–27.
7. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1955. Vol. 6. P. 443–447.
8. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2018. Вип. 32, № 1. С. 36–49.
9. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про комбінаторні властивості напівгруп четвертого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2017. Вип. 30, № 1. С. 25–31.
10. Бондаренко В. М., Костишин Е. М. Модулярні зображення напівгрупи T_2. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2011. Вип. 22, № 1. С. 26–34.
11. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. *Матричные задачи. Киев: Ин-т математики АН УССР.* 1977. С. 104–114.

Bondarenko V. M., Zatsikha Ya. V. Canonical forms of matrix representations of commutative monoids of the fourth order.

Matrix representations of finite semigroups over fields are studied not so well as for finite groups; in particular, for groups, unlike semi-groups, the criterion of tameness is obtained (V. M. Bondarenko, Yu. A. Drozd). If we talk about the description of indecomposable representations of semigroups, then you should highlight some individual results about quite simple semigroups (I. S. Ponizovsky) and semigroups of all transformations of a finite set (I. S. Poniozovsky and K. Ringel, in the case of finite representation type), and for Riesz semigroups (S. M. Dyachenko) and semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (V. M. Bondarenko, A. M. Tertychna, both in the cases of finite and infinite representation type). Description of the representations of the monomial algebra $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (I. M. Gel fand, V. A. Ponomarev) and the monomial algebra $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (V. M. Bondarenko and C. Ringel) are also naturally regarded as the results on the representations of semigroups.

This paper is devoted to the finding of canonical forms of matrix representations over an arbitrary field for semigroups of small order.

Semigroups of order $n < 4$ are studied in sufficient detail. The cases $n = 1, 2$ are trivial. The semigroups of the order $n = 3$ have been described by T. Tamura, in the form of Kelli's tables, even in 1953 (under the description traditionally refers to a description up to isomorphism and duality). The semigroups treated with such accuracy are called different.

In previous papers, the authors described third-order semigroups and non-commutative fourth-order monoids, which have a finite representation type over a field. For all such semigroups, canonical forms of their matrix representations are indicated. At the same time for each semigroup a minimal system of generators and the corresponding defining relations are indicated.

In this paper, similar results are obtained for commutative monoids of the fourth order.

Keywords: defining relations, attached and unattached units, matrix representation, tame monoid, monoid of finite and infinite types, canonical form.

References

1. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Pro matrychni zobrazhennya monoyidiv chetvertoho poryadku [On matrix representations of monoids of the fourth order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 33, 2*, 19–26 [in Ukrainian].
2. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ. 3*, 1–11.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2013). Pro vyznachalni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tretoho poryadku [On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup]. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics, 14*, 62–67. [in Ukrainian].
4. Chotchaisthit, S. (2014). Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3. *Appl. Math. Sci. (Ruse), 8*, 1261–1269.
5. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math., 20, 1*, 32–39.
6. Tamura, T. (1954). Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 5, 17–27.
7. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc., 6*, 443–447.
8. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 32, 1*, 36–49 [in Ukrainian].
9. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2017). Pro kombinatorni vlastyvosti napivhrup chetvertoho poryadku [On combinatorial properties of the semigroups of the fourth order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 30, 1*, 25–31 [in Ukrainian].
10. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn, E. M. (2011). Modulyarni zobrazhennya napivhrupy T_2 [Modular representations of the semigroup T_2]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 22, 1*, 26–34 [in Ukrainian].
11. Drozd, Yu. A. (1977). O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh [On tame and wild matrix problems]. *Matrix problems, Kyiv: Istitute of mathematics of SA of Ukr. SSR*, 104–114 [in Russian].

Одержано 06.04.2019