УДК 517.9

С. І. Балога (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

In this article class of differential equations defined in direct product of m-measurable torus and n-measurable Euclidean space for which the conditions of existence of asymptotically stable invariant toroidal manifold are satisfies are investigated.

В даній статті досліджено клас диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, для якого мають місце умови існування асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду.

1. Вступ. Системи диференціальних рівнянь, що є розширенням динамічної системи на торі, описують процеси, що носять коливний характер. Важливим є встановлення умов існування і збереження інваріантних торів при малих збуреннях. Основні результати дослідження інваріантних тороїдальних многовидів підсумовані в працях [2] і [4]. Дана робота присвячена дослідженню умов існування інваріантних множин лінійної системи диференціальних рівнянь, визначеної в прямому добутку тора T^m і евклідового простору R^n, та виокремлено один клас задач, для якого умови існування мають місце.

2. Постановка задачі та фомулювання одержаного результату. Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)^T \in T^m$, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in R^n$, $A(\varphi)$ і $f(\varphi) \in C(T^m)$, $C(T^m)$ — простір неперервних 2π-періодичних по кожній з компонент φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ функцій, визначених на m-вимірному торі T^m. Функція $a(\varphi)$ належить $C(T^m)$ і задовольняє умову Ліпшиця

$$\|a(\varphi^{''}) - a(\varphi^{'})\| \leq L\|\varphi^{''} - \varphi^{'}\|$$

для довільних $\varphi^{'}, \varphi^{''} \in T^m$ та деякої сталої $L > 0$.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Умова Ліпшиця гарантує існування та єдиність такого розв'язку. Через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ позначимо матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра, що при $t = \tau$ перетворюється в одиничну матрицю, тобто $\Omega^\tau_\tau(\varphi) \equiv E$. Під інваріантним многовидом системи рівнянь (1) розуміємо множину, яка визначається функцією $u(\varphi) \in C(T^m)$ такою, що функція $x(t, \varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi))$$

для довільного $\varphi \in T^m$. Покладемо

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & t \geq \tau, \\ \Omega^t_\tau(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - E), & t < \tau, \end{cases}$$

де $C(\varphi)$ — матриця, що належить простору $C(T^m)$.

Функцію $G(0,\tau,\varphi)$ назвемо функцією Гріна-Самойленка [2] системи рівнянь $\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x$, якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(0,\tau,\varphi) \| d\tau$ рівномірно обмежений по φ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(0,\tau,\varphi) \| d\tau \le k < \infty \tag{3}$$

для всіх $\varphi \in T^m$. Функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє систему (2) при $t \neq \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau+0,\tau,\varphi) - G(\tau-0,\tau,\varphi) = E.$$

Легко перевірити, що $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє рівності

$$G(t,\tau,\varphi+2\pi) = G(t,\tau,\varphi),\ G(t,t+\tau,\varphi) = G(0,\tau,\varphi_\tau(\varphi)). \tag{4}$$

Нехай матриця $G(t,\tau,\varphi)$ така, що функція $x_t(\varphi)$, залежна від $\varphi \in T^m$ як від параметра,

$$x_t(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{5}$$

визначена для всіх $t \in R$ і рівномірно обмежена. Покладемо $x_t(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ і замінимо у (5) φ на $\varphi_{-t}(\varphi)$. Тоді з урахуванням (4)

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{6}$$

Якщо інтеграл в (6) є збіжним, то функція $u(\varphi)$ визначає інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь (1), а функція $x_t(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівняння

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)).$$

Нехай Ω_φ — ω-гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t(\varphi)$ такого, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Як відомо, наприклад із [4], Ω_φ не пуста множина для всіх $\varphi \in T^m$ в силу компактності фазового простору T^m, $\Omega = \bigcup\limits_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$. У статті [3] виокремлено класи диференціальних рівнянь, для яких існує асимптотично стійка інваріантна тороїдальна множина $x = u(\varphi)$ системи (1) в просторі $T^m \times R^n$ для довільної функції $f(\varphi) \in C(T^m)$.

Розглянемо тепер лінійне розширення динамічної системи рівнянь на торі з малим параметром

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{7}$$

в якій, як і в (1), $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T^m)$, $A(\varphi), f(\varphi) \in C(T^m)$, $\varepsilon > 0$ − малий параметр. Відомо [2], що при $\varepsilon = 0$ система (7) має інваріантний тор для кожної вектор-функції $f(\varphi) \in C^1(T^m)$ тільки у випадку, коли $det A(\varphi) \neq 0$ для всіх $\varphi \in T^m$. Для того, щоб система (7) ($\varepsilon > 0$) мала інваріантний тор для довільної функції $f(\varphi) \in C^1(T^m)$, дійсні частини всіх власних чисел матриці $A(\varphi)$ для кожного фіксованого $\varphi \in T^m$ повинні бути відмінні від нуля [2].

Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ існує границя

$$\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) = A, \tag{8}$$

де $\varphi_t^\varepsilon(\varphi)$ — розв'язок задачі Коші $\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi)$, $\varphi_0^\varepsilon(\varphi) = \varphi$. Це означає, що матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $A(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$.

Теорема 1. *Нехай має місце рівність (8) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні $Re(\lambda_j(A)) < 0$, $j = 1, 2, ..., n$. Тоді існує таке число $\varepsilon_0 > 0$, що при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ функції $f(\varphi)$ система (7) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину $x = u_\varepsilon(\varphi)$.*

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь, залежну від $\varphi \in T^m$ як від параметра:

$$\dot{x} = A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))x + f(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)). \tag{9}$$

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))x.$$

Проведемо міркування, аналогічно як у [3].

Оскільки матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ допускає інтегральне представлення

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = e^{A(t-\tau)} + \int_\tau^t e^{A(t-s)}(A(\varphi_s^\varepsilon(\varphi)) - A)\Omega_s^t(\varphi)ds \tag{10}$$

і при деяких $K \geq 1$ і $\gamma > 0$

$$\left\| e^{A(t-\tau)} \right\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)}, \; t \geq \tau,$$

а при достатньо великому $t \geq T$ і досить малому a

$$\| A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) - A \| \leq a,$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, з рівності (10) маємо

$$\left\| \Omega_\tau^t(\varphi) \right\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} + \int_\tau^t K e^{-\gamma(t-s)} \left\| A(\varphi_s^\varepsilon(\varphi)) - A \right\| \left\| \Omega_\tau^s(\varphi) \right\| ds,$$

$$e^{\gamma(t-\tau)} \left\| \Omega_\tau^t(\varphi) \right\| \leq K + \int_\tau^T K e^{\gamma(s-\tau)} \left\| A(\varphi_s^\varepsilon(\varphi)) - A \right\| \left\| \Omega_\tau^s(\varphi) \right\| ds +$$

$$+ \int_\tau^t K a e^{\gamma(s-\tau)} \| \Omega_\tau^s(\varphi) \| ds.$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана знаходимо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \leq K_1 e^{-(\gamma-Ka)(t-\tau)}, \tag{11}$$

де

$$K_1 = K + \int\limits_\tau^T K e^{\gamma(s-\tau)} \left\|A(\varphi_s^\varepsilon(\varphi)) - A\right\| \left\|\Omega_\tau^s(\varphi)\right\| ds.$$

Позначимо через

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi), & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Із нерівностей (11) випливає, що $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє оцінку

$$\|G(0,\tau,\varphi)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1|\tau|}, \tag{12}$$

при $K_1 \geq 1$, $\gamma_1 > 0, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Враховуючи це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^0 \|G(0,\tau,\varphi)\| \, d\tau \leq K_1 \int\limits_{-\infty}^0 e^{(\gamma-Ka)\tau} d\tau = \frac{K_1}{\gamma - Ka} < \infty, \ \gamma > Ka.$$

Отже, $G(0,\tau,\varphi)$ є функцією Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори, а система (7) має асимптотично стійку інваріантну множину $x = u_\varepsilon(\varphi)$, що задається співвідношенням

$$u_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^0 G(0,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau^\varepsilon(\varphi)) d\tau.$$

Дійсно, нехай $x = x(t,\varphi)$ — довільний розв'язок системи рівнянь (9), а $x^*(t) = u_\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))$ — розв'язок цього ж рівняння, що лежить на інваріантній множині. Різниця цих розв'язків допускає представлення

$$x(t,\varphi) - u_\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi)(x(0,\varphi) - u_\varepsilon(\varphi))$$

і на підставі (11) робимо висновок, що

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,\varphi) - u_\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))\| = 0,$$

тобто інваріантна множина $x = u_\varepsilon(\varphi)$ є асимптотично стійкою, що і завершує доведення теореми.

Приклад. Нехай задано систему рівнянь

$$\dot\varphi = \varepsilon a(\varphi), \ \dot x = cos\varphi \cdot x + f(\varphi),$$

в якій $a(\varphi), f(\varphi) \in C(T^1)$, крім того $a(\pi) = 0$, а для всіх інших $\varphi \in T^1$ $a(\varphi) > 0$, $x \in R$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр. Точка π є положенням рівноваги динамічної системи $\dot\varphi = \varepsilon a(\varphi)$ на торі T^1, тобто $\varphi_t^\varepsilon(\pi) = \pi$. $\omega-$гранична множина Ω складається з однієї точки $\Omega = \{\pi\}$, тому точка $\varphi = \pi$ є нерухомою, а всі інші траєкторії $\varphi_t^\varepsilon(\varphi)$ прямують до π при $t \to +\infty$:

$$Re\lambda(A(\varphi)|_{\varphi\in\Omega}) = Re\lambda(cos(\varphi)|_{\varphi=\pi})) = -1 < 0.$$

Система рівнянь має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Розглянемо тепер збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = \varepsilon a(\varphi),\ \dot{x} = (A(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \tag{13}$$

Теорема 2. *Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя (8) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні $Re(\lambda_j(A)) < 0$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді існують такі числа $\varepsilon_0 > 0$ і $b > 0$, що при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і для будь-якої неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ матриці $B(\varphi)$ такої, що*

$$\max_{\varphi \in\ T^m} \|B(\varphi)\| \leq b, \tag{14}$$

система (13) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Доведення теореми полягає в тому, щоб показати, що матрицант $\Psi_\tau^t(\varphi)$ системи рівнянь

$$\dot{x} = A(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))x + B(\varphi_t^\varepsilon(\varphi))x \tag{15}$$

при досить великих t допускає оцінку типу $exp(-\gamma(t - \tau))$.

Матрицант $\Psi_\tau^t(\varphi)$ допускає представлення

$$\Psi_\tau^t(\varphi) = \Omega_\tau^t(\varphi) + \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(\varphi) B(\varphi_s^\varepsilon(\varphi)) \Psi_s^t(\varphi) ds.$$

Враховуючи оцінку (11), аналогічними міркуваннями як при доведенні теореми 1 отримаємо оцінку для матрицанта системи (15)

$$\left\| \Psi_\tau^t(\varphi) \right\| \leq K_2 e^{-\gamma_2 (t - \tau)} \tag{16}$$

при всіх $t \geq \tau$, $\varphi \in T^m$ і деяких $K_2 \geq 1$, $\gamma_2 > 0$. З оцінки (16) випливає, що система (13) має асимптотично стійкий інваріантний многовид $x = u_\varepsilon(\varphi)$, який задається співвідношенням

$$u_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^0 \Psi_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau^\varepsilon(\varphi)) d\tau,$$

що і доводить теорему.

1. *Былов Б. Ф., Виноградов Р Э., Гобман В. Л., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука. 1966. – 612 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.– К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
3. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь. // Нелінійні коливання. – Т. 11, №4. – 2008. – С.520 - 529.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

Одержано 13.09.2018