УДК 519.21

М. С. Герич (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПРО РОЗПОДІЛ ПЕРЕСТРИБКІВ ЧЕРЕЗ НУЛЬОВИЙ РІВЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАТЧАСТИХ ПРОЦЕСІВ

Unexplored in the question of the function of crossing a zero-level for oscillating lattice random walks and processes are investigated in this article for almost semicontinuous bottom of all-valued Poisson processes.

Невивчені в питання про функціонали перетину нульового рівня для осцилюючих гратчастих випадкових блукань та процесів досліджуються в даній статті для майже напівнеперервних знизу цілозначних пуассонівських процесів.

Дана стаття присвячена вивченню розподілів перестрибкових функціоналів для цілочислових пуассонівських гратчастих процесів. Зауважимо, що в розділі 7 монографії [5] та [6] для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$ розподіли $\gamma_k(x)$ розглядалися не для всіх випадків значень $m_1^0 = E\xi(1)$ і лише при скінченних $x < \infty$, крім рівня $x = 0$. Там детально вивчався розподіл $\gamma_k(x)$. Щоб усунути цю прогалину, ми детальніше розглянемо розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси $\gamma_k(0)$ при різних знаках значення $m_1^0 \geq 0$.

Розглянемо складний пуассонівський процес

$$\xi(t) = \sum_{k \leq \nu(t)} \xi_k \,,$$

де $\nu(t)$ – процес Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Означення 1. *Однорідний процес з незалежними приростами $\{\xi(t),\, t \geq 0,\, \xi(0) = 0\}$ називається гратчастим пуассонівським процесом, якщо стрибкова міра Леві зосереджена в послідовності точок $\{x_r = rh\}$ $(h > 0, r \neq 0$ — ціле) і визначається співвідношенням*

$$\Pi_0(r) = \Pi_0(x_r) = \lambda p_r,\ p_r = P\{\xi_1 = rh\},\ r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

а генератриса такого процесу визначається співвідношенням

$$g_t(z) = Ez^{\xi(t)} = e^{tk(z)},\ |z| = 1,$$

$$k(z) = \lambda(p(z) - 1),\ p(z) = Ez^{\xi_1} = \sum_{r \neq 0} z^{rh} p_r,\ |z| = 1. \tag{1}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $h = 1$ і розглядати тільки цілозначні процеси. Як і раніше функцію $k(z) = \ln g_1(z)$ називаємо кумулянтою процесу.

Означення 2. *Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\, t \geq 0,\, \xi(0) = 0\}$ називається майже напівнеперервним знизу, якщо $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише геометрично розподіленими стрибками, а його кумулянта має вигляд*

$$k(z) = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1 - z}{z - b}\, (0 < b < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0),\ |m_1^0| < \infty. \tag{2}$$

Означення 3. *Цілозначний пуассонівський процес* $\{\xi(t),\, t \geq 0,\, \xi(0) = 0\}$ *називається напівнеперервним знизу, якщо* $b = 0$.

Зокрема, процес $\xi(\theta_s)$ має генератрису

$$g(s,z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s-k(z)},\ |z| = 1. \tag{3}$$

Крім того, для генератриси процесу $\xi(\theta_s)$ має місце основна факторизаційна тотожність (див. [1])

$$g(s,z) = g_+(s,z)g_-(s,z),\ |z| = 1, \tag{4}$$

де $g_\pm(s,z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}$ $(|z|^{\pm 1} \leq 1)$.

Оскільки в роботах [6], [3] для гратчастих пуассонівських процесів розподіли $\gamma_k(x)$ розглядалися не для всіх випадків знаку $m_1^0 = E\xi(1)$.

Введемо позначення граничних функціоналів процесу
$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}$ – момент 1-го досягнення рівня $x \geq 0$,
$\gamma_1(x) = \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$ – перший перестрибок через x,
$\gamma_2(x) = \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0)$ – перший недострибок $\xi(t)$,
$\gamma_3(x) = \gamma_x^+ = \gamma_1(x) + \gamma_2(x)$ – перший стрибок, що накриває рівень x,
$\xi^\pm(t) = \sup\limits_{0 \leq u \leq t} (inf)\, \xi(u),\ \xi^\pm = \sup\limits_{0 \leq t < \infty} (inf)\, \xi(t)$ – екстремуми процесу $\xi(t)$.

Позначимо через θ_s випадкову величину з показниковим розподілом: $P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \geq 0$ і відповідно генератриси цих функціоналів

$$g(s,z) = Ez^{\xi(\theta_s)}\,(|z| = 1),\ g_\pm(s,z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}\,(|z|^{\pm 1} \leq 1);$$

$$V(s,x,u_1,u_2,u_3) = E[e^{-s\tau^+(x)}u_1^{\gamma_1(x)}u_2^{\gamma_2(x)}u_3^{\gamma_3(x)},\ \tau^+(x) < \infty];$$

$$V_k(s,x,u_k) = E[e^{-s\tau^+(x)}u_k^{\gamma_k(x)},\ \tau^+(x) < \infty],\ k = \overline{1,3}.$$

В позначеннях $V(...)$ та $V_k(...)$ у випадку $m_1^0 \geq 0$ $P\{\tau^+(x) < \infty\} = 1$, тому в них достовірна подія пропускається.

Спільна генератриса всіх перестрибкових функціоналів визначається при довільному знаку m_1^0, згідно з теоремою 7.7. в [6], таким чином

$$sV(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s)W(s,x-y,u_1,u_2,u_3), x \in \mathbb{Z}_0^+, \tag{5}$$

$$p_{\pm y}^\pm(s) = P\{\xi^\pm(\theta_s) = \pm y\}, y \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$W(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y \geq 0} A(x+y,u_1,u_2,u_3)p_{-y}^-(s),\ x \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$A(x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{k \geq x+1} u_1^{k-x}u_2^x u_3^k \Pi_0^+(k),\ \Pi_0^+(k) = \lambda_1 p_k,\ x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Ми обмежимось розглядом генератрис маргінальних розподілів. Зокрема, згідно з теоремою 7.7. в [6], для маргінальних генератрис

$$V_k(s,x,u_k) = E\left[e^{-s\tau^+(x)}u_k^{\gamma_k(x)},\ \tau^+(x) < \infty\right] =$$
$$= E\left[u_k^{\gamma_k(x)},\ \xi^+(\theta_s) > x\right],\ 0 < x < \infty,\ k = \overline{1,3}$$

та їх твірних перетворень

$$v_k(s,z,u_k) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x V_k(s,x,u_k),\ k=\overline{1,3}$$

одержані співвідношення

$$V_k(s,x,u_k) = s^{-1}\sum_{y=0}^{x} p_y^+(s) W_k(s,x-y,u_k), x \geq 0,\ \ k=\overline{1,3}, \tag{6}$$

$$v_k(s,z,u_k) = s^{-1} w_k(s,z,u_k) g_+(s,z),\ k=\overline{1,3}. \tag{7}$$

Функції $W_k(s,x,u_k)$ визначаються таким чином

$$W_k(s,x,u_k) = \sum_{y\geq 0} A_k(x+y,u_k) p_{-y}^-(s),\ \ x\geq 0, \tag{8}$$

де

$$A_1(x,u_1) = \sum_{k\geq x+1} u_1^{k-x}\Pi_0^+(k),\ A_2(x,u_2) = \sum_{k\geq x+1} u_2^x \Pi_0^+(k) = u_2^x \Pi(x),$$

$$A_3(x,u_3) = \sum_{k\geq x+1} u_3^k \Pi_0^+(k),\ a_k(z,u_k) = \sum_{x\geq 0} z^x A_k(x,u_k),$$

які остаточно виражаються через генератрису додатних стрибків

$$\widetilde{\Pi}_0^+(z) = \sum_{x\geq 0}^{\infty} z^x \Pi_0^+(x) = \lambda_1 \widetilde{p}_1(z),$$

де $\widetilde{\Pi}_0^+(1) = \lambda_1$, та генератриси хвостів розподілу

$$\widetilde{\Pi}(z) = \sum_{r\geq 0}^{\infty} z^r \Pi(r),\ \Pi(r) = \sum_{k\geq r+1}^{\infty} \Pi_0^+(k),\ \Pi(0) = \lambda_1,$$

$\widetilde{\Pi}(1) = \sum\limits_{r\geq 0}^{\infty} \Pi(r) = \lambda_1 \sum\limits_{r>0} r p_r$. Причому генератриса хвостів зв'язана з розподілом стрибків наступним співвідношенням

$$\widetilde{\Pi}(z) = \frac{\lambda_1}{1-z}(1-\widetilde{p}_1(z)), \tag{9}$$

$$A_1(0,u_1) = \lambda_1 \widetilde{p}_1(u_1) = \widetilde{\Pi}_0^+(u_1),\ A_1(0,1) = \lambda_1,\ A_1(x,1) = \Pi(x),$$

$$a_1(z,u_1) = \frac{u_1}{u_1 - z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) - \widetilde{\Pi}_0^+(z)) = \frac{\lambda_1 u_1}{u_1 - z}(\widetilde{p}_1(u_1) - \widetilde{p}_1(z)),$$

$$a_1(1,u_1) = u_1 \widetilde{\Pi}(u_1),$$

$$A_2(0,u_2) = \Pi(0) = \lambda_1,\ A_2(0,1) = \lambda_1,\ A_2(x,1) = \Pi(x),$$

$$a_2(z,u_2) = \frac{1}{1-zu_2}(\widetilde{\Pi}_0^+(1) - \widetilde{\Pi}_0^+(zu_2)) = \frac{\lambda_1}{1-zu_2}(1-\widetilde{p}_1(zu_2)) = \widetilde{\Pi}(zu_2),$$

$$a_2(1,u_2)=\widetilde{\Pi}(u_2),$$
$$A_3(0,u_3)=\widetilde{\Pi}_0^+(u_3),\ A_3(0,1)=\lambda_1,\ A_3(x,1)=\Pi(x),$$
$$a_3(z,u_3)=\frac{1}{1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_3)-\widetilde{\Pi}_0^+(zu_3))=\frac{\lambda_1}{1-z}(\widetilde{p}_1(u_3)-\widetilde{p}_1(zu_3)),$$
$$a_3(1,u_3)=\lambda_1 u_3\widetilde{p}\,'_1(u_3).$$

Твірні перетворення функцій (8) мають вигляд

$$w_k(s,z,u_k)=\sum_{x\geq 0} z^x W_k(s,x,u_k). \tag{10}$$

Якщо $\xi(t)$ ($\xi(0)=0$) – майже напівнеперервний знизу цілозначний процес Пуасона з кумулянтою (2), тоді $\xi^-(\theta_s)$ має геометричний розподіл, завдяки якому вдається конкретизувати представлення (8) для $W_k(s,x,u_k)$ ($k=\overline{1,3}$).

Для дослідження розподілу перестрибків через рівень $x=0$ та $x\to\infty$ використаємо лему, що випливає з результатів розділу 7 в [6], про асимптотичну поведінку коренів кумулянтного рівняння Лундберга при $s\to 0$

$$k(z)=s,\ s\geq 0. \quad (\mathfrak{L}_s)$$

Лема 1. *[5] Для $\xi(t)$ з кумулянтою (2) з $|m_1^0|<\infty$ та $\sigma_1^2<\infty$ рівняння $(\mathfrak{L}_s)$ при $s\to 0$ має 2 дійсні корені $0<z_1(s)<1<z_2(s)$. Лівий корінь $z_1(s)$ визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$*

$$\begin{gathered} g_-(s,z)=\frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)},\ p_-(s)=\frac{1-z_1(s)}{1-b}, \\ z_1(s)=q_-(s)+bp_-(s), \\ p_{-k}^-(s)=p_-(s)(z_1(s)-b)(z_1(s))^{k-1},\ k\geq 1. \end{gathered} \tag{11}$$

а) Якщо $m_1^0=0$, тоді при $s\to 0$ добуток доповнень коренів $\overline{z}_1(s)=1-z_1(s)$, $\overline{z}_2(s)=z_2(s)-1$

$$\overline{z}_1(s)\overline{z}_2(s)=O(s),\ p_-(s)p_+(s)\approx k_1 s,\ k_1=(\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1}. \tag{12}$$

б) Якщо $m_1^0>0$, тоді $z_2(0)=1$, а $z_1(0)<1$ визначає генератрису ξ^-

$$\begin{gathered} E\,z^{\xi^-}=\frac{p_-(1-b)(z-b)}{z-z_1(0)},\ p_-=\frac{1-z_1(0)}{(1-b)},\ z_1(0)=q_-+bp_-, \\ s^{-1}p_+(s)p_-(s)\to_{s\to 0} p\,'_+(0)p_-,\ p\,'_+(0)=E[\tau^+(0)]. \end{gathered} \tag{13}$$

в) Якщо $m_1^0<0$, тоді $z_2(0)>1$, а $z_1(0)=1$, при цьому (див. (7.91) в [6])

$$\begin{gathered} z_1(s)\approx 1+\frac{s}{|m_1^0|},\ p_-(s)\approx\frac{s}{|m_1^0|(1-b)}, \\ s^{-1}p_-(s)p_+(s)\to_{s\to 0} p\,'_-(0)p_+,\ s\to 0, \\ p'_-(0)=E[\tau^-(0)]=\frac{1}{|m_1^0|(1-b)}. \end{gathered} \tag{14}$$

Отже, при $m_1^0 = 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має двократний корінь $z_{1,2}(0) = 1$ (див. (12)). При $m_1^0 > 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0) = 1$, а $z_1(0) < 1$ (визначає p_- в (13)). При $m_1^0 < 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0) > 1$, і $z_1(0) = 1$, а $1 - z_1(s) \approx O(s)$ визначає асимптотику $p_-(s)$ в (14).

Надалі будемо розглядати майже напівнеперервний знизу процес. Знайдемо для цих процесів вигляд для спільних генератрис пар функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$.

Лема 2. *[6] Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) має місце співвідношення (6), де $W_k(s,x,u_k)$ визначаються через $A_k(x,u_k)$*

$$W_1(s,x,u_1) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_1(x,u_1)+ \\ +\frac{(z_1(s)-b)u_1}{u_1 - z_1(s)}\{A_1(x,u_1) - A_1(x,z_1(s))\}], \tag{15}$$

$$W_2(s,x,u_2) = p_-(s)u_2^x(z_1(s))^{-1}[b\Pi(x)+ \\ +(z_1(s)-b)\sum_{y\geq 0}(u_2 z_1(s))^y \Pi(x+y)], \tag{16}$$

$$W_3(s,x,u_3) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_3(x,u_3)+ \\ +\frac{z_1(s)-b}{1-z_1(s)}\big\{A_3(x,u_3) - (z_1(s))^{-x}A_3(x,u_3 z_1(s))\big\}]. \tag{17}$$

Із співвідношеня в (7.46) (див. теорему 7.7 в [6]) та (5) випливає твердження для спільної генератриси функціоналів

Теорема 1. *[6] Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) має місце співвідношення*

$$\widetilde{v}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = s^{-1}g_+(s,\varepsilon)\widetilde{w}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = \\ = s^{-1}(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)w(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3), \tag{18}$$

де

$$w(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = p_-(s)\Bigg[a(\varepsilon,u_1,u_2,u_3) + \frac{u_2(z_1(s)-b)}{u_1 - u_2 z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a(\varepsilon,u_1,u_2,u_3) - u_1 u_2^{-1}(z_1(s))^{-1}a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1}, u_2 u_3 z_1(s)\Big\}\Bigg]. \tag{19}$$

З теореми 1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Спільні генератриси пар функціоналів $\{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon),\ \gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$ мають вигляд*

$$\widetilde{v}_k(s,\varepsilon,u_k) = E\left[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < \infty\right] = \\ = (1-\varepsilon)v_k(s,\varepsilon,u_k) = s^{-1}(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)w_k(s,\varepsilon,u_k) = \\ = s^{-1}g_+(s,\varepsilon)\widetilde{w}_k(s,\varepsilon,u_k),\ k = \overline{1,3}\,, \tag{20}$$

де

$$w_1(s,\varepsilon,u_1) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Bigg[ba_1(\varepsilon,u_1) + \frac{(z_1(s)-b)u_1}{u_1 - z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a_1(\varepsilon,u_1) - a_1(\varepsilon,z_1(s)\Big\}\Bigg], \tag{21}$$

$$w_2(s,\varepsilon,u_2)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Big[b\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)+\frac{z_1(s)(z_1(s)-b)}{z_1(s)-\varepsilon}\cdot \\ \cdot\Big\{\widetilde{\Pi}(z_1(s)u_2)-\varepsilon(z_1(s))^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)\Big\}\Big], \tag{22}$$

$$w_3(s,\varepsilon,u_3)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Big[ba_3(\varepsilon,u_3)+\frac{z_1(s)-b}{1-z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a_3(\varepsilon,u_3)-a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1},u_3z_1(s)\Big\}\Big]. \tag{23}$$

У випадку $m_1^0\le 0,\ z_1(s)\to 1$ при $s\to 0$, тому $w_k^0(\varepsilon,u_k)=\lim\limits_{s\to 0}w_k(s,\varepsilon,u_k)$ залежить тільки від ε,u_k.

У випадку $m_1^0>0,\ z_1(s)\to z_1(0)=q_-+bp_-<1$ при $s\to 0$, тому границя $w_k^+(\varepsilon,u_k)=\lim\limits_{s\to 0}w_k(s,\varepsilon,u_k)$ крім ε,u_k суттєво залежить від $z_1(0)<1$.

Лема 3. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) при $|m_1^0|<\infty$ та $\sigma_1^2<\infty$*

1) При $m_1^0=0$

$$m^0(1)=\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}}m_0(s,\varepsilon)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 1\\ s\to 0}}\frac{1-\varepsilon}{s}p_-(s)g_+(s,\varepsilon)=\frac{1}{\sigma_1^2(1-b)}. \tag{24}$$

2) При $m_1^0>0$

$$m_+(1)=\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}}m_+(s,\varepsilon)=\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}}\frac{1-\varepsilon}{s}g_+(s,\varepsilon)=\frac{1}{m_1^0}. \tag{25}$$

Зауважимо, що при $m_1^0=0$ моменти додатних стрибків $\mu_1=\widetilde{p}_1'(1)$, $\mu_2=\widetilde{p}_1''(1)$ пов'язані з моментами геометричного розподілу:

$$\lambda_1\mu_1=\lambda_2(1-b)^{-1}, \\ \sigma_1^2=k''(1)=\lambda_1\mu_2+\frac{\lambda_2 b}{(1-b)^2}=\lambda_1(1-b)^{-1}(b\mu_1+(1-b)\mu_2). \tag{26}$$

Для скінченного рівня $0<x<\infty$ лише при $m_1^0<0$ в наслідку 7.1 (див. [5]) наведені граничні розподіли $\gamma_k(x), k=\overline{1,3}$, які називаються функціями банкрутства і визначаються співвідношеннями (7.73). В теорії ризику вважається перша функція банкрутства при $k=1$ з перестрибком $\gamma_1(u)=\gamma^+(u)$, що називається "дефіцитною" , оскільки після банкрутства резерв страховика вичерпаний.

Позначимо $z_1(s)=z_s$ і розглянемо спочатку перестрибкові функціонали через рівень $x=0$. Нехай

$$W_k^0(s,x,u_k)=p_-^{-1}(s)W_k(s,x,u_k),\ x\ge 0,\ k=\overline{1,3}. \tag{27}$$

Лема 4. *Згідно з (6) спільні генератриси пар $\{\tau^+(0),\gamma_k(0)\}$ для довільного знаку m_1^0 визначаються простими співвідношеннями*

$$V_k(s,0,u_k)=s^{-1}p_+(s)W_k(s,0,u_k)= \\ =s^{-1}p_-(s)p_+(s)W_k^0(s,0,u_k),\ k=\overline{1,3}, \tag{28}$$

де

$$\begin{aligned} W_1^0(s,0,u_1) &= bz_s^{-1}A_1(0,u_1)+(z_s-b)z_s^{-1}a_1(z_s,u_1),\\ W_2^0(s,0,u_2) &= bz_s^{-1}A_2(0,u_2)+(z_s-b)z_s^{-1}a_2(z_s,u_2),\\ W_3^0(s,0,u_3) &= bz_s^{-1}A_3(0,u_3)+(z_s-b)z_s^{-1}a_3(z_s,u_3). \end{aligned} \tag{29}$$

Доведення. Використовуючи означення $W_k^0(s,x,u_k)$ та співвідношення (6) при $x=0$, отримаємо (28). Підставивши (15)-(17) в (27) при $x=0$, отримаємо відповідно перше, друге та третє співвідношення в (29).

Теорема 2. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) генератриси перестрибків мають вигляд*

1) Якщо $m_1^0=0$, то

$$\begin{aligned} E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] &= [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1)+(1-b)a_1(1,u_1)](\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1},\\ E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] &= [b\Pi(0)+(1-b)a_2(1,u_2)](\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1},\\ E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] &= [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3)+(1-b)a_3(1,u_3)](\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

2) Якщо $m_1^0<0$, тоді згідно з (27)

$$\begin{aligned} E\,[u_1^{\gamma_1(0)},\tau^+(0)<\infty] &= p_+p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1)+(1-b)a_1(1,u_1)],\\ E\,[u_2^{\gamma_2(0)},\tau^+(0)<\infty] &= p_+p'_-(0)[b\Pi(0)+(1-b)a_2(1,u_2)],\\ E\,[u_3^{\gamma_3(0)},\tau^+(0)<\infty] &= p_+p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3)+(1-b)a_3(1,u_3)]. \end{aligned} \tag{31}$$

3) Якщо $m_1^0>0$, тоді

$$\begin{aligned} E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] &= z_0^{-1}p'_+(0)p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1)+(z_0-b)a_1(z_0,u_1)],\\ E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] &= z_0^{-1}p'_+(0)p_-[b\Pi(0)+(z_0-b)a_2(z_0,u_2)],\\ E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] &= z_0^{-1}p'_+(0)p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3)+(z_0-b)a_3(z_0,u_3)]. \end{aligned} \tag{32}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $m_1^0=0$. Зауважимо, що $z_s\to 1$ при $s\to 0$. З першого співвідношення (29) леми 4

$$W_1^0(s,0,u_1)=bz_s^{-1}A_1(0,u_1)+(z_s-b)z_s^{-1}a_1(z_s,u_1),$$

її граничні значення при $s\to 0, u_1\to 1$

$$W_1^0(0,0,u_1)=b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1)+(1-b)a_1(1,u_1), \tag{33}$$

$$W_1^0(0,0,1)=b\lambda_1+\lambda_1(1-b)\mu_1. \tag{34}$$

Згідно з (28) при $k=\overline{1,3}$

$$E[e^{-s\tau^+(0)}u_k^{\gamma_k(0)}]=s^{-1}p_-(s)p_+(s)W_k^0(s,0,u_k). \tag{35}$$

Враховуючи друге співвідношення (12) (див. лему 1) після граничного переходу $s\to 0$ з (35) випливає:

$$E[u_1^{\gamma_1(0)}]=k_1W_1^0(0,0,u_1)\xrightarrow[u_1\to 1]{}1, \tag{36}$$

отже, $k_1 = (W_1^0(0,0,1))^{-1}$.

Згідно (26), перепишемо (34) у виді

$$W_1^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_2. \tag{37}$$

Підставивши в ліву частину (36) співвідношення (33) і (37) отримаємо перше співвідношення (29).

У випадку $k = 2$ з другого співвідношення (29) обчислюється функція W_2^0 з її граничними значеннями $s \to 0, u_2 \to 1$

$$W_2^0(0,0,u_2) = b\Pi(0) + (1-b)a_2(1,u_2), \tag{38}$$

$$W_2^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1. \tag{39}$$

Як і в попередньому випадку з урахуванням (26) генератриса $\gamma_2(0)$ визначається через (38) і (39) після граничного переходу $s \to 0$ у (35) при $k = 2$. Таким чином, отримане друге співвідношення (30).

Для випадку $k = 3$, аналогічно з третього співвідношення (29) при граничному переході $s \to 0, u_3 \to 1$

$$W_3^0(0,0,u_3) = b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1,u_3), \tag{40}$$

$$W_2^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1. \tag{41}$$

Із урахуванням (26) генератриса $\gamma_3(0)$ визначається через (40) і (41) після граничного переходу $s \to 0$ у (35) при $k = 3$. Отже, третє співвідношення в (30) доведено.

Далі встановимо справедливість співвідношень (31) у випадку $m_1^0 < 0$. Зауважимо, що $z_s \to 1$ при $s \to 0$.

Здійснивши граничний перехід в (28) при $s \to 0$, згідно (14), отримаємо

$$E[u_k^{\gamma_k(0)}] = \lim_{s\to 0} V_k(s,0,u_k) = p_+ p'_-(0) W_k^0(0,0,u_k), \tag{42}$$

і підставивши в (42) замість $W_k^0(0,0,u_k)$ при $k = 1,2,3$ відповідно (33), (38) і (40) отримаємо (31).

І накінець зупинимось на випадку $m_1^0 > 0$. З (28) при $s \to 0$, врахувавши (13), отримаємо

$$E[u_k^{\gamma_k(0)}] = \lim_{s\to 0} V_k(s,0,u_k) = p'_+(0) p_- W_k^0(0,0,u_k), \tag{43}$$

де $W_k^0(0,0,u_k)$ визначені в (28). Підставивши в (43) граничні співвідношення отримані із (28) при $s \to 0$, відповідно при $k = 1,2,3$, отримаємо всі співвідношення (32). Теорема доведена.

Після обернення співвідношень (30)– (32) отримаємо

Наслідок 2. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) розподіли перестрибків мають вигляд*

1) *Якщо $m_1^0 = 0$, то*

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r\} &= [b\Pi_0^+(r) + (1-b)\Pi(r-1)]k_1,\ r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r\} &= [b\Pi(0) + (1-b)\Pi(r)]k_1,\ r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r\} &= [b\Pi_0^+(r) + (1-b)r\Pi_0^+(r)]k_1,\ r \in \mathbb{Z}_+^0, \end{aligned} \tag{44}$$

де $k_1 = (\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}$.

2) Якщо $m_1^0 < 0$, тоді

$$\begin{gathered}
P\{\gamma_1(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} = p_+ p'_-(0)[b\Pi_0^+(r) + (1-b)\Pi(r-1)],\ r \in \mathbb{Z}_+,\\
P\{\gamma_2(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} = p_+ p'_-(0)[b\Pi(0) + (1-b)\Pi(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0,\\
P\{\gamma_3(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} = p_+ p'_-(0)[b\Pi_0^+(r) + (1-b)r\Pi_0^+(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0.
\end{gathered} \tag{45}$$

3) Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$\begin{gathered}
P\{\gamma_1(0) = r\} = z_0^{-1} p_- p'_+(0)[b\Pi_0^+(r) + (z_0 - b)(z_0^{-r}\widetilde{\Pi}(z_0) -\\
- \sum_{k=0}^{r-1} z_0^{-k-1}\Pi_0^+(r-k-1))],\ r \in \mathbb{Z}_+,\\
P\{\gamma_2(0) = r\} = z_0^{-1} p_- p'_+(0)[b\Pi(0) + (z_0 - b)z_0^r\Pi(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0,\\
P\{\gamma_3(0) = r\} = p_- p'_+(0)[b\Pi_0^+(r) + (z_0 - b)\sum_{k=0}^{r-1} z_0^k\Pi_0^+(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0.
\end{gathered} \tag{46}$$

Доведення. Після обернення співвідношень (30)-(31) відповідно по u_k, $k = \overline{1,3}$ одержуються розподіли $\gamma_k(0)$ в термінах хвостів розподілу $\Pi(r)$. Отже, (44)-(45) доведено.

При $m_1^0 > 0$ (32) теж можна обернути по u_k, $k = \overline{1,3}$, але співвідношення для розподілу $\gamma_k(0)$ будуть складнішими, поскільки залежать від $z_1(0) < 1$, зокрема

$$\begin{gathered}
a_1(z_0, u_1) = \frac{\lambda_1 u_1}{u_1 - z_0}(\widetilde{p}_1(u_1) - \widetilde{p}_1(z_0)),\\
a_2(z_0, u_2) = \widetilde{\Pi}(z_0 u_2),\\
a_3(z_0, u_3) = \frac{\lambda_1}{1 - z_0}(\widetilde{p}_1(u_3) - \widetilde{p}_1(z_0 u_3)).
\end{gathered} \tag{47}$$

Для обернення (47) по u_k, $k = \overline{1,3}$ слід здійснити деякі перетворення і звести їх до вигляду

$$\begin{gathered}
a_1(z_0, u_1) = \frac{u_1}{u_1 - z_0}((1 - z_0)\widetilde{\Pi}(z_0) - (1 - u_1)\widetilde{\Pi}(u_1)),\\
a_2(z_0, u_2) = \widetilde{\Pi}(z_0 u_2),\\
a_3(z_0, u_3) = \frac{1}{1 - z_0}((1 - u_3 z_0)\widetilde{\Pi}(u_3 z_0) - (1 - u_3)\widetilde{\Pi}(u_3)).
\end{gathered} \tag{48}$$

Після обернення (48) одержується згортка геометричного розподілу (з параметром $0 < z_1(0) < 1$) з відповідними послідовностями

$$\begin{gathered}
a_r^{(1)} = z_0^{-r}\widetilde{\Pi}(z_0) - \sum_{k=0}^{r-1}(z_0^{-1})^{k+1}\Pi_0^+(r-k-1),\ r \in \mathbb{Z}_+,\\
a_r^{(2)} = z_0^r\Pi(r),\ r \in \mathbb{Z}_+^0,\\
a_r^{(3)} = \frac{1 - z_0^r}{1 - z_0}\widetilde{\Pi}_0^+(r).
\end{gathered} \tag{49}$$

Обернення співвідношень (49) відповідно по u_k, $k = \overline{1,3}$ визначає лише одну складову розподілу $\gamma_k(0)$, а ще одна складова цього розподілу визначається простим оберненням $A_k(0, u_k)$, $k = \overline{1,3}$. Таким чином, (46) доведено.

Зауваження 1. *Слід зауважити, що при* $m_1^0 < 0$

$$P\{\gamma_2(0) = 0,\, \xi^+ > 0\} = bp_+p'_-(0)\Pi(0) > 0$$

за рахунок того, що при перетині рівня $x = 0$ *першим додатним стрибком процеса* $\xi(t)$ *недострибок є нульовим.*

Отже, в даній роботі розглянуто розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси та розподіли $\gamma_k(0)$, ($k = \overline{1,3}$) для всіх значень $m_1^0 = E\xi(1)$.

1. *Герич М. С.* Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 54-63.
2. *Герич М. С.* Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації. – 2012. – **4**, №2. – С. 229-240.
3. *Герич М. С.* Про стрибки через нескінчено віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, № 2. – С. 54-63.
4. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
5. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – **65** – 459 с.
6. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 543 с.

Одержано 19.11.2018