УДК 519.6

М. І. Глебена (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т ім. Івана Франка)
Н. В. Грипинська (Хмельницький нац. ун-т)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ НУЛІВ БУДЬ-ЯКОЇ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОЇ ФУНКЦІЇ НА ЗАДАНОМУ ПРОМІЖКУ

The problem of finding the zeros of any continuously differentiated function of one variable at a given interval is considered. A new numerical method is proposed, which is based on the use of the apparatus of the non-classical majorant and Newton diagrams of functions.

Розглядається задача відшукання нулів будь-якої неперервно диференційованої функції однієї змінної, на заданому проміжку. Пропонується новий чисельний метод, який ґрунтується на використанні апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій.

1. Вступ. В [1] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який знайшов широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Зокрема, його використано для розробки чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій, чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких функцій однієї та багатьох дійсних змінних (типу покоординатного підйому) [2, 3].

У роботі розглянуто побудову чисельного методу відшукання нулів будь-якої неперервно диференційованої функції однієї змінної, на заданому проміжку, який використовує апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

2. Поняття некласичної мажоранти та діаграми Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично.

Розглянемо функцію дійсної змінної $y = f(x)$, яка задана своїми значеннями у деяких точках x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Нехай

$$|y_i| = a_i \leq M \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad a_1 \cdot a_n \neq 0, \tag{2}$$

де M – деяка стала.

Означення 1. *Точка $P_i(x_i, -\ln a_i)$ з координатами $x = x_i$, $y = -\ln a_i$ в площині xy називається точкою зображення значення функції $y = f(x)$ в точці $x = x_i$.*

Припустимо, що точки зображення P_i значень функції $y = f(x)$ в точках x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в площині xy побудовані. З кожної точки P_i проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oy, перпендикулярно до осі Ox. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_1, x_n]$ визначимо точку $B_x(x, \kappa_x)$, де

$$\kappa_x = \inf_{(x,y)\in C(S)} y \, .$$

Множина точок $B_x(x, \kappa_x)$, $x \in [x_1, x_n]$ утворює лінію δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця лінія є неперервною, опуклою ламаною лінією, і її рівняння має вигляд

$$y = \kappa(x), x \in [x_1, x_n],$$

де $\kappa(x) = \kappa_x$.

Означення 2. *Ламана лінія δ_f, визначена на проміжку $[x_1, x_n]$, називається некласичною діаграмою Ньютона для функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.*

На рис. 1 побудована діаграма Ньютона для функції, заданої в дев'ятьох точках.

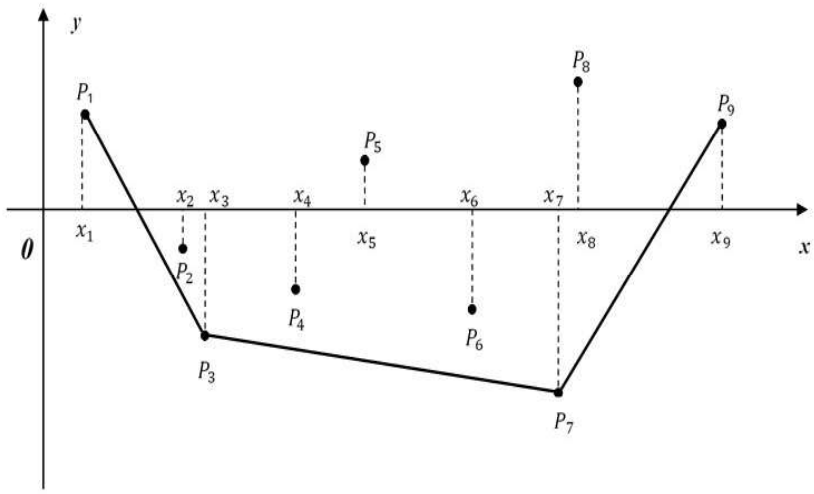

Рис. 1. Діаграма Ньютона для функції, заданої в дев'ятьох точках

Діаграма Ньютона δ_f функції $y = f(x)$ має такі властивості:

- кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_i значення функції $y = f(x)$ в точці x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
- кожна точка зображення P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ знаходиться на δ_f або розміщена вище за неї.

Позначимо

$$M_f(x) = \exp(-\kappa(x)), \quad x \in [x_1, x_n].$$

Тоді для кожного x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ виконується нерівність

$$|f(x_i)| = a_i \leq M_f(x_i).$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що

$$-\ln|f(x_i)| \geq \kappa(x_i),$$

або

$$|f(x_i)| \leq \exp(-\kappa(x_i)) = M_f(x_i).$$

Крім того,

$$M_f(x_1) = |f(x_1)|, M_f(x_n) = |f(x_n)|.$$

Означення 3. *Функція* $y = M_f(x)$, *визначена на проміжку* $[x_1, x_n]$, *називається мажорантою Ньютона функції* $y = f(x)$ *на цьому проміжку.*

Нехай

$$M_f(x_i) = T_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Означення 4. *Величини*

$$R_i = \left(\frac{T_{i-1}}{T_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} (i = 2, 3, \ldots, n; \quad R_1 = 0)$$

і

$$D_i = \frac{R_{i+1}}{R_i} (i = 2, 3, \ldots, n-1; \qquad D_1 = D_n = \infty)$$

називаються відповідно i–им числовим нахилом та i–им відхиленням діаграми Ньютона δ_f.

Означення 5. *Якщо точка зображення* P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *знаходиться в вершині* δ_f, *то індекс i називається вершинним індексом, якщо ж на* δ_f, *то – діаграмним індексом* δ_f. *Індекси* $i = 1$ *та* $i = n$ *відносяться до вершинних індексів.*

Множину всіх вершинних індексів позначимо через I, а множину діаграмних індексів – через G. Очевидно, $I \subset G$ і $T_i = a_i$ для всіх $i \in G$.

Нехай φ_i – кут між відрізком $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ діаграми Ньютона δ_f і додатним напрямком осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт k_i відрізка $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ визначається за формулою

$$k_i = \frac{\kappa_{x_i} - \kappa_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-\ln T_i + \ln T_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \ln \left(\frac{T_{i-1}}{T_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому

$$k_i = \ln R_i.$$

Звідси випливає, що

$$R_i = \exp(tg\varphi_i), D_i = \exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i).$$

Якщо $\{i_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, s;\ s \leq n)$ – послідовність вершинних індексів δ_f, то

$$0 = R_1 = R_{i_1} < R_{i_2} < \ldots < R_{i_s} = R_n;$$

$$R_{i_k+1} = R_{i_k+2} = \ldots = R_{i_{k+1}};$$

$$D_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$D_{i_k} > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Нехай p і q – два послідовні вершинні індекси δ_f, а індекс i задовольняє умову $p < i < q$. Розглянемо відрізок $B_{x_p} B_{x_q}$ діаграми δ_f рис. 2.

Тоді

$$\frac{\kappa_{x_q} - \kappa_{x_p}}{x_q - x_p} = \frac{\kappa_{x_i} - \kappa_{x_p}}{x_i - x_p},$$

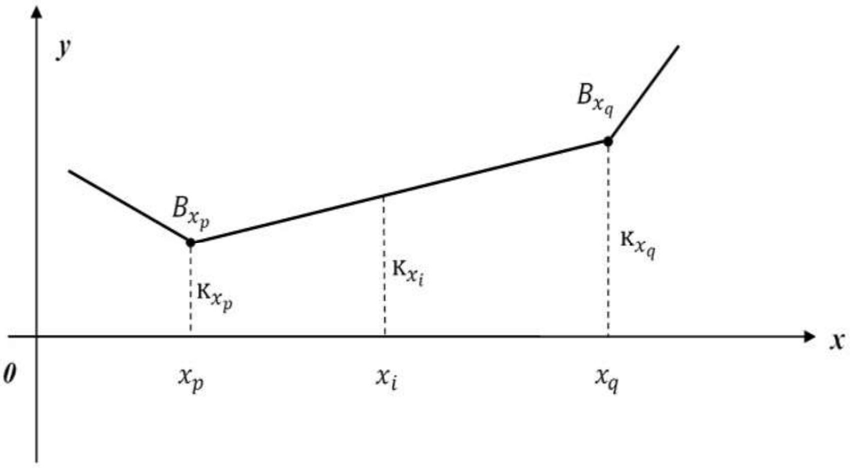

Рис. 2. Відрізок $B_{x_p}B_{x_q}$ діаграми Ньютона δ_f

або

$$\frac{-\ln a_q+\ln a_p}{x_q-x_p}=\frac{-\ln T_i+\ln a_p}{x_i-x_p}.$$

Звідси

$$T_i=\left(a_p^{x_q-x_i}a_q^{x_i-x_p}\right)^{\frac{1}{x_q-x_p}}.$$

Аналогічно одержуємо формулу для мажоранти Ньютона $M_f\,(x)$ на проміжку $[x_p,x_q]$.

$$M_f(x)=\left(a_p^{x_q-x}\cdot a_q^{x-x_p}\right)^{\frac{1}{x_q-x_p}}.$$

3. Постановка задачі. Нехай на проміжку $[a,b]$ треба відшукати всі нулі будь-якої функції $f\,(x)\in C^1\,[a,b]$. Оскільки нулі функції $f\,(x)$ є нулями функції $|f\,(x)|$ або $-\ln(1+|f\,(x)|)$, то для відшукання нулів функції $f\,(x)$ будемо шукати нулі функції

$$y=-\ln(1+|f\,(x)|)$$

Виберемо систему точок $x_k=x_0+kh$, де $k=0,1,\ldots,n$, $x_0=a$, $h=\frac{b-a}{n}$, і в площині точок xOy побудуємо точки зображення [1].

$$P_k\,(x_k,-\ln(1+|f\,(x_k)|\,))\,,k=0,1,\ldots,n.$$

Позначимо

$$a_k=1+|f\,(x_k)|\,,k=0,1,\ldots,n.$$

Величину

$$r_k=\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^{\frac{1}{h}},\ k=1,2,\ldots,n,$$

назвемо числовим нахилом функції

$$y=-\ln(1+|f\,(x)|\,)$$

у точці x_k [1].

4. Алгоритм методу. Алгоритм методу полягає в наступній послідовності кроків. Спочатку перевіряємо, чи точки $x = a$ і $x = b$ є нулями функції $f(x)$. Після цього будуємо послідовність числових нахилів $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Якщо для деякого індекса k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$:

1) $r_k = 1$ і $\left|f\left(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)\right)\right| < h$, то точка

$$\theta = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) \in [x_{k-1}, x_k]$$

з точністю h є нулем функції $f(x)$.

2) $r_k > 1$, $r_{k+1} < 1$ і $\left|f\left(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k+1})\right)\right| < h$, то точка

$$\theta = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k+1}) \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$$

з точністю h є нулем функції $f(x)$.

Нехай знайдено проміжок, на якому з точністю h лежить нуль функції $f(x)$. Тоді для відшукання цього нуля з більшою точністю поступаємо таким чином. Позначимо знайдений проміжок через $[\alpha, \beta]$, де $[\alpha, \beta] = [x_{k-1}, x_k]$ у випадку $r_k = 1$ і $[\alpha, \beta] = [x_{k-1}, x_{k+1}]$ при $r_k > 1$, $r_{k+1} < 1$. Виберемо на цьому проміжку чотири точки α, $\alpha + \frac{h}{3}$, $\alpha + \frac{2h}{3}$, β та α, $\alpha + \frac{2h}{3}$, $\alpha + \frac{4h}{3}$, β відповідно, перепозначимо їх через $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$. Знайдемо $\tilde{a}_k = 1 + |f(\tilde{x}_k)|$, $k = 0, 1, 2, 3$, і $\tilde{r}_k = \left(\frac{\tilde{a}_{k-1}}{\tilde{a}_k}\right)^{\frac{3}{h}}$, $k = 1, 2, 3$. Тоді можливі такі два випадки:

1) $\tilde{r}_2 = 1$ і $\left|f\left(\frac{1}{2}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)\right)\right| < \frac{h}{3}$, то точка

$$\theta = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \in [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$$

з точністю $\frac{h}{3}$ є нулем функції $f(x)$.

2) $r_k > 1$, $r_{k+1} < 1$ для $k = 1$ або 2. Точка

$$\theta = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{k-1} + \tilde{x}_{k+1}) \in [\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_{k+1}]$$

з точністю $\frac{h}{3}$ є нулем функції $f(x)$.

Аналогічно можна шукати нулі з точністю $\frac{h}{9}$, $\frac{h}{27}$, ...

Приклад 1. *Знайдемо нулі полінома Чебишева* $y = T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ *на проміжку* $[-1; 1]$. *Відомо, що цей поліном має 5 коренів на заданому проміжку. Графік цієї функції зображений на рис. 3, а графік функції* $y = |16x^5 - 20x^3 + 5x|$ *на рис. 4.*

Нехай $n = 2000$, $h = 0,001$. *Застосувавши вищезазначений алгоритм знайдемо перші наближення до нулів функції* $x_1 \approx -0,951$ *на проміжку* $[-0,952; -0,95]$, $x_2 \approx -0,588$ *на проміжку* $[-0,589; -0,587]$, $x_3 = 0$ *на проміжку* $[-0,001; 0,001]$, $x_4 \approx 0,588$ *на проміжку* $[0,587; 0,589]$, $x_5 \approx 0,951$ *на проміжку* $[0,95; 0,952]$. *Уточнимо знайдені корені на кожному із проміжків і одержимо* $x_1 \approx -0,95133$, $x_2 \approx -0,58767$, $x_3 = 0$, $x_4 \approx 0,58767$, $x_5 \approx 0,95133$.

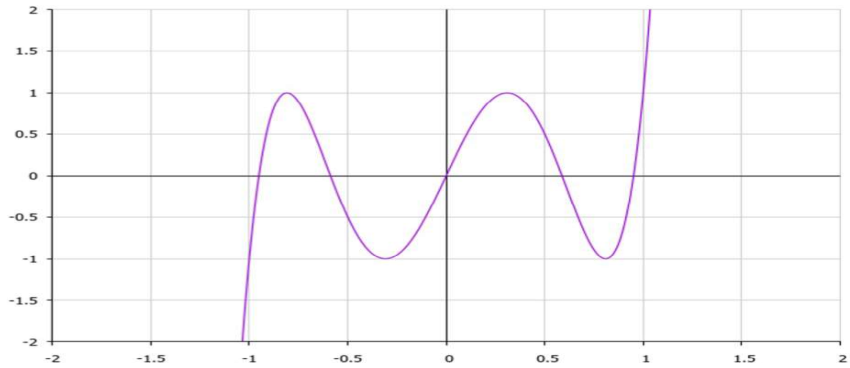

Рис. 3

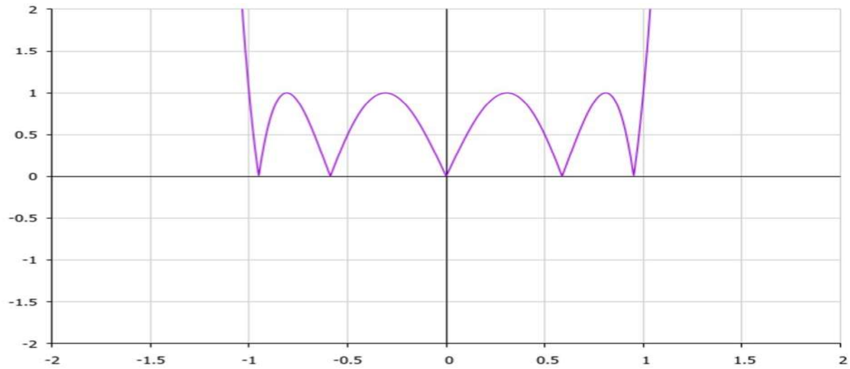

Рис. 4

5. Висновок. У роботі побудовано чисельний метод відшукання нулів будь-якої неперервно диференційованої функції однієї змінної, на заданому проміжку, який використовує властивості апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

1. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. мат. журн.- 1989.- Т.41.- №9. с.1273-1276.
2. *Цегелик Г. Г.*Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г.Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013.- 190с.
3. *Глебена М. І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. дис. на здобуття ступеня канд. фіз.-мат. наук спец. 01.05.02 „Математичне моделювання та обчислювальні методи” / М.І Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23с.

Одержано 07.10.2018