УДК 519.21

О. М. Гопкало (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

Умови обмеженості гауссового випадкового процесу з ймовірністю 1 на $\mathbb{R}^+$ та їх застосування

Conditions of boundedness with probability 1 for Gaussian stochastic processes on $\mathbb{R}^+$ are found in the paper. Application of the conditions is considered.

В роботі знайдено умови обмеженості гауссових випадкових процесів на $\mathbb{R}^+$ з ймовірністю 1 та розглянуто застосування даних умов.

1. Вступ. Нехай (Ω, F, P) — стандартний ймовірнісний простір, S — деяка непорожня параметрична множина, $\xi = (\xi(t), t \in S)$ — випадковий процес, заданий на (Ω, F, P).

Робота присвячена знаходженню умов, за яких $\xi(t)$ — обмежений на $\mathbb{R}^+$ процес з ймовірністю 1, тобто $P(\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\xi(t)| < \infty) = 1, t \in \mathbb{R}^+$.

Ця задача є нетривіальною. Подібним задачам, а саме дослідженню поведінки супремума на нескінченності, присвячено багато робіт, зокрема роботи [3] – [6].

Робота є актуальною, оскільки знайдені результати можна застосовувати для знаходження розв'язків рівнянь математичної фізики.

2. Базові визначення. У цьому розділі наведемо кілька означень та тверджень, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Означення 1 (див. [1]). *Нехай S деяка непорожня множина. Функція $\rho : S * S \to [0, \infty)$ називається псевдометрикою, якщо вона задовольняє наступним умовам:*

1. $\rho(t, s) = \rho(s, t), t, s \in S$;
2. $\rho(t, s) \le \rho(t, v) + \rho(v, s), t, v, s \in S$;
3. якщо $t = s$, то $\rho(t, s) = 0$, але якщо $\rho(t, s) = 0$, то не обов'язково $t = s$.

Таким чином, простір (S, ρ) називається псевдометричним, якщо для нього виконуються всі аксіоми метричного простору за винятком однієї, а саме: з того, що $\rho(s, t) = 0$ не випливає, що $t = s$.

Наприклад, нехай $\xi(t)$, $t \in T$ — процес другого порядку, $\rho(t, s) = (\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2)^{\frac{1}{2}}$, $t, s \in T$. Легко бачити, що всі аксіоми метрики для $\rho(t, s)$ виконуються, але коли $\rho(t, s) = 0$, то $\xi(t) = \xi(s)$ з ймовірністю одиниця, але не обов'язково t дорівнює s. Отже, (T, ρ) — псевдометричний простір.

Тепер нехай (S, ρ) — псевдометричний простір.

Означення 2 (див. напр. [1], [2]). *Систему замкнених куль $\mathbb{B} = \{B\}, B \subset S$, радіуси яких не більші за ε, називають ε–покриттям множини S, якщо $\cup_{B\in\mathbb{B}} B = S$.*

Означення 3 (див.напр. [1], [2]). *Множину $Q \subset S$ називають ε–сіткою в множині S відносно псевдометрики ρ, якщо для будь-якої точки $x \in S$ існує хоч одна точка $y \in Q$, така що $\rho(x, y) \le \varepsilon$.*

Означення 4 (див. [1], [2]). *Якщо існує скінченне ε–покриття множини S, то позначимо $N_\rho(S,\varepsilon)$ число елементів у найменшому ε–покритті цієї множини. Крім того, покладемо $N_\rho(S,\varepsilon) = +\infty$, якщо не існує скінченного ε–покриття множини S. Таку функцію $N_\rho(S,\varepsilon)$ називають метричною масивністю множини S відносно псевдометрики ρ.*

Означення 5 (див. [1]). *Функція*

$$H_\rho(S,\varepsilon) = \begin{cases} \ln N_\rho(S,\varepsilon), \ \text{якщо} \ \ N_\rho(S,\varepsilon) < \infty, \\ +\infty, \ \text{якщо} \ \ N_\rho(S,\varepsilon) = +\infty \end{cases}$$

називаеться метричною ентропією відносно метрики ρ.

Нехай $\xi(x), x \geq 0$ — центрований сепарабельний гауссовий процес, $x \in S$. На S розглянемо псевдометрику $\rho(x,y) = (\mathsf{E}(\xi(x) - \xi(y))^2)^{\frac{1}{2}}$.

Введемо умови:

1. $\varepsilon_0 = \sup_{x\in S}(\mathsf{E}(\xi(x))^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty$.
2. Простір (S,ρ) — сепарабельний та процес $\xi(x)$ — сепарабельний на (S,ρ).

Позначимо $N(\varepsilon) = N_\rho(S,\varepsilon)$, $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$.

Наступна теорема доведена в [1] (ст. 106, завв. 4.3) для субгауссових процесів. Оскільки гауссові процеси є субгауссовими з $\phi^*(x) = \frac{x^2}{2}$ та $\tau(\xi) = \mathsf{E}\xi^2(x)$, то для гауссових процесів теорема має наступний вигляд:

Теорема 1 (див. [1]). *Нехай $X = (X(t), t \in S)$ — деякий сепарабельний гауссовий процес. Якщо виконуються умови 1. – 2., та $I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{H(\varepsilon)} d\varepsilon < +\infty$, де $H(\varepsilon)$ — метрична ентропія множини S відносно ρ, то $\forall \lambda > 0$, $\forall u > 8I(\varepsilon_0)$ має місце нерівність:*

$$\mathsf{P}\{\sup_{t\in S} |X(t)| \geq u\} \leq 2A(u),$$

де

$$A(u) = \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(u - \sqrt{8uI(\varepsilon_0)})^2\}.$$

3. Оцінки розподілу супремума випадкового гауссового процесу на $\mathbb{R}^+$.

Нехай $\xi(x), x \geq 0$ — центрований сепарабельний гауссовий процес такий, що виконуються умови:

A1. $\mathsf{E}\xi(x)\xi(y) = R(x,y)$, $x \in S, y \in S$, де $S = [0,\infty)$.

A2. Нехай $\{B_k; k = 0, 1, \dots\}$ — послідовність розбиттів множини S на підмножини $B_k = [b_k; b_{k+1})$, де $b_{k+1} > b_k, b_0 = 0, b_k \to \infty, k \to \infty$. $H_k(u)$ — метрична ентропія множини B_k відносно псевдометрики $\rho(x,y) = (\mathsf{E}(\xi(x) - \xi(y))^2)^{\frac{1}{2}}$; та $\forall v > 0, k > 0$ виконується умова Дадлі: $\int_0^v \sqrt{H_k(u)} du < \infty$.

Знайдемо умови, за яких

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\geq 0} |\xi(x)| < \infty\} = 1$$

та отримаємо оцінки розподілу випадкової величини $\sup_{x\geq 0} |\xi(x)|$.

Теорема 2. *Нехай $\xi(x), x \geq 0$ — гауссовий процес, для якого виконуються умови A1 та A2, $\rho(x,y) = (\mathsf{E}(\xi(x) - \xi(y))^2)^{\frac{1}{2}}$.*

Тоді при $\varepsilon > 8\max_{k\geq 0} I(\varepsilon_{0k}) = \varepsilon^*$, де $\varepsilon_{0k} = \sup_{t\in B_k}[\mathsf{E}(\xi(t))^2]^{1/2}$; $I(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^v \sqrt{H_k(u)}du, v > 0$, справджується нерівність:

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\in B_k} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2A_k(\varepsilon), \tag{1}$$

де

$$A_k(\varepsilon) = \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon_{0_k}^2}(\varepsilon - \sqrt{8\varepsilon I(\varepsilon_{0k})})^2\}. \tag{2}$$

Якщо при деякому $\hat{\varepsilon} \geq \varepsilon^*$ збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon})$, то при всіх $\varepsilon \geq \hat{\varepsilon}$ збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varepsilon)$ та при $\varepsilon \geq \hat{\varepsilon}$ має місце нерівність:

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\geq 0} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varepsilon)$$

та

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\geq 0} |\xi(x)| < \infty\} = 1.$$

Доведення. Розглянемо послідовність $(b_k) : b_k \to \infty,\ k \to \infty;\ b_0 = 0,\ b_{k+1} > b_k;\ B_k = [b_k, b_{k+1}]$. Тоді

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\geq 0} |\xi(x)| > \varepsilon\} = \mathsf{P}\{\bigcup_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in B_k} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\sup_{x\in B_k} |\xi(x)| > \varepsilon\}. \tag{3}$$

З теореми 1 випливає, що, якщо $\varepsilon_{0k} < \infty$; $I(\varepsilon_{0k}) < \infty$ та якщо $\xi(x)$ — сепарабельний, то:

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\in B_k} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2A_k(\varepsilon) \tag{4}$$

де

$$A_k(\varepsilon) = \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon_{0_k}^2}(\varepsilon - \sqrt{8\varepsilon I(\varepsilon_{0k})})^2\}.$$

при $\varepsilon > 8I(\varepsilon_{0k})$.

Отже, з (3) та (4) випливає, що при $\varepsilon > 8\max_{k\geq 0} I(\varepsilon_{0k})$:

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\geq 0} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2A(\varepsilon),$$

де $A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varepsilon)$.

Доведемо, що $A(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0$. Оскільки $A_k(\varepsilon) < A_k(\hat{\varepsilon})$ при $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$, то з того, що $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon}) < \infty$, випливає, що $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varepsilon) < \infty$. Треба довести, що для будь-якого δ при досить великих ε: $A(\varepsilon) < \delta$.

Нехай $M \in \mathbb{N}$. Тоді

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{M} A_k(\varepsilon) + \sum_{k=M+1}^{\infty} A_k(\varepsilon) \leq \sum_{k=0}^{M} A_k(\varepsilon) + \sum_{k=M+1}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon}).$$

Вибираємо M таке, що $\sum_{k=M+1}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon}) \leq \frac{\delta}{2}$ та C таке, що при $\varepsilon > C,\ k \leq M$: $A_k(\varepsilon) < \frac{\delta}{2(M+1)}$. Тоді

$$A(\varepsilon) \leq \sum_{k=0}^{M} \frac{\delta}{2(M+1)} + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Отже,

$$A(\varepsilon) \to 0, \text{ при } \varepsilon \to \infty,$$

тому ряд $A(\varepsilon)$ збігається при всіх $\varepsilon > \max(C, \hat{\varepsilon})$.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 2, але замість умови A2 виконується умова:*

$$\sup_{t,s \in B_k, |t-s| \leq h} (\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_k(h) \tag{5}$$

де $\sigma_k(h)$ — монотонно зростаюча неперервна функція, $\sigma_k(0) = 0$ та умова

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k}) < \infty, k \geq 0,$$

де

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_{0k}} \sqrt{\ln(1 + \frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{-1}(u)})} du. \tag{6}$$

Тоді при $\varepsilon > 8 \max_{k \geq 0} \hat{I}(\varepsilon_{0k}) = \hat{\varepsilon}^*$ справджується нерівність:

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \in B_k} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2\hat{A}_k(\varepsilon),$$

де

$$\hat{A}_k(\varepsilon) = \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon_{0_k}^2}(\varepsilon - \sqrt{8\varepsilon \hat{I}(\varepsilon_{0k})})^2\}.$$

Якщо при деякому $\hat{\varepsilon} \geq \hat{\varepsilon}^*$ збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\hat{\varepsilon})$, то при всіх $\varepsilon \geq \hat{\varepsilon}$ збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\varepsilon)$ та при $\varepsilon \geq \hat{\varepsilon}$ має місце нерівність:

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \geq 0} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\varepsilon) \tag{7}$$

та

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \geq 0} |\xi(x)| < \infty\} = 1.$$

Доведення. Функція $\sigma_k(h)$ — монотонно зростаюча неперервна функція, $\sigma_k(0) = 0$, залежить від b_k та b_{k+1}. Тоді

$$N_k(u) \leq \frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{-1}(u)} + 1$$

та

$$H_k(u) \leq \ln(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{-1}(u)} + 1). \tag{8}$$

$$\varepsilon_{0k} = \sup_{t \in B_k} [\mathsf{E}(\xi(t))^2]^{1/2},$$

що випливає з умов А1 - А2.

Тоді умова (5) виконується, при $\forall t, s \in B_k: \ |t-s| \leq h$ та

$$I(\varepsilon_{0k}) \leq \hat{I}(\varepsilon_{0k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_{0k}} \sqrt{\ln(1 + \frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{-1}(u)})} du.$$

Тоді з (1) випливає

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \geq 0} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\varepsilon)$$

при $\varepsilon > 8 \max_{k \geq 0} \hat{I}(\varepsilon_{0k})$.

Далі доведення наслідку повторює доведення теореми 2.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови наслідку 1, але замість умови* (5) *виконуються умови:* $\mathsf{E}\xi(x)\xi(y) = R(x,y) = \int_0^{+\infty} f(x,u) f(y,u) dF(u)$, *де* $F(u)$ *— деяка функція розподілу,* $f(x,u), x \geq 0, u \geq 0$ *така вимірна функція, що* $\int_0^{+\infty} (f(x,u))^2 dF(u) < \infty$ *та для якої виконується нерівність* $|f(t,u) - f(s,u)| \leq \hat{\sigma}_k(h) g(u, b_k)$, $\forall t, s \in B_k: \ |t-s| \leq h$ *та* $Z_k = \int_0^{\infty} g(u, b_k) dF(u) < \infty, \ g(u, b_k) > 0$.

Якщо виконується умова:

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k}) < \infty, \quad k \geq 0,$$

де

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_{0k}} \sqrt{\ln(1 + \frac{b_{k+1} - b_k}{2\hat{\sigma}_k^{-1}(\frac{u}{Z_k})})} du.$$

то при $\varepsilon > 8 \max_{k \geq 0} \hat{I}(\varepsilon_{0k}) = \hat{\varepsilon}^*$ *справджується нерівність:*

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \in B_k} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2\hat{A}_k(\varepsilon),$$

де

$$\hat{A}_k(\varepsilon) = \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon_{0_k}^2} (\varepsilon - \sqrt{8\varepsilon \hat{I}(\varepsilon_{0k})})^2\}. \tag{9}$$

Якщо при деякому $\hat{\hat{\varepsilon}} \geq \hat{\varepsilon}^*$ *збігається ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\hat{\hat{\varepsilon}})$, *то при всіх* $\varepsilon \geq \hat{\hat{\varepsilon}}$ *має місце нерівність:*

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \geq 0} |\xi(x)| > \varepsilon\} \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\varepsilon) \tag{10}$$

та

$$\mathsf{P}\{\sup_{x \geq 0} |\xi(x)| < \infty\} = 1.$$

Доведення. Легко бачити, що

$$\varepsilon_{0k} = \sup_{t \in B_k} [\mathsf{E}(\xi(t))^2]^{1/2} = \sup_{t \in B_k} [\int_0^{\infty} f(t,u)^2 dF(u)]^{1/2} = \sup_{t \in B_k} [R(t,t)]^{1/2},$$

що випливає з умов A1 - A2 та умов теореми 3.

$$\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = \mathsf{E}(\xi(t))^2 - 2\mathsf{E}\xi(t)\xi(s) + \mathsf{E}(\xi(s))^2 = R(t,t) - 2R(t,s) + R(s,s) =$$
$$= \int_0^{\infty} (f(t,u)^2 - 2f(t,u)f(s,u) + f(s,u)^2) dF(u) = \int_0^{\infty} (f(t,u) - f(s,u))^2 dF(u).$$

Тоді умова (5) матиме вигляд:

$$\sup_{t,s\in B_k,|t-s|\le h}(\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2)^{\frac{1}{2}} \le \hat{\sigma}_k(h)Z_k \tag{11}$$

де $\hat{\sigma}_k(h)$ — монотонно зростаюча неперервна функція, $\hat{\sigma}_k(0) = 0$; $g(u,b_k) > 0$, $\forall k \ge 0$ та $\sqrt{\int_0^\infty g^2(u,b_k)dF(u)} = Z_k < \infty$ при

$$|f(t,u)-f(s,u)| \le \hat{\sigma}_k(h)g(u,b_k)$$

$\forall t,s \in B_k:\ |t-s| \le h.$

Тоді $\sigma_k(h) = Z_k\hat{\sigma}_k(h)$ та $\sigma_k^{-1}(h) = \hat{\sigma}_k^{-1}(\frac{u}{Z_k})$ та

$$I(\varepsilon_{0k}) \le \hat{I}(\varepsilon_{0k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta\varepsilon_{0k}}\sqrt{\ln(1+\frac{b_{k+1}-b_k}{2\hat{\sigma}_k^{-1}(\frac{u}{Z_k})})}du$$

Тоді з (1) випливає

$$\mathsf{P}\{\sup_{x\ge 0}|\xi(x)| > \varepsilon\} \le 2\sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}_k(\varepsilon_{0k})$$

при $\varepsilon > 8\max_{k\ge 0}\hat{I}(\theta\varepsilon_{0k})$.

Приклад 1. *Нехай в умовах теореми 3 функція розподілу $f(t,u)$ має вигляд: $f(t,u) = \frac{\cos tu}{c(t)}$, причому функцію $c(t)$ виберемо таку, що $c(t)$ – зростаюча, $c(t) \ge 1$; $c(t) \to \infty$; $t \to \infty$ та $|c(t)-c(s)| \le C|t-s|^\alpha$; $\alpha \le 1$; $C = const$.*

Оцінимо $\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2$ на відрізку $[b_k; b_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 &= \int_0^\infty (f(t,u)-f(s,u))^2 dF(u) \le \\ &\le \int_0^\infty \left(\frac{|2\sin u(t-s)|}{c(t)} + \frac{|c(t)-c(s)|}{c(t)c(s)}\right)^2 dF(u).\end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки $|\sin u(t-s)| \le |u(t-s)|^\alpha$; $0 < \alpha \le 1$, то з (12) випливає

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 &\le \int_0^\infty \left(\frac{2|u|^\alpha|t-s|^\alpha}{c(b_k)} + \frac{C|t-s|^\alpha}{c^2(b_k)}\right)^2 dF(u) \le \\ &\le |t-s|^{2\alpha}\int_0^\infty \left(\frac{2|u|^\alpha}{c(b_k)} + \frac{C}{c^2(b_k)}\right)^2 dF(u)\end{aligned} \tag{13}$$

Припустимо, що $\int_0^\infty u^{2\alpha}dF(u) < \infty$.

Отже, отримано, що $|f(t,u)-f(s,u)| \le \hat{\sigma}_k(h)g(u,b_k)$, де $\hat{\sigma}_k(h) = h^\alpha = |t-s|^\alpha$, $g(u,b_k) = \frac{2|u|^\alpha}{c(b_k)} + \frac{C}{c^2(b_k)}$. Звідси маємо:

$$\left(\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2\right)^{\frac{1}{2}} \le h^\alpha\left(\int_0^\infty (\frac{2|u|^\alpha}{c(b_k)} + \frac{C}{c^2(b_k)})^2 dF(u)\right)^{\frac{1}{2}} = h^\alpha Z_k,$$

де $Z_k = \left(\int_0^\infty (g(u,b_k))^2 dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Тоді за теоремою 3 отримаємо: $\sigma_k(h) = Z_k\hat{\sigma}_k(h)$; $\sigma_k^{-1}(x) = (\frac{x}{Z_k})^{1/\alpha}$,

$$\varepsilon_{0k}=\sup_{t\in B_k}[\mathsf{E}(\xi(t))^2]^{1/2}=\sup_{t\in B_k}[\int_0^\infty\frac{\cos^2 tu}{c^2(t)}dF(u)]^{1/2}\le\frac{1}{c(b_k)}\int_0^\infty dF(u)=\frac{F(+\infty)}{c(b_k)}$$

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varepsilon_{0k}}\sqrt{\ln\left(1+\frac{b_{k+1}-b_k}{2(\frac{x}{Z_k^2})^{1/\alpha}}\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varepsilon_{0k}}\sqrt{\ln\left(1+\frac{(b_{k+1}-b_k)(Z_k^2)^{1/\alpha}}{2}\frac{1}{x^{1/\alpha}}\right)}dx$$

Як відомо, $\ln(1+x)\le\frac{x^\beta}{\beta}$; $0<\beta\le 1$ *при* $x>0$. *Тому*

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k})\le\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varepsilon_{0k}}\left[\left(\frac{(b_{k+1}-b_k)Z_k^{2/\alpha}}{2x^{1/\alpha}}\right)^\beta\frac{1}{\beta}\right]^{1/2}dx=$$

$$=\frac{(b_{k+1}-b_k)^{\beta/2}Z_k^{2\beta/2\alpha}}{2\sqrt{\beta}}\int_0^{\varepsilon_{0k}}x^{-\frac{\beta}{2\alpha}}dx.$$

Інтеграл $\int_0^{\varepsilon_{0k}}x^{-\frac{\beta}{2\alpha}}dx$ *– збігається, якщо* $\beta\le 2\alpha$. *Отже, маємо:*

$$\hat{I}(\varepsilon_{0k})\le\frac{(b_{k+1}-b_k)^{\beta/2}Z_k^{2\beta/2\alpha}}{2\sqrt{\beta}}\frac{\varepsilon_{0k}^{1-\beta/2\alpha}}{1-\beta/2\alpha}=R_k\frac{\varepsilon_{0k}^{1-\beta/2\alpha}}{1-\beta/2\alpha},$$

де $R_k=\frac{(b_{k+1}-b_k)^{\beta/2}Z_k^{2\beta/2\alpha}}{2\sqrt{\beta}}$.
Тоді

$$\hat{A}_k(\varepsilon)\le\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{0_k}^2}(\varepsilon-\sqrt{8\varepsilon\hat{I}(\varepsilon_{0k})})^2\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{-\frac{c^2(b_k)}{2F^2(+\infty)}\left(\varepsilon-\sqrt{8\varepsilon R_k*\frac{\varepsilon_{0k}^{1-\beta/2\alpha}}{1-\beta/2\alpha}}\right)^2\right\}.$$

Залишилося довести збіжність ряду $\sum_{k=0}^\infty\hat{A}_k(\varepsilon)$. *Якщо цей ряд збігається, то* $\mathsf{P}\{\sup_{x\ge 0}|\xi(x)|<\infty\}=1$.

Покладемо $\alpha=\beta$. *Тоді*

$$\hat{A}_k(\varepsilon)=\exp\left\{-\frac{c^2(b_k)}{2F^2(+\infty)}\left(\varepsilon-\sqrt{8\varepsilon R_k(\frac{F(+\infty)}{c(b_k)})^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

$$Z_k=\left(\int_0^\infty(\frac{2|u|^\alpha}{c(b_k)}+\frac{C}{c^2(b_k)})^2dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{c(b_k)}\left(\int_0^\infty(2|u|^\alpha+C)^2dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Припустимо, що виконується умова: $\int_0^\infty u^{2\alpha}dF(u)<\infty$.

Покладемо $\left(\int_0^\infty(2|u|^\alpha+C)^2dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}=S$. *Звідси* $Z_k=\frac{S}{c(b_k)}$. *Беремо* $b_k=\exp\{k\}$. *Тоді* R_k *матиме вигляд:*

$$R_k = \frac{(e^{k+1} - e^k)^{\alpha/2} S}{2\sqrt{\alpha} c(e^k)} = \frac{e^{\alpha k/2}(e-1)^{\alpha/2} S}{2\sqrt{\alpha} c(e^k)}$$

$$\hat{A}_k(\varepsilon) = \exp\left\{ -\frac{c^2(e^k)}{2F^2(+\infty)} \left(\varepsilon - \left[8\sqrt{2}\varepsilon \frac{e^{\alpha k/2}(e-1)^{\alpha/2} S}{2\sqrt{\alpha} c(e^k)} \sqrt{\frac{F(+\infty)}{c(e^k)}} \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}$$

Якщо $\frac{e^{\frac{\alpha k}{2}}}{(c(e^k))^{3/2}} \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то, якщо ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c^2(b_k)}{2F^2(+\infty)}\right\}$ *збігається, то, для досить великих* ε, *збігається ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}_k(\varepsilon)$.

Нехай $\exp\left\{-\frac{c^2(b_k)}{2F^2(+\infty)}\right\} = \frac{1}{k^2}$; *тоді*

$$c^2(b_k) = 2\ln k * 2F^2(+\infty);$$

$$c(b_k) = 2F(+\infty)\sqrt{\ln k} \le \hat{\hat{C}}(\ln k)^{1/2}, \text{ де } \hat{\hat{C}} -- \text{деяка константа}$$

$$b_k = \exp\{k\}; e^k = t; c(t) \ge \hat{\hat{C}}(\ln\ln t)^{1/2}.$$

Отже, ми показали, що гауссовий процес $\xi(t)$ *такий, що* $\mathsf{E}\xi(t) = 0$, $\mathsf{E}\xi(t)\xi(s) = \int_0^{\infty} \frac{\cos tu \cos su}{c(t)c(s)} dF(u)$, $t, s \ge 0$ *буде обмежений на* $\mathbb{R}^+$ *з ймовірністю 1, якщо виконуються умови:*

— *для деякого* α, $0 < \alpha < 1 : \int_0^{\infty} u^{2\alpha} dF(u) < \infty$

— $c(t)$ – *така функція, що* $c(t) \ge 1, c(t)$ – *монотонно зростає;* $|c(t) - c(s)| \le C|t-s|^{\alpha}$; $\alpha \le 1$; $C = const$, *та для досить великих* $t : c(t) \ge C(\ln\ln t)^{1/2}$. *Наприклад, враховуючи те, що* $\frac{e^{\frac{\alpha k}{2}}}{(c(e^k))^{3/2}} \to 0$ *при* $k \to \infty$, *ми можемо покласти* $c(t) = t^{\alpha}$ *при* $t > 1$.

Розглянемо задачу Коші на нескінченній прямій:
у фазовій площині

$$\Omega = \{(t,x) | 0 < t < +\infty, -\infty < x < +\infty\}$$

знайти обмежений розв'язок рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x); \\ u(0,x) = \xi(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{14}$$

де $\xi(x)$ — відома, неперервна обмежена на всій осі функція. Вважаємо, що $u(t,x)$ при $t = 0$ неперервна, тобто

$$\lim_{t\to 0, x\to x_0} u(t,x) = \xi(x_0).$$

Застосуємо результати знайдені вище для знаходження розв'язків задачі (14) з випадковими початковими умовами.

Теорема 4. *Нехай* $\xi(x), x \ge 0$ — *центрований гауссовий процес, для якого виконується наступна умова:*

$$\sup_{t\ge 0} |\xi(t)| < \infty$$

з ймовірністю 1.

Тоді

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(v) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{(v-x)^2}{4a^2 t} dv$$

є обмеженим розв'язком задачі Коші (14).

Наслідок 2. *Нехай $\xi(x)$ такий процес, що при $x \geq 0$ для $\xi(x)$ виконуються умови теорем доведених вище, а при $x \leq 0 : \xi(x) = \xi(-x)$. Тоді виконуються умови теореми 4.*

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
2. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича I// Теория вероятностей и математическая статистика – 1984. – № 30 – С. 92–107.
3. *Kozachenko Yu., Slyvka-Tylyshchak A.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_{\phi}(\Omega)$ // Applied Mathematics – 2014. – No. 5 – P. 2318–2333.
4. *Kozachenko Yu., Melnicov A., Mishura Yu.* On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion // Statistics . A Journal of theoretical and applied statistics – 2015. – Vol. 49, No. 1. – P. 35–62.
5. *Kozachenko Yu., Dozzi M., Mishura Yu., Ralchenko K.* Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation // Statistical Inference for Stochastic processes – 2018. – Vol. 21, No. 1. – P.21–52.
6. *Kozachenko Yu., Orsingher E., Sakhno L., Vasylyk O.* Estimates for functional of solution to Higher-Order Heat-Type equation with random initial condition // Journal of statistical physics first online –Sep. 2018. – Vol. 72, No. 6. – P.1641–1662.

Одержано 18.09.2018