УДК 512.53

Ю. В. Жучок (Луганський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ, Україна)

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ВПОРЯДКОВАНИХ ТРІОЇДІВ БІНАРНИМИ ВІДНОШЕННЯМИ

We prove that every ordered trioid is isomorphic to some ordered trioid of binary relations and describe the faithful representations of ordered trioids by reflexive and transitive binary relations.

Доведено, що кожний впорядкований тріоїд є ізоморфним деякому впорядкованому тріоїду бінарних відношень, та описано точні зображення впорядкованих тріоїдів рефлексивними та транзитивними бінарними відношеннями.

1. Вступ. Тріоїди були введені Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко в [1] для вивчення тернарних планарних дерев. Непорожня множина T з трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ називається *тріоїдом*, якщо для всіх $x, y, z \in T$ виконуються умови:

$$(T_1)\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$
$$(T_2)\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$
$$(T_3)\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),$$
$$(T_4)\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z),$$
$$(T_5)\ (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z),$$
$$(T_6)\ (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z),$$
$$(T_7)\ (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z),$$
$$(T_8)\ (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).$$

Триалгебри і тріоїди, які є основою триалгебр, вивчалися в різних роботах (див., напр., [2 – 6]). Поняття тріоїда тісно пов'язано з дімоноїдами і, зокрема, діалгебрами, які відіграють важливу роль при розв'язанні актуальних проблем теорії алгебр Лейбніца та останнім часом досить активно вивчаються [7 – 10]. Нагадаємо, що непорожня множина D з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$ називається *дімоноїдом*, якщо для всіх $x, y, z \in D$ виконуються аксіоми (T_1)–(T_3). Відзначимо, що коли всі операції тріоїда або дімоноїда збігаються, то кожен із них перетворюється в напівгрупу. Якщо збігаються операції $\vdash$ та $\perp$ тріоїда, то він перетворюється в дімоноїд. Таким чином, тріоїди та дімоноїди є узагальненням напівгруп, до того ж, тріоїди є узагальненням дімоноїдів.

Добре відомо, що кожна напівгрупа ізоморфна напівгрупі перетворень деякої множини. Для впорядкованих напівгруп подібний результат був отриманий К. А. Зарецьким [11], де було показано, зокрема, що кожна впорядкована напівгрупа може бути занурена в упорядковану напівгрупу всіх бінарних відношень на деякій множині. Аналоги теореми Келі для напівгруп у класі дімоноїдів та згаданої теореми Зарецького в класі впорядкованих дімоноїдів були отримані в [12] та [13] відповідно.

У цій роботі визначено поняття впорядкованого тріоїда і наведено приклади таких тріоїдів. Доведено, що будь-який впорядкований тріоїд ізоморфний деякому впорядкованому тріоїду бінарних відношень (теорема 1). Крім того, описано зображення впорядкованих тріоїдів рефлексивними та транзитивними бінарними відношеннями (теореми 2 та 3).

2. Упорядковані тріоїди та їх приклади. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд, на якому задане відношення порядку $\leq$, що є стабільним зліва (відпов. справа) відносно кожної з операцій $\dashv, \vdash$ та $\perp$. У цьому випадку алгебраїчну систему $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ називатимемо *впорядкованим зліва* (відпов. *справа*) *тріоїдом.* Алгебраїчну систему $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$, яка є впорядкованим зліва та впорядкованим справа тріоїдом, будемо називати *впорядкованим тріоїдом.*

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ і $(T', \dashv', \vdash', \perp', \leq')$ – довільні впорядковані тріоїди. Відображення $\varphi : T \to T'$ називається *гомоморфізмом упорядкованих тріоїдів*, якщо для будь-яких $x, y \in T$ та $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$ виконуються такі умови:

$$1) \quad (x * y)\varphi = x\varphi *' y\varphi,$$

$$2) \quad x \leq y \Rightarrow x\varphi \leq' y\varphi.$$

Бієктивний гомоморфізм $\varphi : T \to T'$ упорядкованих *тріоїдів* називається *ізоморфізмом*, якщо φ^{-1} – гомоморфізм реляційної системи $(T', \leq')$ в $(T, \leq)$.

Наведемо далі приклади впорядкованих тріоїдів.

(a) Зрозуміло, що будь-який тріоїд може бути розглянутий як тріоїд, упорядкований відношенням рівності. Отже, всі результати, які отримані для впорядкованих тріоїдів, будуть виконуватися також і для звичайних тріоїдів.

(b) Неважко помітити, що коли $(S, \circ, \leq)$ – упорядкована напівгрупа, тоді алгебраїчна система $(S, \circ, \circ, \circ, \leq)$ є впорядкованим тріоїдом.

(c) Дімоноїд $(D, \dashv, \vdash)$ називається *впорядкованим* [13], якщо на ньому визначено відношення порядку $\leq$, стабільне відносно кожної з операцій $\dashv, \vdash$. Будь-який впорядкований дімоноїд $(D, \dashv, \vdash, \leq)$ може бути розглянутий як упорядкований тріоїд $(D, \dashv, \vdash, \vdash, \leq)$.

(d) Нехай $(X, \perp, \leq)$ – довільна впорядкована напівгрупа та $(X, \dashv, \vdash)$ – дімоноїд лівих і правих нулів [14], тобто $(X, \dashv)$ є напівгрупою лівих нулів, а $(X, \vdash)$ – напівгрупою правих нулів.

Твердження 1. *Алгебраїчна система* $(X, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ *є впорядкованим тріоїдом.*

Доведення. Перевіряється безпосередньо.

(e) Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ – довільний тріоїд, $\mathscr{P}(T)$ – множина всіх підмножин з T. Визначимо на множині $\mathscr{P}(T)$ три бінарні операції $\dashv', \vdash'$ і $\perp'$ за правилами:

$$A *' B = \{a * b \mid a \in A,\ b \in B\}, \text{ де } * \in \{\dashv, \vdash, \perp\}.$$

Твердження 2. *Алгебраїчна система* $(\mathscr{P}(T), \dashv', \vdash', \perp', \subseteq)$ *є впорядкованим тріоїдом відносно теоретико-множинного включення* $\subseteq$.

Доведення. Очевидно.

Отриманий тріоїд $(\mathscr{P}(T), \dashv', \vdash', \perp', \subseteq)$ назвемо *впорядкованим глобальним надтріоїдом* тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$.

(f) Нехай N – множина всіх натуральних чисел, $k \in N$ та $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Через $U(I_k)$ позначимо множину всіх непорожніх підмножин множини I_k. Для підмножини $A \subseteq N, A \neq \emptyset$, та $b \in N$ покладемо

$$A + b = \{a + b \,|\, a \in A\}.$$

На множині $P = \bigcup_{k \in N}(\{k\} \times U(I_k))$ визначимо бінарні операції $\dashv, \vdash, \perp$ та бінарне відношення $\preceq$ за правилами:

$$(n, A) \dashv (m, B) = (n + m, A),$$

$$(n, A) \vdash (m, B) = (n + m, B + n),$$

$$(n, A) \perp (m, B) = (n + m, A \cup (B + n)),$$

$$(n, A) \preceq (m, B) \Leftrightarrow n \leq m \,\&\, A \subseteq B,$$

де $\leq$ – звичайне арифметичне відношення порядку на множині N.

Твердження 3. *Алгебраїчна система $(P, \dashv, \vdash, \perp, \preceq)$ є впорядкованим зліва тріоїдом.*

Доведення. З твердження 2.2 [15] випливає, що $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ є тріоїдом. Зрозуміло, що $\preceq$ – відношення порядку на множині P. До того ж, якщо $(n, A) \preceq (m, B)$ і $(k, C) \in P$ – довільне, то

$$(k, C) \dashv (n, A) = (k + n, C) \preceq$$

$$\preceq (k + m, C) = (k, C) \dashv (m, B),$$

$$(k, C) \vdash (n, A) = (k + n, A + k) \preceq$$

$$\preceq (k + m, B + k) = (k, C) \vdash (m, B),$$

$$(k, C) \perp (n, A) = (k + n, C \cup (A + k)) \preceq$$

$$\preceq (k + m, C \cup (B + k)) = (k, C) \perp (m, B).$$

Отже, тріоїд $(P, \dashv, \vdash, \perp, \preceq)$ є упорядкованим зліва.

Твердження доведено.

Відзначимо, що тріоїд $(P, \dashv, \vdash, \perp, \preceq)$ з твердження 3 не є впорядкованим справа. Дійсно, наприклад, для довільного $k \in N$ маємо $(k, I_k) \preceq (k + 1, I_{k+1})$, але $(k, I_k) \vdash (1, I_1) = (k+1, \{k+1\})$ не знаходиться у відношенні $\preceq$ з $(k+1, I_{k+1}) \vdash (1, I_1) = (k + 2, \{k + 2\})$.

3. Зображення впорядкованих тріоїдів бінарними відношеннями. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ – довільний упорядкований тріоїд. Зауважимо, що коли в тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ існує права одиниця відносно операції $\vdash$, або ліва одиниця відносно $\dashv$, тоді всі операції тріоїда збігаються.

Позначимо через T^1 множину T із зовнішньо приєднаним елементом $1 \notin T$ таким, що для всіх $x \in T^1$ маємо $x \dashv 1 = x$. Далі для всіх $x \in T$ покладемо

$$f_x = \{(a, b) \in T \times T^1 \,|\, a \leq x \dashv b\},$$

$$f_1^x = \{(a, b) \in T \times T \,|\, a \leq x \vdash b\},$$

$$f_2^x = \{(a, b) \in T \times T \,|\, a \leq x \perp b\}$$

$$\text{та } F = \{f_x \,|\, x \in T\}.$$

Через $B(X)$ позначається напівгрупа всіх бінарних відношень на множині X з операцією композиції $\circ$.

Лема 1. *У напівгрупі $B(T^1)$ для всіх $x, y \in T$ виконуються рівності:*
(i) $f_x \circ f_y = f_{x \dashv y}$,
(ii) $f_1^x \circ f_y = f_{x \vdash y}$,
(iii) $f_2^x \circ f_y = f_{x \perp y}$.

Доведення. (i) Нехай $(a, b) \in f_x \circ f_y$ для деяких $x, y \in T$. Тоді існує $c \in T$ таке, що $(a, c) \in f_x$ і $(c, b) \in f_y$. Звідси $a \leq x \dashv c$ і $c \leq y \dashv b$. Оскільки $\leq$ є стабільним порядком на T, то $x \dashv c \leq x \dashv (y \dashv b)$ і тому $a \leq x \dashv (y \dashv b) = (x \dashv y) \dashv b$, тобто $(a, b) \in f_{x \dashv y}$. Таким чином, $f_x \circ f_y \subseteq f_{x \dashv y}$.

Припустимо, що $(a, b) \in f_{x \dashv y}$. Тоді $a \leq (x \dashv y) \dashv b = x \dashv c$, де $c = y \dashv b$. Звідси $(a, c) \in f_x$ і $(c, b) \in f_y$, отже $(a, b) \in f_x \circ f_y$ і, як наслідок, $f_{x \dashv y} \subseteq f_x \circ f_y$. А це означає, що $f_x \circ f_y = f_{x \dashv y}$.

(ii) Нехай $(a, b) \in f_1^x \circ f_y$. Тоді $(a, c) \in f_1^x$ і $(c, b) \in f_y$ для деякого $c \in T$. Це означає, що $a \leq x \vdash c$ і $c \leq y \dashv b$. За стабільністю порядку $\leq$ на T маємо $x \vdash c \leq x \vdash (y \dashv b)$. За аксіомою тріоїда (T_2) отримуємо

$$x \vdash (y \dashv b) = (x \vdash y) \dashv b,$$

тому $a \leq (x \vdash y) \dashv b$, тобто $(a, b) \in f_{x \vdash y}$. Таким чином, $f_1^x \circ f_y \subseteq f_{x \vdash y}$. Обернене включення можна довести так само як в (i).

(iii) Доводиться аналогічно (ii).

Лему доведено.

Лема 2. *Для всіх $x, y \in T$ виконуються такі твердження:*
(i) $x \leq y$ тоді й лише тоді, коли $f_x \subseteq f_y$;
(ii) $f_i^x \subseteq f_i^y$ для всіх $i \in \{1, 2\}$, якщо $x \leq y$.

Доведення. (i) Нехай $f_x, f_y \in F$ такі, що $f_x \subseteq f_y$. Оскільки $(x, 1) \in f_x$, то $x \leq y$. Навпаки, нехай $x \leq y$ для деяких $x, y \in T$. За стабільністю $\leq$ маємо $x \dashv b \leq y \dashv b$ для всіх $b \in T$, до того ж, очевидно, $x \dashv 1 \leq y \dashv 1$. Якщо $(a, b) \in f_x$, то $a \leq x \dashv b$, що разом з $x \dashv b \leq y \dashv b$ для всіх $b \in T^1$ дає $a \leq y \dashv b$. Таким чином, $(a, b) \in f_y$ і, отже, $f_x \subseteq f_y$.

(ii) Аналогічно тому як в доведенні (i) можна показати, що для всіх $x, y \in T$ з умови $x \leq y$ випливають включення $f_i^x \subseteq f_i^y$, $i \in \{1, 2\}$.

Лему доведено.

Визначимо на множині F дві бінарні операції $\circ_2$ і $\circ_3$ за правилами:

$$f_x \circ_2 f_y = f_1^x \circ f_y,$$

$$f_x \circ_3 f_y = f_2^x \circ f_y.$$

Згідно з лемою 1 отримуємо, що

$$f_x \circ_2 f_y = f_{x \vdash y}, \ \ f_x \circ_3 f_y = f_{x \perp y},$$

тому операції $\circ_2$ і $\circ_3$ є коректно визначеними на F.

Наступна теорема показує, що кожний упорядкований тріоїд може бути точно зображений як упорядкований тріоїд, який складається з деяких бінарних відношень.

Теорема 1. *Алгебраїчна система $(F, \circ, \circ_2, \circ_3, \subseteq)$ є впорядкованим тріоїдом, ізоморфним упорядкованому тріоїду $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$.*

Доведення. З умови (i) леми 1 випливає, що операція композиції $\circ$ є асоціативною на множині F. Використовуючи твердження (i)–(iii) леми 1 та визначення тріоїда, для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$(f_x \circ_2 f_y) \circ_2 f_z = f_{x \vdash y} \circ_2 f_z = f_{(x \vdash y) \vdash z} =$$

$$= f_{x \vdash (y \vdash z)} = f_x \circ_2 (f_y \circ_2 f_z),$$

$$(f_x \circ_3 f_y) \circ f_z = f_{x \perp y} \circ f_z = f_{(x \perp y) \dashv z} =$$

$$= f_{x \perp (y \dashv z)} = f_x \circ_3 (f_y \circ f_z),$$

$$(f_x \circ_3 f_y) \circ_2 f_z = f_{x \perp y} \circ_2 f_z = f_{(x \perp y) \vdash z} =$$

$$= f_{x \vdash (y \vdash z)} = f_x \circ_2 (f_y \circ_2 f_z).$$

Отже, операція $\circ_2$ є асоціативною і справджуються аксіоми тріоїда (T_5) і (T_8). Зрозуміло також, що в $(F, \circ, \circ_2, \circ_3, \subseteq)$ виконуватимуться й усі інші аксіоми тріоїда.

Відношення порядку $\subseteq$ на множині F, очевидно, є стабільним відносно операції композиції $\circ$. Покажемо, що включення $\subseteq$ також стабільне відносно операцій $\circ_2$ і $\circ_3$. Нехай $f_x \subseteq f_y$ для деяких $x, y \in T$ і $f_z \in F$. Тоді

$$f_z \circ_2 f_x = f_1^z \circ f_x \subseteq f_1^z \circ f_y = f_z \circ_2 f_y,$$

$$f_z \circ_3 f_x = f_2^z \circ f_x \subseteq f_2^z \circ f_y = f_z \circ_3 f_y.$$

За лемою 2, (i) включення $f_x \subseteq f_y$ дає $x \leq y$, звідки, користуючись умовою (ii) тієї ж леми, отримуємо включення $f_i^x \subseteq f_i^y$, $i \in \{1, 2\}$, отже,

$$f_x \circ_2 f_z = f_1^x \circ f_z \subseteq f_1^y \circ f_z = f_y \circ_2 f_z,$$

$$f_x \circ_3 f_z = f_2^x \circ f_z \subseteq f_2^y \circ f_z = f_y \circ_3 f_z.$$

Таким чином, тріоїд $(F, \circ, \circ_2, \circ_3, \subseteq)$ є впорядкованим відносно теоретико-множинного включення $\subseteq$.

Визначимо далі відображення між упорядкованими тріоїдами $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ та $(F, \circ, \circ_2, \circ_3, \subseteq)$ у такий спосіб:

$$\eta : T \to F : x \mapsto f_x.$$

Зрозуміло, що η є сюр'єкцією за побудовою. Припустимо, що існують $u, v \in T$, для яких $u\eta = v\eta$. За твердженням (i) леми 2 з включення $f_u \subseteq f_v$ випливає $u \leq v$, а з оберненого включення $f_v \subseteq f_u$ – умова $v \leq u$, звідки за антисиметричністю $\leq$ отримуємо $u = v$. Отже, η – ін'єкція.

Візьмемо довільні $x, y \in T$. Користуючись лемою 1, отримуємо

$$(x \dashv y)\eta = f_{x \dashv y} = f_x \circ f_y = x\eta \circ y\eta,$$

$$(x \vdash y)\eta = f_{x \vdash y} = f_1^x \circ f_y = f_x \circ_2 f_y = x\eta \circ_2 y\eta,$$

$$(x \perp y)\eta = f_{x \perp y} = f_2^x \circ f_y = f_x \circ_3 f_y = x\eta \circ_3 y\eta,$$

отже, η – гомоморфізм тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ на $(F, \circ, \circ_2, \circ_3)$.

Нарешті, за твердженням (i) леми 2 умова $x \leq y$ матиме місце тоді й лише тоді, коли $x\eta \subseteq y\eta$ для всіх $x, y \in T$.

Теорему доведено.

Відзначимо, що з теореми 1 випливає теорема про точне зображення будь-якого впорядкованого дімоноїда бінарними відношеннями [13, теорема 4.1], а також теорема К. А. Зарецького [11, теорема п. 5] про зображення впорядкованих напівгруп бінарними відношеннями.

Слід відмітити також, що бінарні відношення $f_x, x \in T$, з теореми 1 не зобов'язані бути функціональними, тобто вони не є перетвореннями в загальному випадку. Наприклад, якщо $(L, \cdot)$ – напівгрупа лівих нулів і $|L| \geq 2$, то для впорядкованого тріоїда $(L, \cdot, \cdot, \cdot, i_L)$, де $i_L = \{(x, x) | x \in L\}$, усі відношення $f_x, x \in L$, не є функціональними. Отже, опис зображень довільних тріоїдів перетвореннями деякої множини представляє окремий інтерес.

Нехай $B(X)$ – напівгрупа всіх бінарних відношень на множині X з операцією композиції $\circ$, T – непорожня підмножина з $B(X)$ та $*_1$, $*_2$ – бінарні операції на T, такі що алгебраїчна система $(T, \circ, *_1, *_2, \subseteq)$ є впорядкованим тріоїдом. У цьому випадку $(T, \circ, *_1, *_2, \subseteq)$ будемо називати *впорядкованим тріоїдом бінарних відношень* на множині X.

Упорядкований тріоїд бінарних відношень на множині X, в якого кожне відношення є рефлексивним, будемо називати *впорядкованим тріоїдом бінарних рефлексивних відношень*.

Теорема 2. *Довільний упорядкований тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ є ізоморфним деякому впорядкованому тріоїду бінарних рефлексивних відношень тоді й лише тоді, коли для всіх $x, y \in T$*

$$x \leq x \dashv y \ \text{ i } \ y \leq x \dashv y.$$

Доведення. Нехай упорядкований тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ ізоморфний деякому впорядкованому тріоїду $(R, \circ, *_1, *_2, \subseteq)$ бінарних рефлексивних відношень на множині X. Очевидно, що тотожнє відношення $i_X = \{(x, x) | x \in X\}$ міститься в кожному відношенні з R, тому за стабільністю порядку $\subseteq$ матимемо $\alpha \subseteq \alpha \circ \beta$ і $\beta \subseteq \alpha \circ \beta$ для всіх $\alpha, \beta \in R$. Оскільки $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ і $(R, \circ, *_1, *_2, \subseteq)$ ізоморфні, то $x \leq x \dashv y$ і $y \leq x \dashv y$ при будь-яких $x, y \in T$.

Навпаки, нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ – упорядкований тріоїд, в якому $x \leq x \dashv y$ і $y \leq x \dashv y$ для всіх $x, y \in T$. Позначимо через T^1 множину T із зовнішньо приєднаним елементом $1 \notin T$ таким, що $x \dashv 1 = x$ для всіх $x \in T^1$, та покладемо

$$\leq_1 = \leq \cup \{(1, x) \,|\, x \in T^1\}.$$

Зрозуміло, що $\leq_1$ є відношенням порядку на T^1. Для всіх $x \in T$ нехай

$$g_x = \{(a, b) \in T^1 \times T^1 \,|\, a \leq_1 x \dashv b\},$$

$$g_1^x = \{(a, b) \in T^1 \times T \,|\, a \leq_1 x \vdash b\},$$

$$g_2^x = \{(a, b) \in T^1 \times T \,|\, a \leq_1 x \perp b\}.$$

Визначимо на множині $G = \{g_x \,|\, x \in T\}$ дві операції $\circ'$, $\circ''$ таким чином:

$$g_x \circ' g_y = g_1^x \circ g_y, \ \ g_x \circ'' g_y = g_2^x \circ g_y.$$

Подібно як у теоремі 1 можна показати, що відображення $g : x \mapsto g_x$ є ізоморфізмом упорядкованого тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ на $(G, \circ, \circ', \circ'', \subseteq)$.

Крім того, $(y, y) \in g_x$ для всіх $x, y \in T$, оскільки $y \leq x \dashv y$ за припущенням. Умова $1 \leq_1 x$ для всіх $x \in T^1$ означає, що $(1, 1) \in g_x$ для всіх $x \in T$. Таким чином, всі відношення з G є рефлексивними.

Теорему доведено.

На відміну від рефлексивних відношень множина всіх бінарних транзитивних відношень на множині X не утворює піднапівгрупу в $B(X)$. Разом з тим існують піднапівгрупи напівгрупи $B(X)$, що складаються лише з транзитивних відношень.

Упорядкований тріоїд бінарних відношень на множині X, в якого кожне відношення є транзитивним, будемо називати *впорядкованим тріоїдом бінарних транзитивних відношень.*

Теорема 3. *Довільний упорядкований тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ є ізоморфним деякому впорядкованому тріоїду бінарних транзитивних відношень тоді й лише тоді, коли $x \dashv x \leq x$ для всіх $x \in T$.*

Доведення. Нехай упорядкований тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ ізоморфний деякому впорядкованому тріоїду $(H, \circ, *_1, *_2, \subseteq)$ бінарних транзитивних відношень на множині X. Зокрема, $(T, \dashv, \leq)$ і $(H, \circ, \subseteq)$ ізоморфні як упорядковані напівгрупи. З [11, теорема п. 6] одразу випливає, що $x \dashv x \leq x$ для всіх $x \in T$.

Навпаки, припустимо, що $x \dashv x \leq x$ для кожного елемента x впорядкованого тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$. Згідно з теоремою 1 $(T, \dashv, \vdash, \perp, \leq)$ і $(F, \circ, \circ_2, \circ_3, \subseteq)$ є ізоморфними відносно $f : x \mapsto f_x$. Користуючись тим, що f є ізоморфізмом, для всіх $x \in T$ отримуємо

$$x \dashv x \leq x \Leftrightarrow (x \dashv x)f \subseteq xf \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf \circ xf \subseteq xf.$$

Отже, всі бінарні відношення з F є транзитивними, що й завершує доведення цього твердження.

Теорему доведено.

Публікація містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом F83/43909.

1. Loday J.-L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes // Contemporary Mathematics. – 2004. – **346**. – P. 369–398.
2. Bagherzadeh F., Bremner M., Madariaga S. Jordan trialgebras and post-Jordan algebras // Journal of Algebra. – 2017. – **486**. – P. 360–395.
3. NovelliJ.-C., Thibon J.-Y. Polynomial realizations of some trialgebras // 18th Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. – 2006. – P. 243–254.
4. Zhuchok A. V. Trioids // Asian-European Journal of Mathematics. – 2015. – **8**, no. 4. – 1550089 (23 pages). DOI:10.1142/S1793557115500898.
5. Жучок Ю. В. Об определимости свободных триоидов полугруппами эндоморфизмов // Доповіді НАН України. – 2015. – **4**. – С. 7–11.
6. Zhuchok Yuliia V. Free rectangular tribands // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. – 2015. – **78**, no. 2. – P. 61–73.
7. Bremner M., Peresi L., Sanchez-Ortega J. Malcev dialgebras // Linear and Multilinear Algebra. – 2013. – **60**, no. 10. – P. 1125–1141.
8. Salazar-Diaz O. P., Velasquez R., Wills-Toro L. A. Construction of dialgebras through bimodules over algebras // Linear and Multilinear Algebra. – 2016. – **64**, no. 10. – P. 1980–2001.

9. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids // Communications in Algebra. – 2017. – **45**, no. 4. – P. 1639–1656. DOI: 10.1080/00927872.2016.1222404.
10. Zhuchok Yu. V. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free abelian diband // Algebra and Discrete Mathematics. – 2018. – **25**, no. 2. – P. 322–332.
11. Зарецкий К. А. Представления упорядоченных полугрупп бинарными отношениями // Изв. ВУЗов. Матем. – 1959. – **6**. – С. 48–50.
12. Zhuchok A. V. Dimonoids // Algebra and Logic. – 2011. – **50**, no. 4. – P. 323–340.
13. Zhuchok Yu. V. Representations of ordered dimonoids by binary relations // Asian-European Journal of Mathematics. – 2014. – **7**, no. 1. – 1450006 (13 pages). DOI:10.1142/S1793557114500065.
14. Zhuchok A. V. Free rectangular dibands and free dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2011. – **11**, no. 2. – P. 92–111.
15. Zhuchok Yu. V. The endomorphism monoid of a free troid of rank 1 // Algebra Universalis. – 2016. – **76**, no. 3. – P. 355–366.

Одержано 15.10.2018