УДК 519.21

М. М. Капустей, П. В. Слюсарчук (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ В ТЕРМІНАХ УСЕРЕДНЕНИХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem are generalized for sequences series random variables in the term of middle pseudomoments.

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин в термінах усереднених псевдомоментів.

1. Вступ. У роботі [1] одержано узагальнення нерівності Беррі–Ессена із використанням різного вигляду псевдомоментів, пізніше, трохи в іншій формі, цей результат був включений у монографію [2]. Завдяки роботі [1] псевдомоменти набули широкого застосування у граничних теоремах. У роботі [3] розглядаються умови, при виконанні яких, швидкість збіжності буде вищою, ніж у нерівності Беррі–Ессена. Псевдомоменти знайшли застосування до оцінки швидкості збіжності цін опціонів [4]. У роботах [5] і [6] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [1] для різнорозподілених випадкових величин. У даній роботі ми узагальнюємо результати роботи [1] на послідовність серій незалежних в кожній серії різнорозподілених випадкових величин, при цьому узагальнюються результати робіт [5] і [6].

2. Основні результати. Розглянемо послідовність серій $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями $M\xi_{ni} = 0$, дисперсіями $D\xi_{ni} = \sigma_{ni}^2$, $\sigma_{ni} > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{ni}^2 = 1$, $\overline{\sigma}_n = \max\{\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nn}\}$. Позначимо: $F_{ni}(x)$ – функція розподілу ξ_{ni}, $f_{ni}(t)$ – характеристична функція ξ_{ni}, $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ – функція розподілу S_n, $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$.

Теорема. *Нехай $\overline{\sigma}_n^2 \le \frac{3}{4}$ при $n \ge 2$, $2 < r \le 3$ і для деякого $s \in [0; r]$ існують величини $\theta_{nk}(s,r)$ такі, що для всіх $t \in R$ і $k = 1, \dots, n$ виконуються нерівності*

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \le \theta_{nk}(s,r) \min(|t|^s \sigma_{nk}^s;\, d(r)|t|^r \sigma_{nk}^r), \qquad (1)$$

де стала $d(r) \in (0; 1)$.

Тоді існують сталі C_1, C_2, які залежать тільки від s і r, що для всіх $n \ge 2$ справедлива нерівність

$$\rho_n \le C_1 \max\left\{ \overline{\sigma}_n^{r-2} \overline{\theta}_n(s,r); \overline{\sigma}_n \left(\overline{\theta}_n(s,r) \right)^p \right\}, \qquad (2)$$

де $\overline{\theta}_n(s,r) = \overline{\sigma}_n^{2-s} \sum\limits_{k=1}^{n} \theta_{nk}(s,r) \sigma_{nk}^s$, $p = \min\left\{1; \overline{\sigma}_n^{-2}(sn+1)^{-1}\right\}$, а при $s > 0$

$$\rho_1 \le C_2 \left(1 + \frac{1}{s} \right) \max\left\{ \theta_{11}(s,r); (\theta_{11}(s,r))^{\frac{1}{s+1}} \right\}. \qquad (3)$$

Доведення. При доведенні теореми будемо використовувати скорочені позначення: $\theta_{nk}(s,r)=\theta_{nk}(s)$, $\overline{\theta}_n(s,r)=\overline{\theta}_n(s)$. У нерівності ([7], стор. 299)

$$|F(x)-G(x)|\le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T |f(t)-g(t)|\frac{dt}{t}+\frac{24\sup\limits_x|G'(x)|}{\pi T}$$

покладемо $F(x)=\Phi_n(x)$, $G(x)=\Phi(x)$, $f(t)=\prod\limits_{k=1}^n f_{nk}(t)$, $g(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Тоді

$$\rho_n\le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \tag{4}$$

Із нерівності

$$\left|\prod_{i=1}^n a_i-\prod_{i=1}^n b_i\right|\le\sum_{i=1}^n|a_i-b_i|\left(\prod_{k=1}^{i-1}|b_k|\right)\left(\prod_{k=i+1}^n|a_k|\right)$$

і умови (1) теореми

$$\left|\prod_{k=1}^n f_{nk}(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|=\left|\prod_{i=1}^n f_{ni}(t)-\prod_{i=1}^n e^{-\frac{t^2\sigma_{ni}^2}{2}}\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(t)\prod_{k=1}^{i-1}e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\prod_{k=i+1}^n|f_{nk}(t)|\le d(r)|t|^r\sum_{i=1}^n\sigma_{ni}^r\theta_{ni}(s)\psi_{ni}(t), \tag{5}$$

де $\psi_{ni}(t)=\prod\limits_{k=1}^{i-1}e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\prod\limits_{k=i+1}^n|f_{nk}(t)|$.

Нехай $n\ge 2$, $c\in(0;e^{-9n\overline{\sigma}_n^2}]$ – довільна стала. Покладемо $T_n^{(1)}=\frac{1}{\overline{\sigma}_n}\sqrt{-2\ln\overline{\theta}_n(s)}$, якщо $\overline{\sigma}_n(s)\le c$, і $T_n^{(2)}=\frac{1}{\overline{\sigma}_n}\left(\frac{c}{\overline{\theta}_n(s)}\right)^{\frac{1}{r-2}}$, якщо $\overline{\theta}_n(s)>c$. Будемо використовувати нерівність:

$$|f_{nk}(t)|=\left|f_{nk}(t)-e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}+e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\right|\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}+\omega_{nk}(t). \tag{6}$$

Нехай $n\ge 2$, $\overline{\theta}_n(s)>c$ і $|t|\le T_n^{(2)}$. Із (6) і умови (1) теореми

$$|f_{nk}(t)|\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}d(r)|t|^r\sigma_{nk}^r\theta_{nk}(s)\right)\le$$

$$\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\left(1+e^{\frac{\left(T_n^{(2)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{2}}(T_n^{(2)})^{r-2}d(r)t^2\sigma_{nk}^r\theta_{nk}(s)\right)\le$$

$$\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\left(1+t^2\sqrt{e}d(r)\frac{c}{\overline{\theta}_n(s)}\overline{\sigma}_n^{2-s}\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right).$$

Тоді

$$\psi_{ni}(t) = \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} |f_{nk}(t)| \le$$

$$\le \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + t^2\sqrt{e}d(r)\frac{c}{\overline{\theta}_n(s)}\overline{\sigma}_n^{2-s}\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right) \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1-\sigma_{ni}^2) + t^2\sqrt{e}d(r)\frac{c}{\overline{\theta}_n(s)}\overline{\sigma}_n^{2-s}\sum_{k=i+1}^{n}\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1-\sigma_{ni}^2) + t^2\sqrt{e}d(r)c\right\} \le e^{-c_2t^2}, \tag{7}$$

де $c_2 = \frac{1}{8} - \sqrt{e}d(r)c > 0$.

Із (5) і (7) при $\overline{\theta}_n(s) > c$, $|t| \le T_n^{(2)}$ і $n \ge 2$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le d(r)|t|^r \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ni}^r\theta_{ni}(s)e^{-c_2t^2} \le \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)d(r)|t|^r e^{-c_2t^2}. \tag{8}$$

Нехай $\overline{\theta}_n(s) > c$ і $n \ge 2$. Покладемо у (4) $T = T_n^{(2)}$. Будемо вважати, що $\frac{1}{T_n^{(2)}} \le \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)$. Оскільки у протилежному випадку $\frac{1}{T_n^{(2)}} > \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)$, $\sigma_n\left(\frac{\overline{\theta}_n(s)}{c}\right)^{\frac{1}{r-2}} > \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)$, справедлива нерівність $\overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)c^{\frac{1}{r-3}}>1$. Тоді $\rho_n = \sup_x|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le 1$, то $\rho_n \le 1 < \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)c^{\frac{1}{r-3}}$ і нерівність (2) виконується.

Враховуючи наведене припущення $\frac{1}{T_n^{(2)}} \le \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)$, із (4) і (8)

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^{T_n^{(2)}}\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_n^{(2)}} \le$$

$$\le \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)d(r)\frac{2}{\pi}\int_0^{T_n^{(2)}} t^{r-1}e^{-c_2t^2}dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s) \le C_3\overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s),$$

де надалі C_k – сталі, що залежать тільки від c і s.

У випадку $\overline{\theta}_n(s) > c$ нерівність (2) теореми доведена.

Нехай $\overline{\theta}_n(s) \le c$, $n \ge 2$.

Із умови (1) теореми і (6) при $|t| \le T_n^{(1)}$

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(1 + e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}d(r)|t|^r\sigma_{nk}^r\theta_{nk}(s)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(1 + e^{\frac{\left(T_n^{(1)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(T_n^{(1)}\right)^{r-2}d(r)t^2\sigma_{nk}^r\theta_{nk}(s)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}}\left(1 + d(r)t^2\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\ln\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{r-2}{2}}\overline{\sigma}_n^{2-s}\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right).$$

Тоді, із умови $\overline{\sigma}_n^2 \le \frac{3}{4}$ при $n \ge 2$,

$$\psi_{ni}(t) \le \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left(1 + d(r)t^2\sqrt{\frac{\left(-2\ln\overline{\theta}_n(s)\right)^{r-2}}{\overline{\theta}_n(s)}}\,\overline{\sigma}_n^{2-s}\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right) \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{t^2}{4}\left(1-\sigma_{ni}^2\right) + d(r)t^2\sqrt{\frac{\left(-2\ln\overline{\theta}_n(s)\right)^{r-2}}{\overline{\theta}_n(s)}}\,\overline{\sigma}_n^{2-s}\sum_{k=i+1}^{n}\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{t^2}{4}\left(1-\sigma_{ni}^2\right) + d(r)t^2\sqrt{\overline{\theta}_n(s)\left(-2\ln\overline{\theta}_n(s)\right)^{r-2}}\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-t^2\left(\frac{1}{16} - d(r)\left(-2\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{r-2}}\ln\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{r-2}{2}}\right)\right\}.$$

Оскільки функція $x^{\frac{1}{r-2}}\ln x$ є спадною при $x\in(0;e^{2-r})$, а $\overline{\theta}_n(s)\le c\le e^{-9n\overline{\sigma}_n^2}<e^{2-r}$, то

$$\psi_{ni}(t) \le \exp\left\{-t^2\left(\frac{1}{16} - d(r)\left(-2c^{\frac{1}{r-2}}\ln c\right)^{\frac{r-2}{2}}\right)\right\} = e^{-c_1t^2}, \tag{9}$$

де $c_1 = \frac{1}{16} - d(r)\sqrt{c(-2\ln c)^{r-2}} > 0$.

Із (5) і (9) при $\overline{\theta}_n(s) \le c$, $|t| \le T_n^{(1)}$ і $n \ge 2$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \le d(r)|t|^r e^{-c_1t^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ni}^r\theta_{ni}(s) \le \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)d(r)|t|^r e^{-c_1t^2}. \tag{10}$$

Покладемо у (4) $T = \frac{c}{\overline{\sigma}_n}\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-p}$, $T' = \min\left\{T; T_n^{(1)}\right\}$. Тоді із (4)

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,T} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^{T'} \left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int_{T'}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t)\right|\frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int_{T'}^{T} e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,c}\,\overline{\sigma}_n\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,c}\,\overline{\sigma}_n\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p. \tag{11}$$

Оскільки $T' \le T_n^{(1)}$, то із (10)

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{T'}\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|\frac{dt}{t} \le \overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s)d(r)\frac{2}{\pi}\int_0^{T'} t^{r-2}e^{-c_1t^2}dt \le C_4\overline{\sigma}_n^{r-2}\overline{\theta}_n(s). \tag{12}$$

Із (1) і (6) при $\overline{\theta}_n(s) \le c$, $|t| > T_n^{(1)} = \frac{1}{\overline{\sigma}_n}\sqrt{-2\ln\overline{\theta}_n(s)}$

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t)\right| \le \prod_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t)\right) \le \prod_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{\left(T_n^{(1)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{2}} + |t|^s\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s)\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2}} + |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right) =$$

$$= \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2}} |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right)$$

і, використавши нерівність $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^n$, одержуємо

$$\left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) \right| \leq \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\overline{\sigma}_n^2}} |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right)^n \leq$$

$$\leq \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \left(1 + |t|^s \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right)^n =$$

$$= \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \left(1 + \overline{\sigma}_n^{s-2} |t|^s \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \left(1 + \overline{\sigma}_n^s |t|^s\right)^n .$$

Оскільки $\overline{\theta}_n(s) \leq c \leq e^{-9n\overline{\sigma}_n^2} \leq e^{-9}$ і $|t| > T_n^{(1)}$, то

$$|t|\overline{\sigma}_n > \overline{\sigma}_n T_n^{(1)} = \sqrt{-2\ln \theta_n(s)} \geq \sqrt{-2\ln c} \geq \sqrt{18}.$$

Тому при $|t| > T_n^{(1)}$

$$\left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) \right| \leq \left(1 + 18^{-\frac{s}{2}}\right)^n \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \left(\overline{\sigma}_n^s |t|^s\right)^n \leq 2^n \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \left(|t|\overline{\sigma}_n\right)^{sn} . \tag{13}$$

Будемо вважати, що $T' = T_n^{(1)}$, бо інакше $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, і справедливість нерівності (2) випливає із (11), (12). Із (13)

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{T'}^{T} \left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2^{n+1}}{n} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \overline{\sigma}_n^{sn} \int_{T_n^{(1)}}^{T} t^{sn-1} dt. \tag{14}$$

Нехай $s \geq \frac{1}{6n\overline{\sigma}_n^2}$. Оскільки $\overline{\theta}_n(s) \leq c$, $\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2} - spn \geq p$, то $c^s \leq e^{-\frac{3}{2}}$ і при $n \geq 2$

$$I_2 \leq \frac{2^{n+1}}{\pi sn} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \overline{\sigma}_n^{sn} T^{sn} = \frac{2^{n+1}}{\pi sn} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2} - spn} c^{sn} \leq$$

$$\leq \frac{12}{\pi} \overline{\sigma}_n^2 \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p (2c^s)^n \leq \overline{\sigma}_n \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^p \frac{24\sqrt{3}}{\pi e^3}. \tag{15}$$

Нехай $s < \frac{1}{6n\overline{\sigma}_n^2}$, $n \geq 2$, $\overline{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$. Із цих умов випливає, що

$$\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2(sn+1)} \geq \frac{1}{\overline{\sigma}_n^2 \left(\frac{1}{6\overline{\sigma}_n^2} + 1 \right)} \geq \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{3}{4}} > 1.$$

Тоді $p = 1$ і $\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2} - sn > \frac{1}{\overline{\sigma}_n^2} - \frac{1}{6\overline{\sigma}_n^2} \geq \frac{10}{9}$. Тому із (14) (враховуємо, що $\overline{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$)

$$I_2 \leq \frac{2^{n+1}}{\pi} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \overline{\sigma}_n^{sn} \int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} t^{sn-\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} dt \leq$$

$$\leq \frac{2^{n+1}}{\pi} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \overline{\sigma}_n^{sn} \left(T_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{9}} T^{sn+\frac{1}{9}} \frac{1}{sn+\frac{1}{9}} \leq$$

$$\leq \frac{2^n 18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}-sn-\frac{1}{9}} c^{sn+\frac{1}{9}} \leq \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} c^{-1} \frac{1}{\overline{\sigma}_n} \left(2^{n\overline{\sigma}_n^2 c}\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \leq$$

$$\leq \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} c^{-1} \sqrt{n} \left(2e^{-9}\right)^n \leq \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{1}{\pi} 18^{1-\frac{1}{18}} c^{-1} \sqrt{2} \left(2e^{-9}\right)^2. \tag{16}$$

Враховуючи, що $\overline{\theta}_n(s) \leq c$, $\overline{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$ і $\overline{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ при $n \geq 2$, одержимо

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \left(T_n^{(1)}\right)^{-2} e^{-\frac{1}{2}\left(T_n^{(1)}\right)^2} = \frac{2}{\pi} \left(T_n^{(1)}\right)^{-2} \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{9\pi} \overline{\sigma}_n^2 \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2}} \leq \frac{1}{9\pi} \overline{\sigma}_n^2 \left(\overline{\theta}_n(s)\right)^{\frac{4}{3}} \leq \overline{\sigma}_n \overline{\theta}_n(s) \frac{1}{9\pi} c^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

У випадку $n \geq 2$, $\overline{\theta}_n(s) \leq c$ нерівність (2) теореми випливає із (11), (12), (14)—(17).

Нехай $n = 1$. Тоді $\overline{\sigma}_n^2 = 1$, $\overline{\theta}_1(s) = \theta_{11}(s)$. Якщо $\theta_{11}(s) > c$, то $\rho_1 \leq 1 < \frac{1}{c}\theta_{11}(s)$. Якщо $\theta_{11}(s) \leq c$ і $s > 0$, то $p = \frac{1}{s+1}$. Із (4), умови (1) теореми і визначення T

$$\rho_1 \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T \left| f_{11}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\, T} \leq \theta_{11}(s) \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T t^{s-1} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\, T} =$$

$$= \theta_{11}(s) \frac{2}{\pi s} T^s + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\, T} = \frac{2c^s}{\pi s} \left(\theta_{11}(s)\right)^{1-sp} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\, c} \left(\theta_{11}(s)\right)^p \leq C_7 \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(\theta_{11}(s)\right)^p.$$

Із одержаних оцінок для ρ_1 випливає нерівність (3). Теорема доведена.

3. Деякі наслідки. Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{nk}^{(0)}(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) \left| d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right|,$$

$$\overline{\nu}_n^{(0)}(r) = \overline{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_{nk}^{(0)}(r);$$

$$\kappa_{nk}^{(0)}(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) \left| F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x) \right| dx,$$

$$\overline{\kappa}_n^{(0)}(r) = \overline{\sigma}_n \sum_{k=1}^{n} \kappa_{nk}^{(0)}(r) \sigma_{nk};$$

$$\kappa_{nk}(r) = r \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} \left| F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x) \right| dx,$$

$$\overline{\kappa}_n(r) = \overline{\sigma}_n^{2-r} \sum_{k=1}^{n} \kappa_{nk}(r) \sigma_{nk}^r.$$

Наслідок 1. *Нехай* $\overline{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ *для* $n \geq 2$, $2 < r \leq 3$. *Існують сталі* $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, *що для всіх* $n \geq 1$ *справедливі нерівності*

$$\rho_n \leq C^{(1)} \overline{\sigma}_n^{r-2} \overline{\nu}_n^{(0)}(r), \tag{18}$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max \left\{ \overline{\sigma}_n^{r-2} \overline{\kappa}_n^{(0)}(r); \overline{\sigma}_n \left(\overline{\kappa}_n^{(0)}(r) \right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2 (n+1)}} \right\}, \tag{19}$$

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max \left\{ \overline{\sigma}_n^{r-2} \overline{\kappa}_n(r); \overline{\sigma}_n \left(\overline{\kappa}_n(r) \right)^{\frac{1}{\overline{\sigma}_n^2 (rn+1)}} \right\}. \tag{20}$$

Для доведення наслідку будемо використовувати лему.

Лема. *Для всіх* $t \in R$ *мають місце нерівності*:

$$\omega_{nk}(t) \leq \nu_{nk}^{(0)}(r) \min \left(1, \frac{|t|^r \sigma_{nk}^r}{6^{r-2}} \right), \tag{21}$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk}^{(0)}(r) \min \left(|t| \sigma_{nk}, \frac{2^{5-2r}}{r} |t|^r \sigma_{nk}^r \right), \tag{22}$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk}(r) \frac{2^{5-2r}}{r} |t|^r \sigma_{nk}^r. \tag{23}$$

Доведення. Враховуючи, що $M\xi_{nk} = 0$, $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$, одержуємо

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| =$$

$$= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| = |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx \right) \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right|. \tag{24}$$

Із рівностей (24)

$$\omega_{nk}(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| d \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \max \left(1, \frac{|x|^r}{\sigma_{nk}^r} \right) \left| d \left(F_{nk}(x) - \Phi \left(\frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| = \nu_{nk}^{(0)}(r). \tag{25}$$

Використовуючи нерівність ([2], стор. 372)

$$\left| e^{iz} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(iz)^j}{j!} \right| \leq \frac{2^{1-\gamma} |z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma}, \; 0 \leq \gamma \leq 1, \; m = 0, 1, 2, ..., \tag{26}$$

при $\gamma = r-2$, $m=2$ із (24)

$$\omega_{nk}(t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right| \left| d \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|tx|^r}{6^{r-2}} \left| d \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|t|^r \sigma_{nk}^r}{6^{r-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, \frac{|x|^r}{\sigma_{nk}^r}\right) \left| d \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| = \nu_{nk}^{(0)}(r) \frac{|t|^r \sigma_{nk}^r}{6^{r-2}}. \qquad (27)$$

Із (25) і (27) одержуємо нерівність (21). Із рівностей (24)

$$\omega_{nk}(t) = |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx \right) \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right) dx \right| \leq$$

$$\leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} - 1 - itx \right| \left| F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx. \qquad (28)$$

Із (28) і нерівності (26) при $\gamma = r-2$, $m=1$

$$\omega_{nk}(t) \leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} 2^{5-2r} |tx|^{r-1} \left| F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx =$$

$$= \frac{2^{5-2r}|t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \int_{-\infty}^{\infty} r|x|^{r-1} \left| F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x) \right| dx = \kappa_{nk}(r) \frac{2^{5-2r}|t|^r \sigma_{nk}^r}{r}.$$

Нерівність (23) доведена. Із попередньої нерівності

$$\omega_{nk}(t) \leq \frac{2^{5-2r}|t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \int_{-\infty}^{\infty} r|x|^{r-1} \left| F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x) \right| dx \leq$$

$$\leq \frac{2^{5-2r}|t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) \left| F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x) \right| dx = \kappa_{nk}^{(0)}(r) \frac{2^{5-2r}|t|^r \sigma_{nk}^r}{r}$$

і

$$\omega_{nk}(t) = |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right) dx \right| \leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} \left| F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx =$$

$$= |t|\sigma_{nk} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x) \right| dx \leq |t|\sigma_{nk}\kappa_{nk}^{(0)}(r)$$

одержимо нерівність (22). Лема доведена.

***Доведення* наслідку 1.** Із леми випливає, що в теоремі можна покласти $s = 0$, $\theta_{nk}(0, r) = \nu_{nk}^{(0)}$, $d(r) = 6^{2-r}$. Тоді одержимо (18) для $n \geq 2$ і

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F_{11}(x) - \Phi(x)| =$$

$$= \sup_x \left| \int_{-\infty}^{x} d(F_{11}(u) - \Phi(u)) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |d(F_{11}(u) - \Phi(u))| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{11}(x) - \Phi(x))| = \nu_{11}^{(0)}(r).$$

Якщо в теоремі покласти $s = 1$ і $\theta_{nk}(1, r) = \kappa_{nk}^{(0)}(r)$, $d(r) = \frac{2^{5-2r}}{r}$, то із леми одержимо (19).

Якщо ж в теоремі покласти $s = r$ і $\theta_{nk}(r, r) = \kappa_{nk}(r)$, $d(r) = \frac{2^{5-2r}}{r}$, то із леми одержимо (20). Наслідок 1 доведений.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням $M\xi_i = 0$, дисперсією $D\xi_i = \sigma_i^2$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Позначимо через $F_k(x)$ функцію розподілу випадкової величин ξ_k і покладемо $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$. Тоді

$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{B_n}$, $F_{nk}(x) = F_k(xB_n)$, $\sigma_{nk}^2 = \frac{\sigma_k^2}{B_n^2}$, $\overline{\sigma}_n^2 = \frac{\sigma^2}{B_n^2}$, $\sigma = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \sigma_k$;

$\nu_k^{(0)}(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) \, |d(F_k(x\sigma_k) - \Phi(x))|$, $\overline{\nu}_n^{(0)}(r) = \frac{\sigma^2}{B_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k^{(0)}(r)$;

$\kappa_k^{(0)}(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) \, |F_k(x\sigma_k) - \Phi(x))| \, dx$, $\overline{\kappa}_n^{(0)}(r) = \frac{\sigma}{B_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \kappa_k^{(0)}(r)\sigma_k$;

$\kappa_k(r) = r \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} \, |F_k(x\sigma_k) - \Phi(x)| \, dx$, $\overline{\kappa}_n(r) = \frac{\sigma^{2-r}}{B_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \kappa_k(r)\sigma_k^r$.

Наслідок 2. *Нехай* $\frac{\sigma^2}{B_n^2} \leq \frac{3}{4}$ *для* $n \geq 2$. *Тоді*

$$\rho_n \leq C_1 \left(\frac{\sigma}{B_n}\right)^{r-2} \overline{\nu}_n^{(0)}(r),$$

$$\rho_n \leq C_2 \max\left\{ \left(\frac{\sigma}{B_n}\right)^{r-2} \overline{\kappa}_n^{(0)}(r); \frac{\sigma}{B_n} \left(\overline{\kappa}_n^{(0)}(r)\right)^{\frac{B_n^2}{\sigma^2(n+1)}} \right\},$$

$$\rho_n \leq C_3 \max\left\{ \left(\frac{\sigma}{B_n}\right)^{r-2} \overline{\kappa}_n(r); \frac{\sigma}{B_n} \left(\overline{\kappa}_n(r)\right)^{\frac{B_n^2}{\sigma^2(rn+1)}} \right\}.$$

Оцінки Золотарьова із [1] випливають із цих нерівностей.

1. *Zolotarev V. M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531–543.
2. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Mishura Yuliya, Munchak Yevheniya, Slyusarchuk Petro* The rate of convergence to the normal law in therms of pseudomoments // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – Vol. 2, № 2. – P. 95–106.

4. *Мішура Ю., Мунчак С.* Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2015. – Т. 92. – С. 110–124.
5. *Слюсарчук П. В., Поляк І. Й.* Узагальнення одного результату В. М. Золотарьова // Науковий вісник Ужгородського ун–ту. Серія матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 184–189.
6. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин // Науковий вісник Ужгородського ун–ту. Серія матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 12–16.
7. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд–во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 25.09.2018