УДК 517.95+511.42

Ю. П. Матурін (Дрогобицький держ. пед. ун-т ім. І. Франка),
М. М. Симотюк (Інст. прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

The metric theorems of the estimation of small denominators which arise under construction of the solution of the Nicoletti multipoint problem for strong hyperbolic equation are proved.

Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння.

1. Вступ. Нижче використовуватимемо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = (0;T)\times\Omega^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $D=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_p)$, $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера; $Pol_{n,p}^{hom}$ – множина усіх однорідних поліномів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами; $(t_1,\ldots,t_n)$ – впорядкований набір чисел з відрізка $[0;T]$: $t_1<\ldots<t_n$, $\mu_n S$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $S\subset\mathbb{R}^n$; H_α $(\alpha\in\mathbb{R})$ – простір тригонометричних рядів $\varphi(x)=\sum_k\varphi_k e^{i(k,x)}$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi(x);H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}};$$

$C^n([0;T];H_\alpha)$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t\in[0;T]$ похідні $\partial^j u(t,\cdot)/\partial t^j \equiv \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t)\exp(ik,x)$, $0\le j\le n$, належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0;T]$, норму в просторі $C^n([0;T];H_\alpha)$ задаємо формулою

$$\|u;C^n([0;T];H_\alpha)\| = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0;T]}\left\|\frac{\partial^j u(t,\cdot)}{\partial t^j};H_\alpha\right\|.$$

Нехай $n\in\mathbb{N}$, а поліноми $A_j\in Pol_{j,p}^{hom}$, $j=\overline{1,n}$, є такими, що диференціальний вираз

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)\equiv\frac{\partial^n}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(D)\frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

є строго гіперболічним; зі строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t,D)$ випливає, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ λ-корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ рівняння

$$L(\lambda,ik)=0 \tag{1}$$

є попарно різними суто уявними числами. Умови коректної розв'язності багатоточкової інтерполяційної задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in Q_T^p, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j=\overline{1,n}, \quad x\in\Omega^p, \tag{3}$$

пов'язані із властивостями таких визначників [2]:

$$\Delta(k) = \det\left\|y_q^{(j-1)}(t_j,k)\right\|_{j,q=1}^{n}, \quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

де

$$y_q(t,k) = \begin{cases} t^{q-1} & , \ k=\vec{0}, \\ e^{\lambda_q(k)t} & , \ k\neq\vec{0}, \end{cases} \qquad q=\overline{1,n}.$$

Зокрема, при виконанні умови

$$\forall\, k\in\mathbb{Z}^p \quad \Delta(k)\neq 0, \tag{5}$$

задача (2), (3) має єдиний формальний розв'язок, що зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{j,k}y_q(t,k)e^{i(k,x)}, \tag{6}$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $y_q(t_j,k)$, $j,q=\overline{1,n}$, у визначнику $\Delta(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$. Якщо, крім умови (5), з деякою сталою ω для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ справджується нерівність

$$|\Delta(k)|\geq|k|^{-\omega}, \tag{7}$$

то можна встановити збіжність ряду (6) у просторах $C^n([0;T];H_\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, якщо $\varphi_j\in H_{\alpha_j}$ для деяких показників $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$. Тому важливо дослідити питання про можливість виконання оцінок (7). Це і є метою даної роботи.

За допомогою метричного підходу [1–3] у даній роботі встановлено (див. теорему 1), що при $\omega>(p-1)n(n-1)/2$ нерівність (7) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in[0;T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Така ж оцінка зберігається (див. теорему 2) і для випадку рівновіддалених вузлів інтерполяції $t_1,\ldots,t_n$ в умовах (3). Для доведення теорем 1, 2 використано допоміжні леми 1, 2 про оцінки мір виняткових множин квазімногочленів, про оцінки визначника Вандермонда $\det\|\lambda_j^{q-1}(k)\|_{j,q=1}^n$ та його мінорів (що є наслідком строгої гіперболічності виразу $L\left(\partial/\partial t, D\right)$). Підкреслимо, що для визначника задачі Ніколетті (4) метричні оцінки знизу отримано у науковій літературі вперше.

2. Допоміжні твердження. Для доведення основних результатів використовуватимемо такі допоміжні твердження.

Лема 1. [4] *Нехай $f(t)$ має вигляд*

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}p_je^{\rho_jt}, \quad \rho_j\neq\rho_q \quad (j\neq q),$$

де $\rho_j,p_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,m}$. Якщо для деяких комплексних чисел a_j, $j=\overline{1,n}$, в кожній точці $t\in[0;T]$ виконується умова

$$|f^{(n)}(t)+a_1f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nf(t)|\geq\delta>0,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A = 1 + \max\limits_{1\le j\le n} |a_j|^{1/j}$, *справджується оцінка*

$$\mu_1\{t \in [0;T] : |f(t)| < \varepsilon\} \le C_8 \Lambda(\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $\Lambda = 1 + \max\limits_{1\le j\le n} |\rho_j|$, $C_1 = C_1(n, m, T) > 0$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ позначимо: $W_j(k) = \det \|\lambda_l^{q-1}(k)\|_{l,q=1}^{j}$, $j = \overline{2,n}$, $W_{j,r}(k)$, $r = \overline{1,j}$, – алгебричне доповнення елемента $\lambda_j^{r-1}(k)$ у визначнику $W_j(k)$, де $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, – корені рівняння (1).

Лема 2. *Виконуються оцінки*

$$|W_j(k)| \ge C_2|k|^{j(j-1)/2}, \quad j = \overline{2,n}, \tag{8}$$

$$|W_{j,r}(k)| \le C_3|k|^{j(j-1)/2-(r-1)}, \ r = \overline{1,j}, \tag{9}$$

де $C_2, C_3 > 0$ *– сталі, не залежні від* $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$.

Доведення. Із однорідності поліномів $A_j(\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $j = \overline{1,n}$, та зі структури диференціального виразу $L(\partial/\partial t, D)$ отримуємо, що $L(\lambda, ik) = (i|k|)^n L\left(\frac{\lambda}{i|k|}, \frac{k}{|k|}\right)$, $k \ne \vec{0}$. Тому корені $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, $k \ne \vec{0}$, допускають зображення

$$\lambda_j(k) = i|k|\sigma_j(k), \quad j = \overline{1,n}, \tag{10}$$

де $\sigma_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, $k \ne \vec{0}$, – корені рівняння

$$L\left(\sigma, k/|k|\right) = 0. \tag{11}$$

Зі строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t, D)$ отримуємо, що для кожного $\xi \in \mathbb{R}^p\backslash\{\vec{0}\}$ дискримінант $D_L(\xi)$ многочлена $L(\lambda, \xi)$ (як многочлена змінної λ) є відмінним від нуля. Оскільки $D_L(\xi)$ є многочленом від коефіцієнтів многочлена $L(\lambda, \xi)$ (див. [2]), то $D_L(\xi)$ є неперервною функцією параметрів $\xi_1, \ldots, \xi_p$. На компакті $S = \{\xi \in \mathbb{R}^p : |\xi_1| + \ldots + |\xi_p| = 1\}$ модуль цієї функції відокремлений знизу від нуля деякою додатною сталою C_4:

$$\forall \xi \in S \quad |D_L(\xi)| \ge C_4. \tag{12}$$

Тоді з рівності [2, с. 61]

$$D_L\left(\frac{k}{|k|}\right) = \prod_{n\ge j>q\ge 1} (\sigma_j(k) - \sigma_q(k))^2, \quad k \ne \vec{0},$$

а також із оцінок (12) отримуємо, що

$$\prod_{n\ge j>q\ge 1} |\sigma_j(k) - \sigma_q(k)|^2 \ge C_4, \quad k \ne \vec{0}. \tag{13}$$

Із нерівності (13) на підставі формул (10) випливає, що при $k \ne \vec{0}$

$$\prod_{n\ge j>q\ge 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \ge \sqrt{C_4}|k|^{n(n-1)/2}, \tag{14}$$

Із рівномірної обмеженості за $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ коефіцієнтів рівняння (11) випливає й рівномірна обмеженість за k [6] коренів цього рівняння; тому існує стала $C_5 > 0$ така, що для всіх $k \neq \vec{0}$ виконуються оцінки

$$|\sigma_j(k)| \leq C_5, \quad j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Із формул (10), (15) для $k \neq \vec{0}$ отримуємо

$$|\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \leq 2C_5|k|, \quad n \geq j > q \geq 1. \tag{16}$$

Тоді з оцінок (14), (16) випливає, що

$$|\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \geq C_6|k|, \quad n \geq j > q \geq 1, \tag{17}$$

де $C_6 = \sqrt{C_4} \cdot (2C_5)^{1-n(n-1)/2} > 0$. Враховуючи, що визначник $W_j(k)$ є визначником Вандермонда перших j коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_j(k)$, із формул (17) отримуємо

$$|W_j(k)| = \prod_{j \geq r > q \geq 1} |\lambda_r(k) - \lambda_q(k)| \geq (C_6|k|)^{j(j-1)/2}, \quad j = \overline{2,n}, \quad k \neq \vec{0},$$

тобто оцінки (8) виконуються.

Нерівності (9) випливають із того, що визначник $W_{j,r}(k)$ є сумою $(j-1)!$ доданків вигляду $\pm\lambda_1^{\alpha_1 - 1}(k) \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}-1}(k)$, де $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ – перестановка чисел з множини $\{1, \ldots, j\} \backslash \{r\}$, а також із оцінок

$$|\lambda_j(k)| \leq C_5|k|, \quad j = \overline{1,n}, \quad k \neq \vec{0}.$$

Оскільки

$$\max_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})} |\lambda_1^{\alpha_1 - 1}(k) \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}-1}(k)| \leq C_7|k|^{1+\ldots+j-1-(r-1)}, \quad C_7 = C_5^{j(j-1)/2-(r-1)},$$

то

$$|W_{j,r}(k)| \leq (j-1)! C_7 |k|^{j(j-1)/2-(r-1)}, \quad r = \overline{1,j},$$

а отже, оцінки (9) встановлені.

3. Доведення основних результатів. Встановимо метричні оцінки знизу для визначника $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0;T]^n$ нерівність* (7) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.*

Доведення. Через $B(k)$ позначимо множину тих векторів $\vec{t} \in [0;T]^n$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (7), виконується для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, тобто $B(k) = \{\vec{t} \in [0;T]^n : |\Delta(k)| < |k|^{-\omega}\}$. Нехай B – множина тих векторів $\vec{t} \in [0;T]^n$, які належать до нескінченної кількості множин $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$. Для доведення теореми 1 досить перевірити, що $\mu_n B = 0$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі [2] для цього досить перевірити, що ряд $\sum_{|k|>0} \mu_n B(k)$ є збіжним при $\omega > (p-1)n(n-1)/2$. Через $\Delta_j(k; t_1, \ldots, t_j)$ позначимо визначник, одержаний із визначника $\Delta(k)$ викреслюванням останніх $(n-j)$ рядків та останніх $(n-j)$ стовпців, $j = \overline{1,n}$; зрозуміло, що $\Delta_n(k; t_1, \ldots, t_n) = \Delta(k)$, $\Delta_1(k; t_1) = e^{\lambda_1(k)t_1}$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, розглянемо такі множини:

$$B_j(k) = \{\vec{t} \in [0;T]^n \colon |\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}, |\Delta_{j-1}(k;t_1,\dots,t_{j-1})| \geq |k|^{-\omega_{j-1}}\},$$

де $j = \overline{2,n}$, $\omega_j = (p-1)j(j-1)/2 + \varepsilon_j$, а ε_j, $j = \overline{1,n}$ – такі додатні числа, що

$$0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n = \omega - (p-1)n(n-1)/2.$$

З огляду на те, що для довільних $k \neq \vec{0}$ та $\omega_1 > 0$ виконується нерівність

$$|\Delta_1(k;t_1)| = \left|e^{\lambda_1(k)t_1}\right| = 1 \geq |k|^{-\omega_1}, \tag{18}$$

то правильним є включення

$$B(k) \subset \bigcup_{j=2}^{n} B_j(k), \quad k \neq \vec{0}. \tag{19}$$

Із формул (19) та адитивності міри Лебега випливає, що

$$\mu_n B(k) \leq \sum_{j=2}^{n} \mu_n B_j(k), \quad k \neq \vec{0}.$$

Тому збіжність ряду $\sum_{|k|>0} \mu_n B(k)$ випливає зі збіжності всіх рядів

$$\sum_{|k|>0} \mu_n B_j(k), \quad j = \overline{2,n}. \tag{20}$$

Покажемо, що для $k \neq \vec{0}$ виконуються оцінки

$$\mu_n B_j(k) \leq C_9 |k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}_j}, \quad j = \overline{2,n}, \tag{21}$$

де додатна стала C_9 не залежить від k, $\widetilde{\varepsilon}_j = (\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1})/(j-1)$, $j = \overline{2,n}$. Оскільки умови, які визначають множину $B_j(k)$, $j = \overline{2,n}$, не залежать від змінних $t_{j+1},\dots,t_n$, то $B_j(k)$ є декартовим добутком множини

$$F_j(k) = \{(t_1,\dots,t_j) \in [0;T]^j : |\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j},$$
$$|\Delta_{j-1}(k;t_1,\dots,t_{j-1})| \geq |k|^{-\omega_{j-1}}\},$$

та $(n-j)$ відрізків $[0;T]$, що відповідають змінним $t_{j+1},\dots,t_n$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\mu_n B_j(k) = T^{n-j} \mu_j F_j(k), \quad j = \overline{2,n}. \tag{22}$$

Зрозуміло, що

$$\mu_j F_j(k) = \int\limits_{M_j(k)} \mu_j F_j(k;t_1,\dots,t_{j-1}) dt_1 \dots dt_{j-1},$$

де

$$M_j(k) = \{(t_1,\dots,t_{j-1}) \in [0;T]^{j-1} : |\Delta_j(k;t_1,\dots,t_{j-1})| \geq |k|^{-\omega_{j-1}}\},$$
$$F_j(k;t_1,\dots,t_{j-1}) = \{t_j \in [0;T] : (t_1,\dots,t_j) \in F_j(k)\}, \ j = \overline{2,n}.$$

Для оцінок зверху мір одновимірних множин $F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$, $j=\overline{2,n}$, використаємо такі побудови. Визначник $\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$, $j\geq 2$, розвинемо за елементами його останнього рядка і отримане розвинення продиференціюємо за змінною t_j до порядку $(j-1)$, у результаті дістанемо j рівностей

$$\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}=\sum_{r=1}^{j}(-1)^{j+r}\lambda_r^{j+q-1}(k)e^{\lambda_r(k)t_j}\Delta_j^r(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),\ q=\overline{0,j-1}, \tag{23}$$

де $\Delta_j^r(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$, $r=\overline{1,j}$, – мінор визначника $\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ порядку $(j-1)$, який відповідає викресленим останньому рядку та r-му стовпцю. Рівності (23) для фіксованих $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq\vec{0}$, та j, $2\leq j\leq n$, розглянемо як систему j лінійних рівнянь стосовно j змінних

$$\Big\{(-1)^{j+1}\lambda_1^{j-1}(k)e^{\lambda_1(k)t_j}\Delta_j^1(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),\ldots,\lambda_j^{j-1}(k)e^{\lambda_j(k)t_j}\Delta_j^j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})\Big\}.$$

Визначник системи (23) є визначником $W_j(k)$, а отже, є відмінним від нуля. Застосовуючи правило Крамера для розв'язування системи (23), дістанемо, що

$$\lambda_j^{j-1}(k)e^{\lambda_j(k)t_j}\Delta_j^j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})=\sum_{q=0}^{j-1}\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}\cdot\frac{W_{j,q+1}(k)}{W_j(k)}. \tag{24}$$

Із однорідності полінома $A_n(\xi)$ випливають оцінки

$$|\lambda_j(k)|\geq C_{10}|k|,\quad k\in\mathbb{Z}^p,\quad k\neq\vec{0},\quad j=\overline{1,n}. \tag{25}$$

Враховуючи лему 2, зі співвідношень (24) та очевидних рівностей

$$\Delta_j^j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})=\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),\quad |e^{\lambda_j(k)t_j}|=1,\quad j=\overline{2,n},$$

для $k\neq\vec{0}$ отримуємо, що

$$|k|^{j-1}|\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})|\leq C_{11}\sum_{q=0}^{j-1}\frac{1}{|k|^q}\left|\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}\right|\leq$$

$$\leq jC_{11}\max_{0\leq q\leq j-1}\left\{\frac{1}{|k|^q}\left|\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}\right|\right\}, \tag{26}$$

де стала $C_{11}>0$ виражається тільки через сталі C_2,C_3,C_{10} і не залежить від k.

Зафіксуємо точку $(t_1,\ldots,t_{j-1})$ з множини $M_j(k)$. Розглянемо функції змінної t_j ($t_1,\ldots,t_{j-1}$ – параметри)

$$y_q(k;t_j)=\frac{\operatorname{Re}\partial^{q-1}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^{q-1}},\quad q=\overline{1,j},$$

$$y_{j+q}(k;t_j)=\frac{\operatorname{Im}\partial^{q-1}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^{q-1}},\quad q=\overline{1,j},$$

та функції $z_{q,r}^+(k;t_j)=y_q(k;t_j)+y_r(k;t_j)$, $z_{q,r}^-(k;t_j)=y_q(k;t_j)-y_r(k;t_j)$, $1\leq q<r\leq j$. За теоремою Валле Пуссена [5] кількість нулів на $[0;T]$ кожної з функцій $z_{q,r}^+(k;t_j)$, $z_{q,r}^-(k;t_j)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) не перевищує

$C_{12}|k|$, де стала $C_{12} > 0$ не залежить від k та $t_1, \dots, t_{j-1}$. Точки $0, T$ та нулі всіх нетривіальних функцій $z^+_{q,r}(k;t_j)$, $z^-_{q,r}(k;t_j)$, $1 \le q < r \le j$, задають розбиття відрізка $[0;T]$ на дрібніші відрізки $J_s = [\xi_{s-1}, \xi_s]$, $s = \overline{1, N(k)}$, таке, що:

1) кількість $N(k)$ відрізків цього розбиття не перевищує $C_{13}|k|$ (до того ж стала $C_{13} > 0$ не залежить від $k, t_1, \dots, t_{j-1}$);

2) на кожному з відрізків J_s цього розбиття можна підібрати похідну порядку $r(s)$ $(0 \le r(s) \le j-1)$ за змінною t_j функції $\mathrm{Re}\,\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)$ або функції $\mathrm{Im}\,\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)$ таку, що в кожній точці $t_j \in J_s$ виконується оцінка

$$\frac{1}{|k|^{r(s)}} \left| \frac{\partial^{r(s)} \mathrm{Re}\,\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)}{\partial t_j^{r(s)}} \right| \ge \max_{0 \le r \le j-1} \left\{ \frac{1}{|k|^r} \left| \frac{\partial^r \Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)}{\partial t_j^r} \right| \right\} \tag{27}$$

або оцінка

$$\frac{1}{|k|^{r(s)}} \left| \frac{\partial^{r(s)} \mathrm{Im}\,\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)}{\partial t_j^{r(s)}} \right| \ge \max_{0 \le r \le j-1} \left\{ \frac{1}{|k|^r} \left| \frac{\partial^r \Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)}{\partial t_j^r} \right| \right\}. \tag{28}$$

Оскільки для кожного фіксованого $(t_1, \dots, t_{j-1}) \in M_j(k)$ виконується включення

$$F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1}) \subset \bigcup_{s=1}^{N(k)} \left(J_s \cap F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1}) \right),$$

то

$$\mu_1 F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1}) \le \sum_{s=1}^{N(k)} \mu_1 \left(J_s \cap F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1}) \right). \tag{29}$$

Оцінимо міри множин у правій частині нерівності (29). Якщо відрізок J_s є таким, що на ньому виконується нерівність (27) або нерівність (28) із показником $r(s) = 0$, то з оцінок (26) випливає, що для всіх $t_j \in J_s$, $(t_1, \dots, t_{j-1}) \in M_j(k)$, виконується нерівність

$$|\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)| \ge \frac{|k|^{j-1}}{jC_{11}} |\Delta_{j-1}(k; t_1, \dots, t_{j-1})| \ge \frac{|k|^{j-1}}{jC_{11}} |k|^{-\omega_{j-1}}. \tag{30}$$

Тому жодна точка відрізка J_s не може належати до множини $F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1})$. Дійсно, якщо $t_j \in F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1})$ (при цьому $(t_1, \dots, t_{j-1}) \in M_j(k)$), то виконується нерівність $|\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)| < |k|^{-\omega_j}$. Якщо, крім того, $t_j \in J_s$, то з отриманої оцінки та нерівності (30) дістанемо, що виконується оцінка

$$|k|^{-\omega_j} > |k|^{-\omega_{j-1}+j-1}/C_{14}, \quad C_{14} = C_{14}(C_{10}, C_{11}),$$

яка є суперечливою для великих $|k|$, бо $\omega_{j-1} < \omega_j + j - 1$, $j = \overline{2, n}$.

Отже, до множини $F_j(k; t_1, \dots, t_{j-1})$ можуть входити точки тільки тих відрізків J_s, для яких виконується нерівність (27) або нерівність (28) із показником $r(s) \ge 1$. Якщо відрізок J_s є таким, що $j - 1 \ge r(s) \ge 1$, то за лемою 1

$$\mu_1\{t_j \in J_s : |\mathrm{Re}\,\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \le \frac{C_{15}}{|k|} \sqrt[r(s)]{|k|^{\omega_{j-1} - \omega_j - (j-1)}}, \tag{31}$$

якщо виконується нерівність (27), або

$$\mu_1\{t_j \in J_s : |\operatorname{Im}\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \le \frac{C_{16}}{|k|}\sqrt[r(s)]{|k|^{\omega_{j-1}-\omega_j-(j-1)}}, \tag{32}$$

якщо виконується нерівність (28). Враховуючи очевидні включення

$$\{t_j \in J_s : |\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \subset \{t_j \in J_s : |\operatorname{Re}\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\},$$

$$\{t_j \in J_s : |\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \subset \{t_j \in J_s : |\operatorname{Im}\Delta_j(k;t_1,\dots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\},$$

де $j = \overline{2,n}$, $k \ne \vec{0}$, і те, що $N(k) \le C_{13}|k|$, $r(s) \le j-1$, з оцінок (29), (31), (32) одержимо, що для довільного $(t_1,\dots,t_{j-1}) \in M_j(k)$

$$\mu_1 F_j(k;t_1,\dots,t_{j-1}) \le C_{17}|k|^{-p-(\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1})(j-1)}, \quad j=\overline{2,n}, \quad k \ne \vec{0}. \tag{33}$$

Із оцінок (33) та формул (22) випливає істинність нерівностей (21).

Теорему доведено.

4. Випадок рівновіддалених вузлів. Встановимо метричні оцінки знизу для визначника $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, коли вузли t_j є рівновіддаленими, тобто виконуються рівності

$$t_j = t_0 + (j-1)h, \quad j = \overline{1,n}.$$

У цьому випадку визначник $\Delta(k)$ можна обчислити за формулою

$$\Delta(k) = e^{(\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k))t_0} \prod_{n \ge j > q \ge 1} (\lambda_j(k)e^{\lambda_j(k)h} - \lambda_q(k)e^{\lambda_q(k)h}), \quad k \ne \vec{0}. \tag{34}$$

Зауважимо, що теорема 1 для визначника (34) не є застосовною, оскільки цьому визначнику відповідає множина векторів

$$\{(t_0, t_0+h, \dots, t_0+(n-1)h) \in \mathbb{R}^n : h \in (0,(T-t_0)/(n-1)]\},$$

яка має нульову n-вимірну міру Лебега.

Теорема 2. *Для визначника* (34) *нерівність* (7) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $h \in (0;(T-t_0)/(n-1)]$ *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.

Доведення. Нехай $T_n = (T-t_0)/(n-1)$, $\varepsilon = \frac{2\omega}{n(n-1)} - (p-1) > 0$. Запровадимо функції

$$\psi_{jq}(k,h) = \lambda_j(k)e^{\lambda_j(k)h} - \lambda_q(k)e^{\lambda_q(k)h}, \quad n \ge j > q \ge 1, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad k \ne \vec{0},$$

та множини

$$E_{jq}(k) = \{h \in (0,T_n] : |\psi_{jq}(k,h)| < \eta(k)\}, \quad n \ge j > q \ge 1, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad k \ne \vec{0},$$

де $\eta(k) = |k|^{-(p-1)-\varepsilon}$. Згідно з лемою 2 виконуються нерівності

$$\forall\, h \in (0,T_n] \quad |(d/dh - \lambda_q(k))\psi_{jq}(k,h)| = |\lambda_j(k)(\lambda_j(k)-\lambda_q(k))| \ge C_{18}|k|^2.$$

Із отриманих оцінок на підставі леми 1 отримуємо, що

$$\mu_1\, E_{jq}(k) \le C_{19}|k|^{-p-\varepsilon}, \quad n \ge j > q \ge 1, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad k \ne \vec{0}.$$

За лемою Бореля–Кантеллі [1, 2] для майже всіх чисел $h \in (0, T_n]$ нерівність

$$\prod_{n\geq j>q\geq 1} |\psi_{jq}(k,h)| \geq \eta^{n(n-1)/2}(k) = |k|^{-(p-1)n(n-1)/2-\varepsilon n(n-1)/2} = |k|^{-\omega} \tag{35}$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Оскільки для всіх $k \in \mathbb{Z}^p, k \neq \vec{0}$, справджується рівність $|e^{(\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k))t_0}| = 1$, то з нерівності (35) випливає доведення теореми 2.

4. Висновки. У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника інтерполяційної задачі Ніколетті для лінійного строго гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Застосовано метричний підхід [1, 2] для встановлення таких оцінок. Розглянуто частковий випадок задачі, коли вузли інтерполяції є рівновіддаленими.

Результати роботи можна перенести на випадок інтерполяційної задачі Ніколетті для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
4. *Симотюк М.М.* Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2005, Т. 2. – С. 199–212.
5. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2-х т. – М.: Изд–во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
6. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 446 с.

Одержано 11.11.2018