УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ЕКВАЦІОНАЛЬНА РЕШІТКА ОДНОГО КЛАСУ АЛГЕБР

In the paper has been considered the problem of finding a complete system of identities in the class of algebras whose operations are given above binary matrices of the n-th order. The constructed finite complete system of identities allowed us to find the T-basis and construct an equivalent lattice.

У роботі розглядається задача знаходження повних систем тотожностей в класі алгебр, формули яких описують булеві зображення. Побудовані скінченні повні системи тотожностей дали можливість знайти T-базис і побудувати екваціональну решітку такого класу алгебр.

1. Вступ. У цій роботі розв'язується задача побудови екваціональних решіток в одному класі алгебр. Відомо [1], що алгеброю U називається впорядкована пара множин $U = (A, \Omega)$, A – носій алгебри, Ω – сигнатура, що задає множину операцій над A. Позначимо через $R(U)$ – множину всіх тотожностей алгебри U. Система тотожностей $H \subset R(U)$ називається повною [2], якщо $F(H) = R(U)$, де F – операція замикання (суперпозиції) тотожностей.

Знаходження повних систем тотожностей часто пов'язано з можливістю побудови на основі системи тотожностей H канонічних форм формул алгебр, які є аналогами досконалої диз'юнктивної нормальної форми в булевій алгебрі. Проблема знаходження скінченних повних систем тотожностей (СПСТ) піднімається в [3].

У роботі [4] побудовані скінченні алгебри, для яких не існує СПСТ, а в роботі [5] доведено, що «майже всі» скінченні алгебри мають СПСТ. У фундаментальних роботах [6, 7] доводиться, що всі двозначні булеві алгебри мають СПСТ, а в [2] Ліндон стверджує, що знаходження СПСТ навіть для скінченних алгебр є нетривіальною задачею.

2. Основний результат. Задача екваціонального описання класу алгебр M може бути зведена до задачі знаходження його T-базису, тобто такої множини алгебр $M^* = \{U_1, U_2, ..., U_n, ...\}$, що

1. $M^* \subset M$.
2. Для будь-яких алгебр $U_i, U_j \in M^*$, виконується нерівність $R(U_i) \neq R(U_j)$.
3. Для будь-якої алгебри $U \in M$ існує алгебра $U_i \in M^*$ така, що $R(U) = R(U_i)$.

Означення 1. *Клас алгебр M називається екваціонально замкнутим, якщо він має T-базис M^*: для будь-яких алгебр $U_1, U_2 \in M^*$, існують $U_3, U_4 \in M^*$ такі, що*

$$R(U_3) = R(U_1) \cap R(U_2), \; R(U_4) = R(U_1) \cup R(U_2). \tag{1}$$

Означення 2. *Екваціональною решіткою замкнутого класу алгебр M називається решітка, яку утворюють $R(U_i)$, $U_i \in M^*$ відносно операцій* (1).

Позначимо через $N_k = \{U_i = (A_{k\times k}, \Omega_i)\}$, $k \in \mathbb{N}$ – сигнатурно замкнений клас одноносієвих алгебр, де $A_{k\times k}$ – множина бінарних матриць розміром $k \times k$, $\Omega_i \subset \{\vee, \wedge, T_0, T_1, \dots, T_7\}$.

Покажемо, що всі алгебри даних класів мають СПСТ. Для прикладу розглянемо алгебри класу $N_4 = \{U_i = (A_{4\times 4}, \Omega_i)\}$ для всіх $\Omega_i \subset \Omega$.

Нехай $U = (A_{4\times 4}, \wedge, \vee, T_1, T_2)$ алгебра типу (1100000) (такі алгебри в подальшому будемо позначати через $U\,(1100000)$), де $A_{4\times 4}$ – множина бінарних матриць розміром 4×4, $x\vee y = \max(x, y)$, $x\wedge y = \min(x, y)$, T_1 – операція повороту навколо головної діагоналі (транспонування), T_2 – операція повороту на 90 градусів за напрямком часової стрілки відносно центру симетрії.

Побудуємо ДДНФ в $U\,(1100000)$. У цій алгебрі виконуються тотожності:

$$\begin{aligned}
&1.\ A\wedge A = A; A\vee A = A;\\
&2.\ A\wedge B = B\wedge A; A\vee B = B\vee A;\\
&3.\ (A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B\wedge C); (A\vee B)\vee C = A\vee(B\vee C);\\
&4.\ A\wedge(B\vee C) = A\wedge B\vee A\wedge C; A\vee B\wedge C = (A\vee B)\wedge(A\vee C);\\
&5.\ A\vee B\wedge A = A; A\wedge(B\vee A) = A;\\
&6.\ (A\vee B)^{T_i} = A^{T_i}\vee B^{T_i}, i = 1,\,2;\\
&7.\ (A\wedge B)^{T_i} = A^{T_i}\wedge B^{T_i}, i = 1,\,2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Наведені тотожності дають можливість довільну формулу стандартним алгоритмом привести до ДНФ. Множники, які входять до елементарних кон'юнкцій, мають вигляд $x_j^{\varphi_j(T_1,T_2)}$, де $\varphi_j(T_1, T_2)$ – формула, яка є суперпозицією операцій T_1, T_2. В [1] знайдені тотожності, в яких операції $T_0, T_1, \ldots, T_7$ виражаються через T_1, T_2:

$$\begin{array}{lll}
1.\ T_0 = T_1^2; & 2.\ T_1 = T_1; & 3.\ T_2 = T_2;\\
4.\ T_3 = T_1(T_2T_1); & 5.\ T_4 = T_2(T_2T_1); & 6.\ T_5 = T_2T_1;\\
7.\ T_6 = T_1T_2; & 8.\ T_7 = {T_2}^2. &
\end{array} \tag{3}$$

Ці тотожності і тотожність $T_jT_i = T_k$ дають можливість звести формули $\varphi_j(T_1, T_2)$ до формул T_j, $j \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, тобто до формул алгебри $U(11\ldots 1)$. Для формул цієї алгебри в [2] показано, що ДНФ співпадає з ДДНФ.

Нехай задано дві формули φ_1, φ_2 алгебри $U\,(1100000)$. Покажемо що, якщо $\varphi_1 = \varphi_2$, то існує алгоритм, який зводить їх до такої ДНФ, яка є для них єдиною, тобто ДДНФ.

Наведемо алгоритм побудови ДДНФ для формул алгебри $U\,(1100000)$.

1. Використовуючи тотожності (2), з формул φ_1, φ_2 отримаємо формули $\varphi_1^{'}$ і $\varphi_2^{'}$, які є ДНФ.

2. За допомогою тотожностей (3) елементарні кон'юнкції формул $\varphi_1^{'}$ і $\varphi_2^{'}$ зводяться до формул $\varphi_1^{''}$, $\varphi_2^{''}$ алгебри $U(11\ldots 1)$.

3. Використовуючи алгоритм побудови ДДНФ в алгебрі $U(11\ldots 1)$ [9], отримаємо формули $\varphi_1^{'''}$, $\varphi_2^{'''}$. Якщо $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\varphi_1^{'''} \cong \varphi_2^{'''}$ (співпадають лексикоографічно).

4. На основі тотожностей (3) перейдемо у зворотньому порядку від формул $\varphi_1^{'''}$ і $\varphi_2^{'''}$ алгебри $U(11\ldots 1)$ до формул φ_1^*, φ_2^* алгебри $U\,(1100000)$.

Проведені міркування мають місце для всіх алгебр класу N_4, в яких унарні операції утворюють повну систему тотожностей.

У таблиці 1 приведені тотожності для повних систем. У першому стовпчику таблиці вказані повні системи операцій, а у першому рядку – операції. У другому рядку вказані тотожності для алгебри $U\,(1100000)$, у третьому — для алгебри U (1001000) і т.д. За допомогою цих тотожностей будується ДДНФ в алгебрах з повними системами унарних операцій.

Таблиця 1

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_1T_2	T_1	T_2	$T_1(T_2T_1)$	$T_2(T_2T_1)$	T_2T_1	T_1T_2	T_2^2
T_2T_4	$(T_4T_6)T_2$	T_2	$(T_4T_2)T_4$	T_4	T_4T_2	T_2T_4	T_2^2
T_2T_5	T_5T_2	T_2	$T_2T_2^2$	T_2T_5	T_5	$(T_5T_2)T_2$	T_2^2
T_2T_6	T_2T_6	T_2	$T_2T_2^2$	T_6T_2	$T_6T_2^2$	T_6	T_2^2
T_3T_4	$T_4T_3^2$	$T_4T_3^2$	T_3	T_4	T_3T_4	T_4T_3	T_3^2
T_3T_6	T_6T_3	$T_3T_3^2$	T_3	T_3T_6	$T_3^2T_6$	T_6	T_3^2
T_4T_5	$T_5(T_4T_5)$	T_4T_5	T_5T_4	T_4	T_5	$(T_4T_5)T_4$	$(T_5T_4)(T_5T_4)$
T_4T_6	$T_6(T_4T_6)$	T_6T_4	T_4T_6	T_4	$(T_4T_6)T_4$	T_6	$T_6(T_4T_6)$
T_1T_3	T_1	$T_1(T_3T_1)$	T_3	$(T_1T_3)T_3$	T_1T_3	T_3T_1	T_3^2
T_3T_5	T_3T_5	$T_3T_3^2$	T_3	T_5T_3	T_5	$T_3(T_3T_5)$	T_3^2
T_1T_5	T_1	T_5T_1	T_1T_5	$T_5(T_1T_5)$	T_5	$(T_1T_5)T_1$	T_5 $(T_1T_5)T_1$
T_1T_6	T_1	T_1T_6	T_6T_1	$T_6(T_1T_6)$	$(T_1T_6)T_1$	T_6	$(T_1T_6)T_1$

У роботі [2] показано, що в алгебрах класу U(1000000), U(0001000), U(1100000), U(0000010), U(0111000), U(1001001), U(0000111), U(1111111) унарні операції утворюють замкнені класи. Легко переконатись, що має місце твердження.

Твердження 1. *Для формул алгебр U з замкненою системою унарних операцій ДНФ співпадає з ДДНФ.*

Твердження 2. *Довільну систему $\{T_{i_1}, T_{i_2}\}$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ за допомогою операції замикання (суперпозиції) можемо розширити до замкненої системи.*

Доведення. 1. Незамкнені множини $\{T_1, T_4\}$, $\{T_1, T_7\}$, $\{T_4, T_7\}$ розширяться до замкненої системи $\{T_1, T_4, T_7\}$ за допомогою тотожностей $T_7 = T_1T_4 = T_4T_1$, $T_4 = T_1T_7 = T_7T_1$, $T_1 = T_7T_4 = T_4T_7$.

2. Незамкнені системи $\{T_2, T_3\}$, $\{T_2, T_7\}$, $\{T_3, T_7\}$ замикаються тотожностями $T_2^2 = T_3^2 = T_7$, $T_3 = T_2T_7 = T_7T_2$, $T_2 = T_7T_3 = T_3T_7$.

3. Незамкнені множини $\{T_5, T_6\}$, $\{T_5, T_7\}$, $\{T_6, T_7\}$ розширюються до замкненої системи $\{T_5, T_6, T_7\}$ за допомогою тотожностей $T_7 = T_5T_6 = T_6T_5$, $T_6 = T_5T_7 = T_7T_5$, $T_5 = T_7T_6 = T_6T_7$.

Твердження 2 доведено.

З тверджень 1, 2 випливає справедливість теореми.

Теорема 1. *Усі алгебри класу $N_4 = \{U_i = (A_{4\times4}, \Omega_i)\}$ мають скінченні повні системи тотожностей.*

Теорема 2. *T-базис класу алгебр N_4 складається з 128 алгебр.*

Доведення. N_4 – це клас udноносієвих алгебр, які мають спільний носій (множину $A_{4\times4}$) і відрізняються одна від одної лише сигнатурою $\Omega_i = (\wedge, \vee, T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_k})$, $i_1, i_2, \ldots, i_k \subset \{1, 2, \ldots, 7\}$. Легко переконатись, що у цьому випадку клас N_4 складається з 128 алгебр.

На множині N_4 задамо відношення часткового порядку $U_1 \leq U_2$, якщо $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Можна переконатись, що в класі udноносієвих алгебр виконуються співвідношення:

1) якщо $\Omega_1 \neq \Omega_2$, то $R(U_1) \neq R(U_2)$;

2) якщо $R(U_1) = R(U_2)$, то $\Omega_1 = \Omega_2$;

3) якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$, то $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Теорема доведена.
Результати теореми 2 розповсюджуються на алгебри всіх класів N_i, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Т-базис класу алгебр N_i, $i \in \mathbb{N}$ складається з 128 алгебр, які утворюють екваціональну решітку, що є 7-мірним Ω-кубом.*

Доведення теореми випливає з теореми 2 та з співвідношень, які визначають операції на екваціональній решітці:
$R(U_3) = R(U_1) \bigcup R(U_2)$, якщо $\Omega_3 = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$,
$R(U_3) = R(U_1) \bigcap R(U_2)$, якщо $\Omega_3 = \Omega_1 \bigcap \Omega_2$.

У роботі [10] доведено, що в класі однотипних алгебр $M = \{U_l = (A_{l\times l}, \Omega)\}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, де $A_{l\times l}$ – множина бінарних матриць порядку $l \times l$, а $\Omega = (\wedge, \vee, T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 7$, Т-базис еквіонально еквівалентний одній із алгебр U_1, U_2, U_3, тобто має місце теорема.

Теорема 4. *Т-базис класу M складається з трьох алгебр U_1, U_2, U_3, причому $R(U_3) \subset R(U_2) \subset R(U_1)$.*

У класі алгебр N можна побудувати 128 однотипних алгебр. Проводячи міркування в класах алгебр, аналогічних до M, можемо показати, що Т-базис кожного з класів M^i, $i = 1, 2, \ldots, 127$ складається з трьох алгебр U_1^i, U_2^i, U_3^i для яких справедливі співвідношення $R(U_3^i) \subset R(U_2^i) \subset R(U_1^i)$, $i = 1, 2, \ldots, 127$.
Т-базис класу $M^0 = \{U_l = (A_{l\times l}, \Omega)\}$, $\Omega = (\vee, \wedge)$ складається тільки з однієї алгебри, оскільки всі алгебри цього класу еквіонально еквівалентні.

Розглянемо клас алгебр $N = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$, $k \in \mathbb{N}$, який включає всі сигнатурні замкнені класи одноносієвих алгебр, заданих на бінарних матрицях порядку від 1×1 до $k \times k$. З теореми 2 випливає, що $|N| = k \cdot 2^7$, $k \in \mathbb{N}$.

Задамо в класі алгебр N операції

$$\begin{array}{l} U_3 = U_1 \vee U_2, l_3 = \min(l_1, l_2), \text{ якщо } \Omega_3 = \Omega_1 \bigcup \Omega_2, \\ U_4 = U_1 \wedge U_2, l_4 = \max(l_1, l_2), \text{ якщо } \Omega_4 = \Omega_1 \bigcap \Omega_2. \end{array} \tag{4}$$

Відносно цих операцій алгебри класу N утворюють дистрибутивну решітку, яка складається з сигнатурних 7-мірних кубів класів N. Однотипні алгебри цих кубів утворюють лінійно впорядковані множини.

З теорем 3, 4 випливає справедливість теореми.

Теорема 5. *Т-базис класу алгебр N, складається з 382 алгебр, які утворюють еквіональну решітку відносно операцій (4).*

Доведення. Т-базис класу алгебр N складається з алгебр трьох 7-мірних Ω-кубів класів N_1, N_2, N_3, на яких задані операції:

$$R(U_3) = R(U_1) \vee R(U_2) \Leftrightarrow U_3 = U_1 \vee U_2,$$

$$R(U_4) = R(U_1) \wedge R(U_2) \Leftrightarrow U_3 = U_1 \wedge U_2.$$

Враховуючи, що Ω-мінімальні алгебри цих кубів еквраціонально еквівалентні, отримуємо потужність T-базису класу N: $|N| = 3 \cdot 2^7 - 2 = 382$ алгебри.

1. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука., 1970. – 392 с.
2. *Линдон Р. К.* Тождества в двухзначных исчислениях // Кибернетический сборник.– 1960.— №1.— С.234-245.
3. *Калицкий Я., Скотт Д.* Эквациональная полнота абстрактных алгебр // Кибернетический сборник.– 1961.— №2.– С.41-52.
4. *Линдон Р. К.* Тождества в конечных алгебрах // Кибернетический сборник.– 1960.– **1**, №.– С. 246–248.
5. *Мурский В. Л.* Конечная базируемость тождеств и другие свойства «почти всех» конечных алгебр // Проблемы кибернетики. – 1978. – **8**, №30. – С. 43–56.
6. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции лгебры логики и классы Поста.– М.:Наука, 1966.– 120 с.
7. *Post E.* Two-valued iterative systems, 1941.
8. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
9. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2017. – Вип. 2 (31). – С. 123–128.
10. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри $U(2)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2018. – Вип. 1 (32). – С. 124–129.

Одержано 04.07.2018