УДК 512.547.25
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).52-59

О. А. Тилищак

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри алгебри,
кандидат фізико-математичних наук
alxtlk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7828-3416

ПРО СПАДКОВО НЕЗВІДНІ УНІМОНОМІАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ ЦИКЛІЧНИХ p-ГРУП НАД ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

Задача про опис з точністю до еквівалентності матричних зображень скінченних p-груп порядку вище p над комутативним локальним кільцем характеристики p^s $(s > 0)$, що не є полем, містить у собі класичну нерозв'язну задачу про пару матриць над полем. Тому актуальним є розгляд частинних випадків і вивчення матричних зображень спеціального вигляду. Нехай K — комутативне кільце з одиницею, G — скінченно породжена група з деякою фіксованою системою твірних елементів $a_1, \ldots, a_r$. Всяке матричне зображення групи G над кільцем K еквівалентне до $\Gamma:\ a_i \to E+M_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, де E — одинична матриця порядку n, M_i — мономіальна матриця порядку n $(i = 1, \ldots, r)$, назвемо *унімономіальним* (це поняття запропонував В. М. Бондаренко). Звідне унімономіальне зображення над кільцем K, в зведеному вигляді якого на діагональних блоках утворюється хоч одне унімономіальне зображення, назвемо *спадково звідним* над кільцем K. Побудовано серію унімономіальних зображень нетривіальної циклічної p-групи $H = \langle a \rangle$ над комутативним локальним кільцем K головних ідеалів характеристики p з нільпотентним радикалом Джекобсона ступеня l $(1 < l < \infty)$, вигляду $a \to E + \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{diag}[\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_n t^{s_n}]$, де $s_i \geq 0$, ε_i — елементи із K^* $(i = 1, \ldots, n)$, t — твірний елемент радикалу Джекобсона кільця K. З'ясовано критерій, коли відображення заданого вигляду задає зображення групи H $(\sum_{j=0}^{|H|-1} s_{i+j} \geq l$ $(i = 1, \ldots, n)$, тут індекси розглядаються за модулем $n)$. З'ясовано достатню умову спадкової незвідності побудованих зображень $((\sum_{i=1}^{n} s_i, n) = 1$, $\sum_{i=1}^{n} s_i < l)$. Крім того, можна отримати спадкову звідність побудованих зображень у випадку, коли $(\sum_{i=1}^{n} s_i, n) > 1$, $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1)$. На основі досліджень В. М. Бондаренка, М. Ю. Бортош подібності мономіальних матриць з'ясовано критерій еквівалентності побудованих зображень (відповідні послідовності $(s_1, \ldots, s_n)$ циклічно еквівалентні, а відповідні добутки $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ рівні за модулем $\mathrm{Ann}(t^s)$, де s — найбільший член вагової послідовності $(s_1, \ldots, s_n)$). У випадку скінченності кільця K засобами обчислень в системі GAP пораховано число всіх, з точністю до еквівалентності, побудованих унімономіальних спадково незвідних матричних зображень циклічної нетривіальної p-групи залежно від числа елементів поля лишків кільця K.

Ключові слова: унімономіальне зображення, спадково незвідне зображення, еквівалентні зображення, мономіальна матриця, GAP.

1. Вступ. З результатів В. М. Бондаренка, Ю. А. Дрозда випливає, що задача про опис, з точністю до еквівалентності, матричних зображень скінченної p-групи, за винятком, коли вона циклічна або її фактор-група за комутантом має тип (2,2), над полем характеристики p містить у собі класичну нерозв'язну задачу про пару матриць над полем [1] (такі задачі називаються дикими). Дикою є також задача про опис, з точністю до еквівалентності, матричних зображень довільних скінченних p-груп порядку вище p над комутативним локальним кільцем характеристики p^s $(s > 0)$, що не є полем [2,3]. Тому актуальним є розгляд частинних випадків і вивчення матричних зображень спеціального вигляду.

Нехай K — комутативне кільце з одиницею, G — скінченно породжена група з деякою фіксованою системою твірних елементів $a_1, \dots, a_r$. Матрицю над кільцем K (не обов'язково квадратну) назвемо *мономіальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить не більше одного ненульового елемента. Всяке матричне зображення групи G над кільцем K еквівалентне до

$$\Gamma: \; a_i \to E + M_i \; (i = 1, \dots, r),$$

де E — одинична матриця порядку n, M_i — мономіальна матриця порядку n $(i = 1, \dots, r)$, назвемо *унімономіальним.* Поняття було запропоноване В. М. Бондаренко [4]. Серія незвідних унімономіальних зображень скінченних p-груп порядку вище p над деякими нетеровими комутативними локальними кільцями характеристики p^s $(s > 0)$ була побудована в [5]. Унімономіальне зображення Γ групи G над кільцем K еквівалентне зображенню

$$\Delta: \; a_i \to \begin{pmatrix} \Delta_1(a_i) & T(a_i) \\ 0 & \Delta_2(a_i) \end{pmatrix} \; (i = 1, \dots, r),$$

де Δ_1 або Δ_2 — унімономіальне зображення групи G, назвемо *спадково звідним* над кільцем K і *спадково незвідним* над кільцем K в іншому випадку.

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош [6] вивчали подібність мономіальних матриць над комутативними локальними кільцями головних ідеалів. Метою статті є застосування цих результатів в теорії модулярних зображень скінченних груп над комутативними локальними кільцями для побудови серії унімономіальних спадково незвідних матричних зображень циклічної нетривіальної p-групи над скінченним локальним кільцем головних ідеалів характеристики p. Теоретичні обчислення доповнюються обчисленнями в системі комп'ютерної алгебри GAP [8].

2. Критерій подібності мономіальних матриць над локальними кільцями головних ідеалів. Всюди далі через K будемо позначати комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем; через K^* групу його оборотних елементів відносно множення. Тоді єдиний максимальний ідеал (радикал Джекобсона) R кільця K дорівнює $tK \neq 0$, де t визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який ненульовий елемент $x \in K$ має вигляд εt^s, де $\varepsilon \in K^*$ і $s \geq 0$ (див. [9]). Число s (яке не залежить від вибору t) називаємо *вагою елемента* x і позначаємо через $w(x)$. Елемент ε вже залежить від t; більш того, навіть при фіксованому t, якщо K не є областю цілісності, він визначається елементом x неоднозначно, а саме $\varepsilon t^s = \varepsilon' t^s$ тоді і лише тоді, коли ε і ε' рівні за модулем $Ann(t^s) = \{y \in K \,|\, yt^s = 0\}$, тобто $\varepsilon - \varepsilon' \in Ann(t^s)$. Ступінь нільпотентності елемента t позначаємо через $l(R)$. Якщо K — область цілісності, то $l(R) = \infty$, і навпаки.

Слідуючи за [6] назвемо матрицю над кільцем K

$$M(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, *канонічно циклічною.* (Питання подібності мономіальних матриць легко зводиться до питання подібності канонічно циклічних матриць над довільним комутативним кільцем з одиницею.) Зрозуміло, що $a_i = \varepsilon_i t^{s_i}$, де $s_i = w(a_i)$ і $\varepsilon_i \in K^*$ (які, згідно з викладеним вище, визначаються a_i неоднозначно). В цьому випадку матрицю $M(a_1, \ldots, a_n)$ позначаємо також через $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, де $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_n)$ і $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Очевидно

$$M(a_1, \ldots, a_n) = M(t^{s_1}, \ldots, t^{s_n}) \cdot \mathrm{diag}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n].$$

Дві послідовності $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ і $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, члени яких належать деякій множині, назвемо *циклічно еквівалентними*, якщо $\overline{y}$ отримується із $\overline{x}$ циклічною перестановкою її членів: $\overline{y} = (x_k, \ \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1})$.

Теорема 1 ([6]). *Матриці $M = M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ і $M' = M(\overline{w'}, \overline{\varepsilon'})$, де $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\overline{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$, подібні тоді і лише тоді, коли $\overline{w}$ та $\overline{w'}$ циклічно еквівалентні, а елементи $\varepsilon = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i$ і $\varepsilon' = \prod_{i=1}^n \varepsilon'_i$ кільця K рівні за модулем $Ann(t^s)$, де s — найбільший член вагової послідовності $\overline{w}$.*

3. Спадкова незвідність канонічно циклічних матриць над локальними кільцями головних ідеалів. Канонічно циклічну матрицю M над кільцем K подібну над кільцем K матриці

$$\begin{pmatrix} M_1 & T \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

де M_1 або M_2 — канонічно циклічна матриця над кільцем K, назвемо *спадково звідною* над кільцем K і *спадково незвідною* над кільцем K в іншому випадку. Для доведення спадкової незвідності канонічно циклічної матриці $M = M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, де $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_n)$, в деяких випадках використовуватимемо аналіз її характеристичного многочлена

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_n t^{s_n} \\ \varepsilon_1 t^{s_1} & -\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}} & -\lambda \end{vmatrix} = \tag{1}$$

$$(-\lambda)^n + (-1)^{n-1} \varepsilon t^{\sum_{i=1}^n s_i} = (-1)^n (\lambda^n - \varepsilon t^s),$$

де $\varepsilon = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i$, $s = \sum_{i=1}^n s_i$. Нам буде корисна лема.

Лема 1. *Нехай для натуральних чисел n', n $n' < n$ та невід'ємних цілих чисел s', s, $ns' \neq n's$, $t^s \neq 0$, то многочлен $\lambda^n - \varepsilon t^s$ від невідомої λ над кільцем K не ділиться на многочлен $\lambda^{n'} - \varepsilon' t^{s'}$ для жодних елементів $\varepsilon, \varepsilon' \in K^*$.*

Доведення. Нехай для деякого $\varepsilon' \in K^*$

$$f(\lambda) = \beta_0 \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} \lambda + \beta_n =$$

$$= (\lambda^{n'} - \varepsilon' t^{s'})(\alpha_0 \lambda^{n-n'} + \alpha_1 \lambda^{n-n'-1} + \cdots + \alpha_{n-n'-1} \lambda + \alpha_{n-n'}) \ (\alpha_i, \beta_i \in K).$$

Тоді

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{якщо} \quad 0 \le i < n', \\ \alpha_i - \varepsilon' t^{s'} \alpha_{i-n'}, & \text{якщо} \quad n' \le i \le n - n', \\ -\varepsilon' t^{s'} \alpha_{i-n'}, & \text{якщо} \quad n - n' < i \le n, \end{cases} \tag{2}$$

Припустимо $f(\lambda) = \lambda^n - \varepsilon t^s$ для деякого $\varepsilon \in K^*$. Тобто $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \cdots = \beta_{n-1} = 0$, $\beta_n = -\varepsilon t^s$. Для будь-якого j $(0 < j < n')$ одержуємо $j < n$, $\beta_j = 0$ і за (2) $\alpha_j = \beta_j = 0$. Тобто,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n'-1} = 0. \tag{3}$$

Якщо $0 \le j \le n - 2n'$ (випадок $n < 2n'$, при якому жодного j не існує, не виключається з розгляду), то $0 < j + n' < n$, $\beta_{j+n'} = 0$. Крім того, $n' \le j + n' \le n - n'$ і за (2) $\alpha_{j+n'} = \varepsilon' t^{s'} \alpha_j$. Звідси враховуючи (3) $\alpha_i = 0$, $(i \not\equiv 0 \pmod{n'}$, $i = 1, \ldots, n - n')$. Оскільки, згідно (2), $\varepsilon' t^{s'} \alpha_{n-n'} = \beta_n = -\varepsilon t^s \ne 0$, то $\alpha_{n-n'} \ne 0$ і $n \equiv n - n' \equiv 0 \pmod{n'}$. Нехай $n = n'd$ для відповідного цілого d. Зрозуміло, $d > 1$. Крім того, $\beta_{in'} = 0$ $(i = 1, \ldots, d-1)$. Тому згідно (2), $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_{in'} = \varepsilon' t^{s'} \alpha_{(i-1)n'}$ $(i = 1, \ldots, d-1)$, $-\varepsilon' t^{s'} \alpha_{n-n'} = \beta_n = -\varepsilon t^s$. Тоді $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{in'} = \varepsilon' t^{s'} \alpha_{(i-1)n'}$ $(i = 1, \ldots, d-1)$, $\varepsilon' t^{s'} \alpha_{n-n'} = \varepsilon t^s$. Звідки $\varepsilon'^d t^{s'd} = \varepsilon t^s$. Оскільки $t^s \ne 0$, то $s'd = s$ і $ns' = n'ds' = n's$, що суперечить умові.

Теорема 2. *Матриця $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ спадково незвідна, якщо послідовність $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_n)$ задовольняє умови $(s, n) = 1$, $t^s \ne 0$, де $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$.*

Доведення. Характеристичний многочлен $\lambda^n - \varepsilon t^s$ ($\varepsilon \in K^*$, t — твірний елемент радикала кільця K) канонічно циклічної матриці $M = M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ у випадку спадкової звідності ділиться на характеристичний многочлен $\lambda^{n'} - \varepsilon' t^{s'}$ ($\varepsilon' \in K^*$, s' — невід'ємне ціле число) канонічно циклічної матриці порядку $n' < n$, Тоді за лемою 1 $ns' = n's$. Оскільки $(s, n) = 1$, то n ділить n', $n \le n'$, що неможливо.

Зауважимо, що з [7] можна отримати спадкову звідність матриці $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, якщо послідовність $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_n)$ задовольняє умову $(s, n) > 1$, де $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$, а послідовність $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ задовольняє умову $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$.

4. Унімономіальні зображення циклічних p-груп над скінченним комутативним локальним кільцем головних ідеалів. Нехай далі p — просте число, яке є характеристикою кільця K, $1 < l(R) = l < \infty$, $H = \langle a \rangle$ — скінченна циклічна p-група з деяким фіксованим твірним елементом a, $|H| = m$. Побудуємо, з точністю до еквівалентності, серію (відповідних до вибору a) спадково незвідних унімономіальних зображень групи H над кільцем K. Легко бачити, що всяке таке зображення групи H еквівалентне до

$$\Gamma_{\overline{w}, \overline{\varepsilon}}: \ a \to \Gamma_{\overline{w}, \overline{\varepsilon}}(a) = E + M(\overline{w}, \overline{\varepsilon}), \tag{4}$$

де E — одинична матриця порядку n, $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ — спадково незвідна канонічно циклічна матриця порядку n. За теоремою 2 матриця $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ спадково незвідна, якщо послідовність $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_n)$ задовольняє умови $(s, n) = 1$, $t^s \ne 0$, де $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

Твердження 1 ([10]). *Нехай E — одинична матриця порядку n, $s_i \ge 0$ і ε_i — елементи із K^* $(i = 1, \ldots, n)$. відображення*

$$\Gamma_{\overline{w}, \overline{\varepsilon}}: \ a \to \Gamma_{\overline{w}, \overline{\varepsilon}}(a) = E + M(\overline{w}, \overline{\varepsilon}).$$

є зображенням групи H тоді і тільки тоді, коли $\sum_{j=0}^{m-1} s_{i+j} \geq l$ $(i = 1, \ldots, n)$, при цьому індекси $i+j$ треба замінити на індекси $i+j-kn$, якщо $i+j > kn$, де k — максимально можливе натуральне число (тут індекси розглядаються за модулем n).

За теоремою 1 два зображення вигляду 4 над кільцем K еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні $\overline{w}$ циклічно еквівалентні, а відповідні елементи $\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ кільця K рівні за модулем $Ann(t^s)$, де s — найбільший член вагової послідовності $\overline{w}$.

Нехай K/R — скінченне поле з k елементів. Тоді (див. [10]) кільце K скінченне і, зокрема, $|K| = k^l$, $|K/t^iK| = k^i$, $|(K/t^iK)^*| = (k-1)k^{i-1}$ $(i = 1, \ldots, l)$. Таким чином, число спадково незвідних нееквівалентних унімономіальних зображень групи H вигляду (4) у випадку, коли m є деяким степенем числа p, не менше числа $V(k, l, m, n)$ послідовностей $(s_1, \ldots, s_n, \varepsilon)$, таких, що $s_i \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$, $(\sum_{i=1}^{n} s_i, n) = 1$, $\sum_{i=1}^{n} s_i < l$, $\sum_{j=0}^{m-1} s_{i+j} \geq l$ $(i = 1, \ldots, n)$, ε належить множині представників всіх різних суміжних класів $(K/Ann(t^s))^* = (K/t^{l-s}K)^*$, $s = \max_{i=1}^{n}(s_i)$, $\overline{w} = (s_1, \ldots, s_n)$ — найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних. (Для зручності ми знаходитимо $V(k, l, m, n)$ і у випадку, коли m не є степенем жодного простого числа.)

Очевидно, $V(k, 5, 8, 3)$ є числом послідовностей $(s_1, s_2, s_3, \varepsilon)$, де $0 \leq s_i < 5$ $(i = 1, \ldots, 3)$, $(s_1 + s_2 + s_3, 3) = 1$,

$$s_1 + s_2 + s_3 < 5, \qquad 3s_1 + 3s_2 + 2s_3 \geq 5,$$
$$2s_1 + 3s_2 + 3s_3 \geq 5, \qquad 3s_1 + 2s_2 + 3s_3 \geq 5,$$

ε належить множині представників всіх різних суміжних класів $(K/t^{5-s}K)^*$ $(s = \max_{i=1}^{n}(s_i))$, $\overline{w} = (s_1, s_2, s_3)$ — найменша в лексикографічному порядку серед їй циклічно еквівалентних. Легко бачити, що для розглядуваних послідовностей $s_1 + s_2 + s_3 \in \{2, 4\}$. Перебір таких послідовностей $(s_1, s_2, s_3, \varepsilon)$ разом з s та кількістю варіантів для ε дасть

$(0, 1, 1, \varepsilon)$-1-$(k-1)k^3$, $\quad (0, 0, 4, \varepsilon)$-4-$(k-1)$, $\quad (0, 1, 3, \varepsilon)$-3-$(k-1)k$,
$(0, 2, 2, \varepsilon)$-2-$(k-1)k^2$, $\quad (0, 3, 1, \varepsilon)$-3-$(k-1)k$, $\quad (1, 1, 2, \varepsilon)$-2-$(k-1)k^2$.

Таким чином, $V(k, 5, 8, 3) = (k-1)(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) = k^4 + k^3 - k - 1$.

При $l = 5$, $m = 8$, $n = 3$ число $V(k, l, m, n)$ можна обчислити, наприклад, такою серією команд системи GAP 4.10.1.

```
l:=5;m:=8;n:=3;maxl:=[];maxnuml:=[];k:=Indeterminate(Integers,"k");
P:=Filtered([1..l-1],f->GcdInt(f,n)=1);       # Числа <l в.прості з n
f:=List([1..n], x->0);              # формуємо послідовність з n нулів
repeat
 if Sum(f) in P then            # послідовності чиї суми в.прості з n
  if ForAll([1..n],i->Sum([0..m-1],j->f[(j+i-1) mod n+1])>=l) then
   Add(maxl,Maximum(f)); fi;fi;
   # формуємо наступну послідовність з n-ї степені множин {0,...,l-1}
 for i in [1..n] do f[i]:=(f[i]+1)mod l; if f[i]=0 then break;fi;od;
until Sum(f)=0;
for s in [1..l-1] do Add(maxnuml,Number(maxl,x->x=s)*k^(l-s-1));od;
Print(Sum(maxnuml)*(k-1)/n);          # Враховуємо ц. еквівалентність.
```

В одному класі послідовностей $(s_1, \ldots, s_n, \varepsilon)$, таких, що $(\sum_{i=1}^{n} s_i, n) = 1$, з циклічно еквівалентними $(s_1, \ldots, s_n)$ є рівно n послідоностей, оскільки будь-який циклічний зсув послідовності $(s_1, \ldots, s_n)$ генерує відмінну від початкової послідовність, бо $(\sum_{i=1}^n s_i, n) = 1$. В результаті обчислень також одержуємо $V(k, 5, 8, 3) = k^4 + k^3 - k - 1$. Тут подано обчислення $V(k, l, m, n)$ для $m = 8$, $m = 5$, до прикладу, при деяких значеннях l та n.

Таблиця 1. Обчислення $V(k, l, 8, n)$

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$l=2$	$k-1$	$k-1$	$k-1$	0	0
$l=3$	k^2-k	k^2-1	0	k^2-k	0
$l=4$	k^3-1	k^3-k	k^3+2k^2-2k-1	$2k^3-2k$	0
$l=5$	k^3-k	$\boxed{k^4+k^3-k-1}$	$k^4+2k^3-2k^2-$ $-k$	k^4+6k^3- $-5k^2-2k$	0
$l=6$	k^4+k^3- $-k^2-1$	$3k^4+2k^3-2k^2-$ $-2k-1$	$k^5+6k^4-4k^2-$ $-2k-1$	k^5+k^4- $-2k^3$	k^5+6k^4- $-6k^3-k^2$

Таблиця 2. Обчислення $V(k, l, 5, n)$

	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$l=2$	$k-1$	0	0
$l=3$	0	k^2-k	0
$l=4$	k^2-1	0	0
$l=5$	k^3-k	$2k^3-2k$	0
$l=6$	$k^4+k^3-k^2-1$	$3k^4-k^2-2k$	k^4-k^3
$l=7$	k^5-k	$k^5+2k^4-3k^3$	0
$l=8$	$k^5+k^4-k^2-1$	$k^6+k^5+2k^4-k^3-k^2-2k$	$k^6+2k^5-2k^4-k^3$
$l=9$	$k^6+k^5-k^3-k$	$3k^6+5k^5-k^4-4k^3-k^2-2k$	0
$l=10$	$k^7+k^6+k^5-k^4-$ $-k^2-1$	$3k^7+5k^6-4k^5-k^4-3k^3$	$4k^7+2k^6-3k^5-$ $-2k^4-k^3$
$l=11$	$k^8+k^7-k^3-k$	$3k^8+3k^7+3k^6-4k^5-k^4-$ $-k^3-k^2-2k$	k^8-k^7
$l=12$	$k^9+k^7+k^6-k^4-$ $-k^2-1$	$k^9+6k^8+2k^7+2k^6-2k^5-$ $-2k^4-4k^3-k^2-2k$	$k^9+8k^8+k^7-4k^6-$ $-3k^5-2k^4-k^3$

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі знаходиться число всіх, з точністю до еквівалентності, унімономіальних спадково незвідних матричних зображень спеціального вигляду циклічної нетривіальної p-групи над скінченним локальним кільцем K характеристики p, яке подано формулою від числа елементів поля лишків кільця K. Залежність від ступені нільпотентності радикала Джекобсона кільця K, порядку групи, степені зображень реалізовано програмно. Цікаве є формульне представлення останніх залежностей та охоплення всіх унімономіальних спадково незвідних матричних зображень.

Автор щиро вдячний професору В. М. Бондаренку за увагу до роботи і цінні поради.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Модули и представления*: Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1977. 71. С. 24–41.
2. Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцом классов вычетов. *Математический сборник.* Киев: "Наукова думка" . 1976. С. 275–277.
3. Гудивок П. М., Погориляк В. И. Матричные представления конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами характеристики p^s. *Укр. матем. журнал.* 2002. 54, № 6. С. 764–770.
4. Бондаренко В. М. Приватне спілкування. 2019.
5. Гудивок П. М., Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем.* 1998. Вип. 3. С. 78–83.
6. Бондаренко В. М., Бортош М. Ю. Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем. *Укр. матем. журнал.* 2017. 69, № 7. С. 889–904.
7. Бортош М. Ю., Тилищак О. А. Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2013. № 14. С. 68–78.
8. The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.1. 2019. `http://www.gap-system.org`.
9. O. Samuel, P. Zariski. Commutative Algebra (Part I), Canada: D. Van Nostrand Company. 1965.
10. Тилищак О. А. Про число нерозкладних модулярних зображеннь циклічної p-групи над скінченним локальним кільцем. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2018. Вип. 16. С. 19–29.

Tylyshchak A. A. On hereditary irreducible unimonomial representations of cyclic p-groups over local rings of characteristic p.

The task of the description up to equivalency of the matrix representations of finite p-groups of order greater then p over a commutative local ring of characteristics of p^s $(s > 0)$ that is not a field contains the classical unsolved problem of pair of matrices over a field. Therefore, consideration of partial cases and the study of special representation matrix representations is important. Let K be a commutative ring with an identity, G is a finitely generated group with some fixed system of generator elements $a_1, \dots, a_r$. Every matrix representation of the group G over the ring K equivalent to $\Gamma: \ a_i \to E + M_i$ $(i = 1, \dots, r)$, where E be an identity $n \times n$-matrix, M_i be a monomial $n \times n$-matrix $(i = 1, \dots, r)$, we call *unimonomial* (this notion was proposed by M. M. Bondarenko). An reducible unimonomial representation over the ring K, in a reducible form of which on diagonal blocks at least one unimonomial representation is formed, we call *hereditary reducible* over the ring K. A series of unimonomial representations of a finite cyclic p-group $H = \langle a \rangle$ over commutative local principle ideal ring K of characteristic p with nilpotent Jacobson radical of the degree l $(1 < l < \infty)$ of the form $a \to E + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}[\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_n t^{s_n}]$, where $s_i \geq 0$, ε_i be elements from K^* $(i = 1, \dots, n)$, t be a generator element of Jacobson radical ring K. It is making up clear the criterion, when the map of the given form sets the representation of the group H $(\sum_{j=0}^{|H|-1} s_{i+j} \geq l$ $(i = 1, \dots, n)$, here the indexes are considered by the module n). It have been found the sufficient condition of hereditary irreducibility of the constructed representations $((\sum_{i=1}^{n} s_i, n) = 1, \sum_{i=1}^{n} s_i < l)$. In addition, we can obtain the hereditary reducibility of the constructed representations in the case when $(\sum_{i=1}^{n} s_i, n) > 1$, $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1)$. Based on the researches of V. M. Bondarenko, M. Yu. Bortosh of similarity of the monomial matrices it is making up clear the criterion the equivalence of the constructed representations (the corresponding sequences $(s_1, \dots, s_n)$ are cyclically equivalent a relevant products $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ are equal modulo Ann (t^s), where s is the largest member of the weight sequence $(s_1, \dots, s_n)$). In the case of the finiteness of the ring K by computation in the GAP system it have been found the number of all, up to equivalence, constructed unimonomial hereditary irreducible matrix representations of a cyclic nontrivial p-group depending on the number of elements of the residue class field of the ring K.

Keywords: unimonomial representation, hereditary irreducible representation, equivalent representations, monomial matrix, GAP.

References

1. Bondarenko, V. M., & Drozd, Yu. A. (1977). Predstavlencheskiy tip konechnykh grupp [The representation type of finite groups]. *Modules and representations: Zapiski Nauchnyh Seminarov LOMI, 71*, 24–41 [in Russian].
2. Bondarenko, V. M. (1976). O podobii matrits nad koltsom klassov vychetov [On the similarity of matrices over a ring of residue classes]. *Matematicheskii Sbornik, Kyiv: Naukova Dumka*, 275–277 [in Russian].
3. Gudivok, P. M., & Pogoriljak, V. J. (2002). Matrichnyye predstavleniya konechnykh p-grupp nad kommutativnymi lokal'nymi kol'tsami kharakteristiki p^s [Matrix representations of finite p -groups over commutative local rings of characteristic p^s]. *Ukrainian Mathematical Journal, 54, 6*, 764–770 [in Russian].
4. Bondarenko, V. M. (2019). Private communication.
5. Gudivok, P. M., & Tylyshchak, A. A. (1998). Pro nezvidni modulyarni zobrazhennya skinchennykh p-hrup nad komutatyvnymy lokal'nymy kil'tsyamy [On irreducible modular representations of finite p-groups over commutative local rings]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 3*, 78–83. [in Ukrainian].
6. Bondarenko, V. M., & Bortos, M. Yu. (2017). Nerozkladni ta izomorfni ob'yekty v katehoriyi monomial'nykh matryts' nad lokal'nym kil'tsem [Indecomposable and isomorphic objects in the category of monomial matrices over a local ring]. *Ukrainian Mathematical Journal, 69, 7*, 889–904 [in Ukrainian].
7. Bortos, M. Yu., & Tylyshchak, A. A. (2013). Privodimost' nekotorykh monomial'nykh matrits nad kommutativnymi lokal'nymi kol'tsami [The reducibility of some monomial matrices over commutative local rings]. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics, 14*, 68–78 [in Russian].
8. The GAP Group. (2019). *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.1.* Retrieved from `http://www.gap-system.org`.
9. Samuel, O., & Zariski, P. (1965). Commutative Algebra (Part I), Canada: D. Van Nostrand Company.
10. Tylyshchak, A. A. (2018). Pro chyslo nerozkladnykh modulyarnykh zobrazhenn' tsyklichnoyi p-hrupy nad skinchennym lokal'nym kil'tsem [On the number of indecomposable modular representations of a cyclic p-group over finite local ring]. *Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 16*, 19–29.

Одержано 11.04.2019