УДК 517.925
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).26-41

Н. П. Колун

Військова академія, Одеса,
старший викладач кафедри фундаментальних наук
nataliiakolun@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2899-5276

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНОГО ТИПУ

У даній роботі для диференціального рівняння другого порядку, яке містить у правій частині суму доданків з правильно та швидко змінними нелінійностями, встановлюються необхідні та достатні умови існування так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків (Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$) в особливому випадку, коли параметр $\lambda_0 = \pm\infty$. Також встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Результати роботи отримані в припущенні, що на кожному розв'язку із класу що розглядається права частина досліджуваного диференціального рівняння еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку зі швидко змінною нелінійністю. Цей доданок вважається головним у правій частині рівняння. Метод виділення головного доданку був запропонований Г. Харді при дослідженні диференціального рівняння першого порядку. Пізніше А. В. Костін, В. М. Євтухов, Є. В. Шебаніна скористалися таким методом при дослідженні асимптотичних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку зі степеневими нелінійностями. При вивченні асимптотичних властивостей множини $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків, яка відповідає вказаному значенню параметра λ_0, була використана методика, що запропонована В.М. Євтуховим при дослідженні разом з А.Г. Черниковою двочленного диференціального рівняння зі швидко змінною нелінійністю. Робота має теоретичний характер. Отримані результати та застосована в роботі методика можуть бути використані для побудови асимптотичної теорії диференціальних рівнянь більш загального виду, які містять у правій частині суму доданків з правильно та швидко змінними нелінійностями.

Ключові слова: асимптотичні властивості, диференціальні рівняння другого порядку, швидко змінні нелінійності.

1. Вступ. В останні десятиріччя активно вивчаються асимптотичні властивості розв'язків двочленних диференціальних рівнянь з нелінійністю, яка відмінна від степеневої функції. Випадок, коли нелінійність є правильно змінною функцією, був досліджений у роботах [1–6], а коли нелінійність є швидко змінною функцією — в [7–11]. Ці результати стали передумовою для дослідження в роботі [12] диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків з правильно змінними нелінійностями. Цілком логічно розглянути питання про асимптотичну поведінку розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, які в правій частині, окрім доданків з правильно змінними нелінійностями, містять і доданки зі швидко змінними нелінійностями. Саме такому виду рівнянь присвячена ця робота, в якій розглядатимуться $P_\omega(Y_0, \lambda_0)-$ розв'язки диференціального рівняння другого порядку при $\lambda_0 = \pm\infty$. Така класифікація розв'язків диференціальних рівнянь була запропонована в [13] В.М. Євтуховим. У роботах [14–16] розглянуто випадки, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ та $\lambda_0 = 1$.

Дослідження проводитимуться в припущенні, що на кожному $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$– розв'язку диференціального рівняння, що розглядається в роботі, права частина рівняння еквівалентна при $t\uparrow\omega$ одному доданку зі швидко змінною нелінійністю. Такий підхід дозволяє скористатися методикою, яку запропонував В.М. Євтухов при дослідженні разом з А.Г. Черниковою $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$– розв'язків двочленного диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю.

2. Постановка задачі та допоміжні результати. Розглядається диференціальне рівняння

$$y''=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

в якому $\alpha_i\in\{-1,1\}$ $(i=\overline{1,m})$, $p_i:[a,\omega[\rightarrow]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$ – неперервні функції, $-\infty<a<\omega\le+\infty$; $\varphi_i:\Delta_{Y_0}\rightarrow]0,+\infty[$ $(i=\overline{1,m})$, де Δ_{Y_0} - однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є неперервними функціями при $i=\overline{1,l}$ і двічі неперервно диференційовними при $i=\overline{l+1,m}$, причому для кожного $i\in\{1,\dots,l\}$ при деякому $\sigma_i\in\mathbb{R}$ виконуються умови

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)}=\lambda^{\sigma_i}\quad \text{для будь-якого}\quad \lambda>0, \tag{2}$$

а для кожного $i\in\{l+1,\dots,m\}$ –

$$\varphi_i'(y)\neq0\quad \text{при}\quad y\in\Delta_{Y_0},\quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi_i(y)\in\{0,+\infty\},\quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)}=1. \tag{3}$$

Функції φ_i $(i=\overline{1,l})$, які задовольняють умови (2), є правильно змінними при $y\to Y_0$ функціями порядків σ_i $(i=\overline{1,l})$ (див. монографію Є. Сенети [17], Розділ 1, §1, С.9). Для них справедливі представлення виду

$$\varphi_i(y)=|\,y\,|^{\sigma_i}\,L_i(y)\quad (i=\overline{1,l}), \tag{4}$$

де L_i $(i=\overline{1,l})$ – повільно змінні функції при $y\to Y_0$.

Із умов (3) безпосередньо випливають граничні співвідношення

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}=\pm\infty\quad (i=\overline{l+1,m}), \tag{5}$$

в силу яких при $i\in\{l+1,\dots,m\}$ кожна із функцій φ_i та її похідна першого порядку є швидко змінними при $y\to Y_0$ функціями (див. монографію В. Марича [7], Розділ 3, §3.4, Леми 3.2, 3.3, С.91-92).

Означення 1. *Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язком, де $-\infty\le\lambda_0\le+\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ і задовольняє наступні умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}y(t)=Y_0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}y'(t)=\begin{cases}\text{або}\ \ 0,\\ \text{або}\ \ \pm\infty,\end{cases}\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)}=\lambda_0.$$

Метою роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ – розв'язків y диференціального рівняння (1), а також асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їх похідних першого порядку у випадку, коли для деякого $s \in \{l+1, \dots, m\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \tag{6}$$

Введемо функцію $\pi_\omega : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, вважаючи, що

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Лема 1. *Нехай $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$– довільний $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$– розв'язок диференціального рівняння (1). Тоді*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = 0. \tag{7}$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає із роботи В.М. Євтухова [13] (див. наслідок 10.1).

В подальшому будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b), \quad \text{де} \quad \Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b, Y_0[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл} \quad Y_0, \\ ]Y_0, b], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл} \quad Y_0, \end{cases}$$

Число b при цьому задовольняє нерівності

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0, \quad b > 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty, \quad b < -1 \quad \text{при} \quad Y_0 = -\infty.$$

У роботі В.М. Євтухова і А.Г. Чернікової [11] з використанням результатів із монографії N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels [18] (Розділ 3, п. 3.10, с. 178) було показано, що двічі неперервно диференційовна функція $f : \Delta_{Y_0}(b) \to]0, +\infty[$, яка задовольняє умови

$$f'(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}(b), \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = Z_0 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f''(y) f(y)}{f'^2(y)} = 1,$$

належить так званому класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був отриманий в результаті розширення класу Г, що введений Л. Ханом (див., наприклад, [18], Розділ 3, п.3.10, с.175). Також були вказані властивості функцій із класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, які будуть використані при доведенні основних результатів роботи.

3. Основні результати. Передусім, введемо необхідні в подальшому позначення. Нехай

$$\nu_0 = \operatorname{sign} b, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]. \end{cases}$$

Враховуючи означення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків диференціального рівняння (1), зауважимо, що числа ν_0 і ν_1 визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язку та його першої похідної в деякому лівому околі ω. При цьому ясно, що умови

$$\nu_0\nu_1 = -1, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 = 1, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty$$

є необхідними для існування $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ – розв'язків. Звідси, враховуючи те, що при $\lambda_0=\pm\infty$ згідно з лемою 1, виконується нерівність

$$\nu_0\nu_1\pi_\omega(t)>0 \quad \text{при} \quad t\in[a,\omega[, \tag{8}$$

випливає, що умови

$$Y_0=0, \quad \text{якщо} \quad \omega<+\infty, \quad Y_0=\pm\infty \quad \text{якщо} \quad \omega=+\infty, \tag{9}$$

також є необхідними для існування $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$–розв'язків у рівняння (1).

Наступна теорема розповсюджує результат, який отриманий В.М. Євтуховим та А.Г. Черниковою при дослідженні $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$ – розв'язків двочленного диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю.

Теорема 1. *Кожний $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$–розв'язок диференціального рівняння (1), який задовольняє при деякому $s\in\{l+1,\dots,m\}$ умови (6), має вигляд*

$$y(t)=\pi_\omega(t)L(t), \tag{10}$$

де $L:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\nu_0L(t)\pi_\omega(t)>0, \quad L'(t)\neq0 \quad \textit{при} \quad t\in[t_1,\omega[\quad (t_1\in[t_0,\omega[), \tag{11}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}L(t)\in\{0;\pm\infty\}, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)L(t)=Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}=0, \tag{12}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{p_s(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}=0 \quad \textit{для будь-якого} \quad i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{s\}. \tag{13}$$

При цьому, якщо існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя $\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}$, крім того, виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}=-1, \quad \alpha_sL'(t)>0 \quad \textit{при} \quad t\in[t_1,\omega[\tag{14}$$

і має місце асимптотичне співвідношення

$$p_s(t)\sim\frac{\alpha_sL'(t)}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))} \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$– довільний $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$– розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (6). Тоді для цього розв'язку, згідно з лемою 1, виконується перша з умов (7). В силу цієї умови y є нормалізованою правильно змінною функцією першого порядку при $t\uparrow\omega$ (див. монографію Є. Сенети [17], розд.1, п.1.2, стор. 15) і тому зображена у вигляді (10), де $L:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ – повільно змінна при $t\uparrow\omega$ функція, що задовольняє першу з нерівностей (11) і останню з умов (12).

Так як має місце зображення (10) і згідно з останньою умовою (12)

$$y'(t)=\pi_\omega(t)L'(t)+L(t)=L(t)\left[\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}+1\right]\sim L(t) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

то, зважаючи на означення $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$– розв'язку, виконуються перша та друга умови (12).

Далі, оскільки y є розв'язком диференціального рівняння (1), то

$$\pi_\omega(t)L''(t) + 2L'(t) = \alpha_s p_s(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

Розглядаючи останню рівність як лінійне неоднорідне рівняння відносно L', отримаємо, що

$$L'(t) = \frac{1}{\pi_\omega^2(t)}\left[C + \alpha_s \int\limits_{A_s}^{t} \pi_\omega(\tau)p_s(\tau)\varphi_s(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau[1+o(1)]\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де C– довільна стала і

$$A_s = \begin{cases} t_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} |\pi_\omega(\tau)|p_s(\tau)\varphi_s(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} |\pi_\omega(\tau)|p_s(\tau)\varphi_s(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

З цього зображення випливає, що у випадку $A_s = t_0$

$$L'(t) \sim \frac{\alpha_s}{\pi_\omega^2(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega(\tau)p_s(\tau)\varphi_s(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

а у випадку $A_s = \omega$ або

$$L'(t) = \frac{1}{\pi_\omega^2(t)}[C + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \text{де} \quad C \neq 0,$$

або

$$L'(t) \sim \frac{\alpha_s}{\pi_\omega^2(t)} \int\limits_{\omega}^{t} \pi_\omega(\tau)p_s(\tau)\varphi_s(\pi_\omega(\tau)L(\tau))\,d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В обох випадках $L'(t) \neq 0$ на деякому проміжку $[t_1, \omega[$, де $t_1 \in [t_0, \omega[$, тобто виконується друга з умов (11).

Умова (13) безпосередньо випливає з (6) і (10).

Припустимо, що для функції L існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}$. Тоді, використовуючи правило Лопіталя у формі Штольця, з урахуванням другої з умов (11), першої та третьої з умов (12), знаходимо

$$0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Звідси безпосередньо випливає перша з умов (14). Враховуючи цю умову, із (16) маємо

$$\alpha_s p_s(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t)) \sim L'(t)\left[2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}\right] \sim L'(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

звідки випливає справедливість асимптотичного співвідношення (15) і другої з умов (14). Теорема повністю доведена.

Зауваження 1. *У випадку, коли $l = 0$, тобто, коли всі нелінійності в правій частині (1) є швидко змінними функціями, твердження теореми 1 також залишається справедливим.*

Нижче будемо говорити, що дотримуються умови $\mathcal{N}$, якщо виконуються умови (8), (9) і для деякої двічі неперервно диференційовної функції $L : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ ($t_0 \in [a, \omega[$), що задовольняє умови (11), (12) і (14), має місце зображення

$$p_s(t) = \frac{\alpha_s L'(t)[1 + r_s(t)]}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}, \tag{17}$$

де $r_s : [t_0, \omega[\to] - 1, +\infty[$ – неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$ (тобто виконується умова (15)).

Припустимо, що умови $\mathcal{N}$ виконуються і розглянемо питання про фактичне існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$– розв'язків та отримаємо асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. При цьому для деякого $s \in \{l+1, \dots, m\}$ введемо позначення

$$\mu_s = \operatorname{sign} \varphi_s'(y), \quad \psi_s(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)|H_s(\tau)|^{\frac{1}{2}}\, d\tau}{L(\tau)}, \quad H_s(t) = \frac{L^2(t)\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}{L'(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))},$$

$$q_{1s}(t) = \left. \frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2} \right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)}, \quad q_{2s}(t) = \left. \frac{y\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}} \right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

$$G_s(t) = \left. \frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)} \right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)}, \quad e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}$$

і додатково припустимо, що існують скінчені або рівні $\pm\infty$ границі

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H_s'(t)}{|H_s(t)|^{\frac{3}{2}}}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H_s(t)|^{\frac{1}{2}} = \gamma_0. \tag{18}$$

В силу (12) і (14)

$$\lim_{t\uparrow\omega} e_i(t) = 1 \quad (i = 1, 2). \tag{19}$$

Якщо ж урахувати, що

$$H_s(t) = \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \frac{\pi_\omega(t)L(t)\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}, \quad \frac{\varphi_s(y)\varphi_s''(y)}{\varphi_s'^2(y)} = \frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2} + 1,$$

то згідно з умовами (12), (2) і (5) також будемо мати

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_s(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_{1s}(t) = 0. \tag{20}$$

Нарешті покажемо, що при вказаних припущеннях перша з границь (18) дорівнює нулю. Припустимо супротивне. Тоді

$$\frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H_s'(t)}{|H_s(t)|^{\frac{3}{2}}} = b(t), \quad \text{де} \quad \lim_{t\uparrow\omega} b(t) = \left[\begin{array}{c} \text{const} \neq 0; \\ \pm\infty. \end{array} \right. \tag{21}$$

Після ділення цього співвідношення на $\frac{L(t)}{L'(t)}$ та інтегрування на проміжку від t_0 до t, отримаємо

$$-2|H_s(t)|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sign} H_s(t) = C + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}, \tag{22}$$

де C– деяка дійсна стала. Тут

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)} = \ln|L(t)| \frac{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}}{\ln|L(t)|}$$

і згідно з першою із умов (12) та правилом Лопіталя у формі Штольця

$$\lim_{t\uparrow\omega} \ln|L(t)| = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{L'(\tau)b(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}}{\ln|L(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} b(t).$$

Тому із (22), враховуючи другу з умов (21), маємо

$$-2|H_s(t)|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sign} H_s(t) \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Однак цього бути не може, оскільки вираз зліва в силу першої з умов (20) прямує до нуля при $t\uparrow\omega$. Тим самим, отримали протиріччя. Отже,

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \frac{H_s'(t)}{|H_s(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{23}$$

Теорема 2. *Нехай при деякому* $s \in \{l+1,\dots,m\}$

$$\frac{\varphi_s(y)\varphi_i'(y)}{\varphi_s'(y)\varphi_i(y)} = O(1) \quad \textit{при} \quad y \to Y_0 \quad \textit{для будь-якого} \quad i \in \{l+1,\dots,m\}, \tag{24}$$

виконуються умови $\mathcal{N}$, *(13), (23),* $\gamma_0 = \pm\infty$ *і існують скінчені або рівні* $\pm\infty$ *границі*

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_{2s}(t) = \eta_s, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi_s(t)\psi_s''(t)}{\psi_s'^2(t)}.$$

Тоді: 1) якщо $\alpha_s\mu_s = 1$, *то диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю* $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$*– розв'язків, які допускають при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))} o(1), \tag{25}$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)] \left[1 + |H_s(t)|^{-\frac{1}{2}} o(1)\right]; \tag{26}$$

2) якщо $\alpha_s\mu_s = -1$ *і виконуються умови*

$$\eta_s \neq -1; -\frac{3}{4}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \psi_s(t)[r_s(t)+1-e_1^2(t)] = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \psi_s^2(t)[r_s(t)+1-e_2(t)] = 0, \tag{27}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{p_s(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}=0, \tag{28}$$

то диференціальне рівняння (1) має щонайменш один $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$– розв'язок, який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$y(t)=\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}\psi_s^{-1}(t)o(1), \tag{29}$$

$$y'(t)=[L(t)+\pi_\omega(t)L'(t)]\left[1+|H_s(t)|^{-\frac{1}{2}}\psi_s^{-1}(t)o(1)\right], \tag{30}$$

причому, якщо $\eta_s\in\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$, то існує ціла двопараметрична сім'я таких розв'язків.

Теорема 3. *Нехай при деякому $s\in\{l+1,\dots,m\}$ виконуються умови $\mathcal{N}$, (13), (23), (24) і $0<|\gamma_0|<+\infty$. Тоді: 1) якщо $\alpha_s\mu_s=1$, то диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$– розв'язків, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (25), (26); 2) якщо $\alpha_s\mu_s=-1$, то при $\alpha_s\nu_1\gamma_0<0$ диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$– розв'язків, які допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (25), (26), а при $\alpha_s\nu_1\gamma_0>0$ рівняння (1) має щонайменш один такий розв'язок.*

Доведення теорем 2, 3. Рівняння (1) за допомогою замін

$$\begin{aligned}&y(t)=\pi_\omega(t)L(t)+\tfrac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1(t),\\ &y'(t)=[L(t)+\pi_\omega(t)L'(t)]\left[1+|H_s(t)|^{-\frac{1}{2}}y_2(t)\right]\end{aligned} \tag{31}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1'=\frac{L(t)\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))e_1(t)}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}[q_{1s}(t)y_1+y_2],\\ y_2'=\frac{L'(t)e_2(t)}{L(t)e_1(t)}\left[\frac{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))}{L'(t)e_2(t)}(1+R_1(t,y_1))-(1+y_2)\right],\end{cases} \tag{32}$$

де

$$Y(t,y_1)=\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1(t),\quad R_1(t,y_1)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(Y(t,y_1))}{p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))}.$$

Тут в силу зображення (17)

$$\frac{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,y_1))}{L'(t)e_2(t)}=\frac{[1+r_s(t)]\varphi_s(Y(t,y_1))}{e_2(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}.$$

Розкладаючи при фіксованому $t\in[t_1,\omega[$ функцію, що стоїть праворуч, за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Лагранжа до членів другого порядку за змінною y_1, отримаємо

$$\frac{[1+r_s(t)]\varphi_s(Y(t,y_1))}{e_2(t)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}=\frac{1+r_s(t)}{e_2(t)}(1+y_1)+R(t,y_1), \tag{33}$$

$$R(t,y_1)=\frac{1+r_s(t)}{e_2(t)}\frac{\varphi_s''\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1^2,\quad |\xi|<|y_1|.$$

Оскільки

$$Y(t,\xi)=\pi_\omega(t)L(t)\left[1+\frac{1}{\frac{\pi_\omega(t)L(t)\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}}\xi\right],$$

то, зважаючи на другу з умов (12), третю з умов (3) та умову (5),

$$\varphi_s''\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)=\frac{\varphi_s'^2\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)}{\varphi_s\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)}[1+d_1(t,y_1)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega}d_1(t,y_1)=0\quad \text{рівномірно за}\quad y_1\in[-1/2,1/2].$$

Згідно з лемою 2.5 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [11], функції φ_s, $\varphi_s'\in\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ з доповнюючою функцією $g_s(y)=\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$. Тому в силу другої з умов (12), згідно з лемою 2.3 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черникової [11], останнє асимптотичне співвідношення може бути записано у вигляді

$$\varphi_s''\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}\xi\right)=\frac{\varphi_s'^2(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}e^{\xi}[1+d_2(t,y_1)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega}d_2(t,y_1)=0\quad \text{рівномірно за}\quad y_1\in[-1/2,1/2].$$

Звідси випливає, що

$$R(t,y_1)=\frac{1+r_s(t)}{e_2(t)}e^{\xi}[1+d_2(t,y_1)]y_1^2,\quad |\xi|<|y_1|.$$

Зважаючи на це зображення та на умови $\lim\limits_{t\uparrow\omega}r_s(t)=0$, $\quad\lim\limits_{t\uparrow\omega}e_2(t)=1$, для будь-якого $\varepsilon>0$ існують $t_1\in[t_0,\omega[$ і $0<\delta\le\frac{1}{2}$ такі, що

$$|R(t,y_1)|\le(1+\varepsilon)|y_1|^2\quad\text{при}\quad t\in[t_1,\omega[,\quad |y_1|\le\delta. \tag{34}$$

Обираючи довільним чином число $\varepsilon>0$, будемо далі розглядати систему рівнянь (32) на множині

$$\Omega=[t_1,\omega[\times D,\quad \text{де}\quad D=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2;\quad |y_1|\le\delta,\quad |y_2|<1\}.$$

Покажемо, что функція $R_1(t,y_1)$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_1(t,y_1)=0\quad \text{рівномірно за}\quad y_1\in[-\delta,\delta]. \tag{35}$$

Так як функції φ_i при $i\in\{1,\dots,l\}$ є правильно змінними при $y\to Y_0$ $\quad(y\in\Delta_{Y_0}(b))$ порядків σ_i, то в силу зображень (4), враховуючи властивості повільно змінних функцій і те, що в силу (5) і (10)

$$\lim_{t\uparrow\omega}G_s(t)=\pm\infty,$$

маємо

$$\begin{aligned}\varphi_i(Y(t,y_1)) &= \varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)+\tfrac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)=\\ &=\left|\pi_\omega(t)L(t)\left[1+\tfrac{y_1}{G_s(t)}\right]\right|^{\sigma_i}L_i\left(\pi_\omega(t)L(t)\left[1+\tfrac{y_1}{G_s(t)}\right]\right)=\\ &=\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))\left[1+\tfrac{y_1}{G_s(t)}\right]^{\sigma_i}(1+r_i(t,y_1)),\quad (i=\overline{1,l})\end{aligned}\tag{36}$$

де функції $r_i(t,y_1)$ такі, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t,y_1)=0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1\in[-\delta,\delta]. \tag{37}$$

Оскільки функція φ_s задовольняє умови (3) і в якості її доповнюючої функції може бути обрана функція $g_s(y)=\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, то за лемою 2.3 із роботи В.М. Євтухова та А.Г. Черникової [11] отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi_s\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_s\left(y+\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}\cdot y_1\right)}{\varphi_s(y)}=e^{y_1}.$$

Тому

$$\varphi_s\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)=e^{y_1}\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))[1+r_s(t,y_1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{38}$$

де функція $r_s(t,y_1)$ така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_s(t,y_1)=0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_1\in[-\delta,\delta]. \tag{39}$$

В силу (13), (36), (37), (38), (39) маємо

$$\begin{aligned}&\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)}=\\ &=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))\left[1+\frac{y_1}{G_s(t)}\right]^{\sigma_i}(1+r_i(t,y_1))}{\alpha_s p_s(t)e^{y_1}\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))(1+r_s(t,y_1))}=0\end{aligned}\tag{40}$$

рівномірно за $y_1\in[-\delta,\delta]$. Якщо ж $i\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{s\}$, то в силу виконання умов (24) для будь-якого $C_i>1$ існує $t_{2i}\in[t_1,\omega[$ таке, що при $t\in[t_{2i},\omega[$, зважаючи на монотонність функції φ_i на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$

$$\begin{aligned}\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)-\tfrac{\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_i'(\pi_\omega(t)L(t))}C_i|y_1|\right)&\le\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)+\tfrac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)\le\\ &\le\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)+\tfrac{\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_i'(\pi_\omega(t)L(t))}C_i|y_1|\right).\end{aligned}\tag{41}$$

Так як функція φ_i $(i=\overline{l+1,m})$ задовольняє умови (3) та має доповнюючу функцію виду $g_i(y)=\frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$, то, переходячи в нерівності (41) до границі при $t\uparrow\omega$, згідно з лемою 2.3 із роботи В.М. Євтухова і А.Г. Черниквої [11], отримаємо

$$\begin{aligned}e^{-C_i|y_1|}\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)\right)&\le\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)+\tfrac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)\le\\ &\le e^{C_i|y_1|}\lim_{t\uparrow\omega}\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)\right).\end{aligned}\tag{42}$$

В силу (38) і (42) для кожного $i \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{s\}$ маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{-C_i|y_1|}\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))(1+r_s(t,y_1))} \le \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\Big(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\Big)}{p_s(t)\varphi_s\Big(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\Big)} \le$$

$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)e^{C_i|y_1|}\varphi_i(\pi_\omega(t)L(t))}{p_s(t)e^{y_1}\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))(1+r_s(t,y_1))},$$

звідки, зважаючи на (13) і (39), випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=l+1\\ i\neq s}}^{m} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(\pi_\omega(t)L(t)+\frac{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))}y_1\right)} = 0 \text{ рівномірно за } y_1 \in [-\delta, \delta].$$

Із останнього співвідношення та (40) витікає справедливість (35).

В силу (33) система (32) на множині Ω має вид

$$\begin{cases} y_1' = \frac{L(t)\varphi_s'(\pi_\omega(t)L(t))e_1(t)}{\varphi_s(\pi_\omega(t)L(t))}[q_{1s}(t)y_1 + y_2], \\ y_2' = \frac{L'(t)e_2(t)}{L(t)e_1(t)}\left[\frac{1+r_s(t)-e_2(t)}{e_2(t)} + \frac{1+r_s(t)}{e_2(t)}y_1 - y_2 + R(t,y_1) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1+r_s(t)}{e_2(t)}(1+y_1) + R(t,y_1)\right)R_1(t,y_1)\right]. \end{cases} \tag{43}$$

Застосовуючи до (43) заміну

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = |H_s(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t), \tag{44}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = h(t)[c_{11}(t)v_1 + c_{12}(t)v_2], \\ v_2' = h(t)[q(t) + f(t,v_1) + c_{21}(t)v_1 + c_{22}(t)v_2 + V(t,v_1)], \end{cases} \tag{45}$$

в якій

$$h(t) = \frac{L'(t)e_1(t)}{L(t)}|H_s(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad q(t) = \frac{1+r_s(t)-e_2(t)}{e_1^2(t)},$$
$$c_{11}(t) = \alpha_s\mu_s q_{1s}(t)|H_s(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{12}(t) \equiv \alpha_s\mu_s, \quad c_{21}(t) = \frac{1+r_s(t)}{e_1^2(t)},$$

$$c_{22}(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{e_1(t)}\frac{L(t)}{L'(t)}\frac{H_s'(t)}{|H_s(t)|^{\frac{3}{2}}}\operatorname{sign} H_s(t) - \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}|H_s(t)|^{-\frac{1}{2}},$$
$$f(t,y_1) = \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}\left(\frac{1+r_s(t)}{e_2(t)}(1+y_1) + R(t,y_1)\right)R_1(t,y_1), \quad V(t,v_1) = \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}R(t,y_1).$$

Зважаючи на перші з умов (11), (12), (20), а також (19)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\int_{t_1}^{t} h(\tau)\,d\tau = \pm\infty.$$

Крім того, згідно з умовами (19), (20), (23), (34) і (35) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \gamma_0 = \pm\infty, \\ -\frac{\alpha_s\mu_s}{\gamma_0}, & \text{якщо} \quad 0 < |\gamma_0| < +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{12}(t) = \alpha_s\mu_s, \quad \lim\nolimits_{t\uparrow\omega} c_{21}(t) = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} c_{22}(t) = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t, v_1) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad v_1 \in [-\delta, \delta],$$

$$\lim_{v_1\to 0} \tfrac{V(t,v_1)}{v_1} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Припустимо, для початку, що $\gamma_0 = \pm\infty$. Тоді $\lim\limits_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = 0$ і характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів, які стоять при v_1 і v_2 в квадратних дужках рівнянь системи (45), має вигляд

$$\rho^2 - \alpha_s\mu_s = 0. \tag{46}$$

Якщо $\alpha_s\mu_s = 1$, то розв'язками цього рівняння є $\rho_{1,2} = \pm 1$ і тоді на підставі теореми 2.2 з роботи В.М. Євтухова і А.М. Самойленка [19] система диференціальних рівнянь (45) має однопараметричну сім'ю розв'язків $(v_1, v_2) : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}^2$ ($t_* \in [t_1, \omega[$), які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Кожному такому розв'язку в силу замін (31), (44) відповідає розв'язок $y : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ ($t_* \in [a, \omega[$) рівняння (1), який припускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (25), (26), причому з використанням цих зображень і умов (11), (12), (17), $\varphi_s \in \Gamma_{Y_0}(Z_s)$ неважко показати, що будь-який із них є $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ – розв'язком рівняння (1). Отже, перше твердження теореми 2 справедливе.

Якщо $\alpha_s\mu_s = -1$, то характеристичне рівняння (46) має уявні корені $\rho_{1,2} = \pm i$ (критичний випадок). В цьому випадку в системі (45) зробимо послідовно заміни

$$\tau = \int_{t_0}^{t} |h(x)|\, dx, \quad v_i(t) = z_i(\tau) \quad (i = 1, 2), \tag{47}$$

$$z_1(\tau) = u_1(\tau), \quad z_2(\tau) = \alpha(\tau)u_1(\tau) + u_2(\tau), \tag{48}$$

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1+2\eta_s}{2\beta(1+\eta_s)\tau}, & \text{якщо} \quad \eta_s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3/4\}, \\ \frac{1}{\beta\tau}, & \text{якщо} \quad \eta_s = \pm\infty, \end{cases} \qquad \beta = \operatorname{sign}[L'(t)/L(t)],$$

$$\begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\tau) \\ w_2(\tau) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$w_i(\tau) = \frac{x_i(\tau)}{\tau} \quad (i = 1, 2). \tag{50}$$

Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$x_i' = p(\tau)x_i + g(\tau) \sum_{m=1}^{2} Z_{im}(\tau, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \tag{51}$$

в якій
$$p(\tau) = \frac{\beta}{2}(c_{11}(\tau) + c_{22}(\tau)) + \frac{1}{\tau}, \qquad g(\tau) = \frac{1}{\tau},$$
функції Z_{ij} $(i, j = 1, 2)$ неперервні на множині $[\tau_0, +\infty[\times\mathbb{R}_0^2$, де $\mathbb{R}_0^2$ – деякий окіл точки (0,0), і в силу умов (27), (28) виконуються умови

$$Z_{i2}(\tau, 0, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{на проміжку} \quad [\tau_0, +\infty[,$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} Z_{i1}(\tau, x_1, x_2) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{рівномірно за} \quad x_1, x_2 \in [-\delta, \delta],$$

$$\lim_{|x_1|+|x_2|\to 0} \tfrac{Z_{i2}(\tau,x_1,x_2)}{|x_1|+|x_2|} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{рівномірно за} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty[,$$

$$p(\tau) \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty[, \qquad \left|\int_{\tau_0}^{+\infty} p(x)\, dx\right| = +\infty, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} \tfrac{g(\tau)}{p(\tau)} < +\infty.$$

Тому для системи (51) виконуються всі умови теореми 1.2 із роботи В.М. Євтухова і А.М. Самойленка [19]. Згідно з цією теоремою система диференціальних рівнянь (51) має щонайменш один розв'язок $(x_1, x_2) : [\tau_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(\tau_1 \geq \tau_0)$, який прямує до нуля при $\tau \to +\infty$, причому, якщо $\eta_s \in (-1, -3/4)$, то таких розв'язків існує ціла двопараметрична сім'я. Кожному такому розв'язку системи (51) в силу замін (31), (44), (47), (48), (49), (50) відповідає розв'язок $y : [t_2, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_2 \in [a, \omega[)$ диференціального рівняння (1) з асимптотичними зображеннями (29), (30). Таким чином, друге твердження теореми 2 доведено.

Тепер розглянемо випадок, коли $0 < |\gamma_0| < +\infty$. У цьому випадку

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = -\frac{\alpha_s\mu_s}{\gamma_0}.$$

Тому характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів при v_1 і v_2, які стоять в квадратних дужках системи (45), має вигляд

$$\rho^2 + \frac{\alpha_s\mu_s}{\gamma_0}\rho - \alpha_s\mu_s = 0.$$

Це рівняння при $\alpha_s\mu_s = 1$ має два дійсних кореня різних знаків, а при $\alpha_s\mu_s = -1$ має два дійсних кореня того ж знаку, що і γ_0, або два комплексних кореня з дійсною частиною того ж знаку, що і γ_0. Крім того, звернемо увагу на те, що згідно з умовами (11), (14) і (8)

$$\operatorname{sign} h(t) = \operatorname{sign}[L'(t)/L(t)] = \alpha_s\nu_0 \operatorname{sign}[\pi_\omega(t)] = \alpha_s\nu_1 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

В силу вищевикладеного система диференціальних рівнянь (45), згідно з теоремою 2.2 із роботи В.М. Євтухова і А.М. Самойленка [19], має щонайменш один розв'язок $(v_1, v_2) : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}^2$ $(t_* \in [t_1, \omega[)$, який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, причому таких розв'язків існує однопараметрична сім'я, якщо $\alpha_s\mu_s = 1$, і двопараметрична сім'я, якщо $\alpha_s\mu_s = -1$ і $\alpha_s\nu_1\gamma_0 < 0$. Кожному такому розв'язку в силу замін (31), (44) відповідає розв'язок $y : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_* \in [a, \omega[)$ диференціального рівняння (1), який допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (25), (26) і є $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ – розв'язком рівняння (1). Теорема 3 доведена.

Зауваження 2. *Випадок $\gamma_0 = 0$ потребує окремого дослідження.*

Зауваження 3. *У випадку, коли $l = 0$, тобто, коли всі нелінійності в правій частині (1) є швидко змінними функціями, твердження теорем 2 та 3 також залишаються справедливими.*

4. Висновки. У статті встановлено необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ – розв'язків диференціального рівняння другого порядку, що містить у правій частині суму доданків з правильно та швидко змінними нелінійностями. Дослідження проведено в припущенні, що головним у правій частині диференціального рівняння, яке розглядається у роботі, є доданок зі швидко змінною нелінійністю. Знайдено також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ – розв'язків та вирішено питання про їх кількість.

Список використаної літератури

1. Евтухов В. М., Кириллова Л. А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41, № 8. С. 1053–1061.
2. Kusano T., Manojlovic J., Maric V. Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations – The sublinear case. *Bull. T. CXLIII de l'Acad. Serbe des Sci. et des Arts. Classe des Sciences Mathematiques et Naturelles, Sciences mathematiques.* 2011. No. 36. P. 21–36.
3. Manojlovic J., Maric V. An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equations. *Mem. Differ. Equat. Math. Phys.* 2012. Vol. 57. P. 75–94.
4. Maric V., Radasin Z. Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\varphi(\psi(y))$. *Glasnik matematicki.* 1988. Vol. 23 (43), No. 1. P. 27–34.
5. Maric V., Tomic M. Asymptotics of solutions of a generalised Thomas-Fermi equations. *J. Differ. Equat.* 1980. Vol. 35, No. 1. P. 36–44.
6. Taliaferro S. D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$. *SIAM J. Math. Anal.* 1981. Vol. 12, No. 6. P. 853–865.
7. Maric V. Regular variation and differential equations. Lect. Notes Math. *Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag.* 2000. Vol. 1726. 128 p.
8. Евтухов В. М., Харьков В. М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Дифференц. уравнения.* 2007. Вып. 43, № 10. С. 1311–1323.
9. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. *Нелинейные колебания.* 2016. Вып. 19, № 4. С. 458–475.
10. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью. *Нелинейные колебания.* 2017. Вып. 20, № 3. С. 346–360.
11. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями. *Укр. мат. журн.* 2017. Вып. 69, № 10. С. 1345–1363.
12. Касьянова В. А. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, асимптотически близкими к степенным: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Одесса, 2009. 154 с.
13. Евтухов В. М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Киев, 1997. 295 с.
14. Евтухов В. М., Колун Н. П. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. *Математические методы и физико-механические поля.* 2017. Вып. 60, № 1. С. 32–43.
15. Евтухов В. М., Колун Н. П. Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. *Український математичний вісник.* 2018. Вып. 15, №1. С. 18–42.
16. Евтухов В. М., Колун Н. П. Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями. *Нелінійні коливання.* 2018. Вип. 21, №3. С. 323–346.
17. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. *М.: Наука*, 1985. 144 с.

18. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. *Cambridge university press.* Cambridge, 1987. 494 p.
19. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 2010. Вып. 62, № 1. С. 52–80.

Kolun N. P. Asymptotic behaviour of solutions of second-order differential equations with different nonlinearities.

In this paper for the second-order differential equation which has a right-hand side containing the sum of the terms with regularly and rapidly varying nonlinearities the necessary and sufficient conditions of the existence so-called $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – solutions (Y_0 is either 0, or $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$) in a special case when the parameter $\lambda_0 = \pm\infty$ are established. The asymptotic representations when $t \uparrow \omega$ for such solutions and their first-order derivatives also are established. The results of the work were obtained on the assumption that on each solution from the class under consideration the right-hand side of the differential equation being studied is equivalent when $t \uparrow \omega$ to one term with a rapidly varying nonlinearity. This term must be considered as the principal one on the right side of the equation. The method of allocation of the main term was proposed by H. Hardy when studying the differential equation of the first order. Later, A.V. Kostin, V.M. Evtukhov, E.V. Shebanina used this method in studying the asymptotic properties of solutions of differential equations of n-th order with power nonlinearities. In the study of the asymptotic properties of the set $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - solutions that corresponds to this value of the parameter λ_0, was used the method proposed by V.M. Evtukhov during the study together with A.G. Chernikova binomial differential equation with rapidly varying nonlinearity. The work has a theoretical nature. The results obtained and the method employed in the work can be used to construct an asymptotic theory of differential equations of a more general type containing the sum of the terms in the right-hand side with regularly and rapidly varying nonlinearities.

Keywords: asymptotic properties, second-order differential equations, rapidly varying nonlinearities.

References

1. Evtukhov, E. V., & Kirillova, L. A. (2005). Ob asimptotike reshenij nelinejnykh differencialnikh urovneniy vtoroho poriadka [On the asymptotics of solutions of second-order nonlinear differential equations]. *Differential equations, 41(8)*, 1053–1061 [in Russian].
2. Kusano, T., Manojlovic, J., & Maric, V. (2011). Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations – The sublinear case. *Bull. T. CXLIII de l'Acad. Serbe des Sci. et des Arts.– Classe des Sciences Mathematiques et Naturelles, Sciences mathematiques, 36*, 21–36.
3. Manojlovic, J., & Maric, V. (2012). An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equations. *Mem. Differ. Equat. Math. Phys., 57,* 75–94.
4. Maric, V., & Radasin, Z. (1988). Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\varphi(\psi(y))$. *Glasnik matematicki, 23 (43), 1,* 27–34.
5. Maric, V., & Tomic, M. (1980). Asymptotics of solutions of a generalised Thomas-Fermi equations. *J. Differ. Equat., 35(1)*, 36–44.
6. Taliaferro, S. D. (1981). Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$. *SIAM J. Math. Anal., 12(6)*, 853–865.
7. Maric, V. (2000). Regular variation and differential equations. *Lect. Notes Math.* Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag.
8. Evtukhov, V. M., & Kharkov, V. M. (2007). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy suschestvenno nelineynyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions of essentially nonlinear second-order differential equations]. *Differential equations, 43(10)*, 1311–1323 [in Russian].
9. Evtukhov, V. M., & Chernikova, A. H. (2016). Asimptotika medlenno menyayuschihsya resheniy obyiknovennyih dvuchlennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro

menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotics of slowly varying solutions of ordinary two-term differential equations of second order with rapidly changing nonlinearity]. *Nonlinear oscillations, 19(4)*, 458–475 [in Russian].

10. Evtukhov, V. M., & Chernikova, A. H. (2017). Asimptoticheskoe povedenie medlenno menyayuschihsya resheniy obyiknovennyih dvuchlennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotic behavior of slowly varying solutions of ordinary two-term differential equations of second order with rapidly changing nonlinearity]. *Nonlinear oscillations, 20(3)*, 346–360 [in Russian].
11. Evtukhov, V. M., & Chernikova, A. H. (2017). Asimptoticheskoe povedenie resheniy obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations of second order with rapidly changing nonlinearities]. *Ukrainian Mathematical Journal, 69(10)*, 1345–1363 [in Russian].
12. Kasianova, V. A. (2009). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnyih obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s nelineynostyami, asimptoticheski blizkimi k stepennyim [Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary second-order differential equations with nonlinearities asymptotically close to power]. *Candidate's thesis*, Odessa [in Russian].
13. Evtukhov, V. M. (1997). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnyih obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy [Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations]. *Doctor's thetis*, Kyiv [in Russian].
14. Evtukhov, V. M., & Kolun, N. P. (2017). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy differentsialnyih uravneniy s pravilno i byistro menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of differential equations with correctly and rapidly changing nonlinearities]. *Mathematical methods and physical-mechanical fields, 60(1)*, 32–43 [in Russian].
15. Evtukhov, V. M., & Kolun, N. P. (2018). Byistro menyayuschiesya resheniya differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s pravilno i byistro menyayuschimisya nelineynostyami [Fast-varying solutions of the second-order differential equation with correctly and rapidly changing nonlinearities]. *Ukrainian Mathematical Bulletin, 15(1)*, 18–42 [in Russian].
16. Evtukhov, V. M., & Kolun, N. P. (2017). Asimptotika resheniy differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s pravilno i byistro menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotics of solutions of second-order differential equations with correctly and rapidly changing nonlinearities]. *Nonlinear oscillations, 21(3)*, 323–346 [in Russian].
17. Seneta, E. (1985). Pravilno menyayuschiesya funktsii [Properly changing functions]. *Moskow: Nauka* [in Russian].
18. Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1987). Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge: Cambridge university press.
19. Evtukhov, V. M., & Samoilenko, A. M. (2010). Usloviya suschestvovaniya ischezayuschih v osoboy tochke resheniy u veschestvennyih neavtonomnyih sistem kvazilineynyih differentsialnyih uravneniy [The existence conditions of disappearing at a singular point of solutions in real nonautonomous systems of quasilinear differential equations]. *Ukrainian Mathematical Journal, 62(1)*, 52–80 [in Russian].

Одержано 20.01.2019