

УДК 519.237.8, 519.852

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).85-91](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).85-91)**М. М. Маляр¹, Н. Е. Кондрук²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор технічних наук

mykola.malyar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук

natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

СТРУКТУРУВАННЯ КРИТЕРІАЛЬНОГО ПРОСТОРУ ЗА КУТОВОЮ МІРОЮ ПОДІБНОСТІ

Багатокритеріальні задачі прийняття рішень є особливо складним класом задач для системи обробки інформації людиною. Як правило, чим більше побудована модель задачі відображає реальну задачу-проблему, яка її спричинила, тим більше критеріїв вона має враховувати. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними. Це зумовлює необхідність розробки спеціальних методів та підходів, призначених для структуризації критеріального простору задач великої розмірності.

В даній роботі описано нечітке бінарне відношення та його функцію належності, які визначають кутову міру подібності критеріїв ефективності. Вона характеризує ступінь схожості вектор-градієнтів цільових функцій критеріїв ефективності за кутом між ними. Модифіковано метод однорівневої кластеризації, що заснований на нечітких бінарних відношеннях для використання кутової міри подібності. Це дозволило проводити кластеризацію критеріального простору на конічні кластери за ознакою подібності – несуперечливою сильною зв'язаністю критеріїв ефективності. Представлено комплексний підхід до структуривання критеріального простору векторних задач лінійного програмування. На основі запропонованого математичного апарату розроблено програмне забезпечення, що реалізує кластеризацію конічними кластерами. Проведення практичних експериментів показало його ефективність при розв'язанні певних класів прикладних задач.

Дана робота є розвитком напрямку структуривання множини критеріїв ефективності для класу багатокритеріальних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності в умовах коли утруднене або неможливе групування, порівняння чи впорядкування часткових критеріїв за перевагою для особи, що приймає рішення. Перспективні дослідження полягають у розвитку запропонованого підходу кластеризації методом, що заснований на нечітких бінарних відношеннях за кутовою мірою подібності для розв'язання інших класів прикладних задач.

Ключові слова: кластеризація, багатокритеріальна оптимізація, структуривання, кутова міра подібності, міра подібності.

1. Вступ. Багатокритеріальні задачі прийняття рішень є особливо складним класом задач для системи обробки інформації людиною. Наявність багатьох критеріїв приводить до великого навантаження на короткочасну пам'ять, примушуючи людину використовувати різні евристики для того, щоб справитися із задачею при обмеженому об'ємі короткочасної пам'яті.

В той же час в практичній діяльності людини багатокритеріальні задачі зустрічаються все частіше, що викликоне необхідністю враховувати одночасно

багато різних чинників. Як правило, чим більше побудована модель задачі відображає реальну задачу-проблему, яка її спричинила, тим більше критеріїв вона має враховувати. Крім того, відкидання або неврахування будь-якого із критеріїв може призвести до невідповідності розв'язку задачі-моделі оптимальному розв'язку реальної задачі. З іншого боку, чим більша розмірність критеріального простору тим більше ускладнюється пошук оптимального розв'язку задачі вибору.

Задачі у яких розмірність простору критеріїв перевищує 7 називаються задачами великої критеріальної розмірності [1]. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними. Це зумовлює необхідність розробки спеціальних методів, призначених для задач великої розмірності критеріального простору.

Крім того, в основі багатьох методів оптимізації застосовується підхід, який використовує призначення вагових коефіцієнтів критеріїв та їх ранжування особами, що приймають рішення (ОПР). Як правило люди дають завищені оцінки тим критеріям, які порівняно мало впливають на вибір, і недооцінюють найбільш суттєві. Тому, для точнішого і обгрунтованішого підбору ваг, проведення ранжування критеріїв ефективності за перевагою для ОПР доцільно встановити взаємозв'язки між критеріями та структурувати критеріальний простір задачі. Реалізувати даний підхід пропонується на основі кутової міри подібності, що визначає міру схожості вектор-градієнтів цільових функцій критеріїв ефективності за кутом між ними.

2. Постановка задачі. Надалі будемо розглядати багатокритеріальну задачу лінійного програмування в наступній постановці:

$$y_i = f_i(x) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \rightarrow \text{extr}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$x \in X \subseteq R^n, \quad (2)$$

де X – множина допустимих розв'язків (альтернатив), яка визначається сукупністю лінійних рівнянь та нерівностей, $y_i = f_i(x)$ – цільові функції, c_{ij} – коефіцієнти. Тобто, є деяка сукупність цілей, які відображені критеріями $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, і потрібно знайти таку точку $x^* \in X \subseteq R^n$, яка в деякому розумінні мінімізує або максимізує кожен з критеріїв.

Для групування критеріїв ефективності, що описуються цільовими функціями $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ використаємо зв'язки між ними, які описуються наступними означеннями.

Означення 1 (див. [1]). *Два критерії назвемо суперечливими відносно деякої множини допустимих альтернатив X , якщо покращення оцінки по одному з критеріїв на множині X супроводжується її погіршенням за іншим.*

Означення 2 (див. [1]). *Два критерії назвемо сильно зв'язаними відносно деякої множини допустимих альтернатив X , якщо їх оцінки є близькими на різних альтернативах множини X , або якщо покращення оцінки за одним критерієм на множині X приводить до її покращення за іншим критерієм.*

Оскільки критерії лінійні, то напрямки до екстремуму співпадають з напрямками $\pm \text{grad } f_i(x)$. Якщо сумістити початок вектора $\text{grad } f_i(x)$ з початком системи координат, то він співпаде з радіус-вектором \overline{OC}_i , де точка O – початок

координат, а $C_i(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$, $i = \overline{1, m}$. Тому розділивши вектори $\overline{OC_i} = \overline{c_i}$ або точки $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$, $i = \overline{1, m}$ на множини, тим самим розділимо і критерії, що їм відповідають $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$.

При знаходженні оптимальної точки в задачах виду (1)-(2), як зазначалось, враховують тільки напрямки $grad f_i(x)$, таким чином, ставиться задача проведення структуризації критеріального простору, на основі групування критеріїв ефективності за ознакою подібності – несуперечливою сильною зв'язаністю критеріїв ефективності.

3. Огляд літератури. В наш час все більше уваги приділяється задачі багатоцільової (векторної, багатокритеріальної) оптимізації. Це зв'язано з тим, що при дослідженні складних систем і об'єктів використання скалярної задачі оптимізації приводить до математичної моделі, яка є неадекватна та невідповідна реальній задачі, бо нагальні потреби практики управління, проектування, планування потребують врахування і узгодження різних цілей та потреб.

Слід відзначити, що в різних областях людської діяльності неодноразово виникали і по мірі накопичення досвіду успішно розв'язувались ситуації, в яких прийняті рішення були багатоцільовими [2-5].

Так, прикладами задач великої розмірності „критеріальної” можуть бути задача оптимізації планування роботи виробничої системи, задача складання збалансованого раціону (може враховувати 17 критеріїв) [2, 3], задача автоматизації управління сучасної бібліотеки (враховує 20 критеріїв) [6], задача рейтингування художників (використовує 18 критеріїв) [7], задача формування комплексних цільових соціальних програм, які підтримуються Міжнародним фондом „Відродження” (містить 238 критеріїв) [8] і т. д.

Тому характерною особливістю багатьох практичних задач дослідження є їхня велика розмірність. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними [9].

Це зумовлює необхідність розвитку спеціальних методів та підходів, призначених для структуризації критеріального простору задач великої розмірності, зокрема представлених в [1, 10].

4. Матеріали і методи. Очевидно, що поняття суперечливих та сильно зв'язаних критеріїв тісно пов'язане із кутом між векторами градієнтами цільових функцій критеріїв. Так, якщо цей кут рівний 180° , то критерії будуть суперечливі при будь-якій множині допустимих альтернатив X , а якщо ж 0° , то критерії будуть сильно зв'язаними. Тому вид множини X може впливати тільки на міру прояву цих ознак.

Для реалізації процесу кластеризації обрано метод, що заснований на нечітких бінарних відношеннях, п. 6 в [11]. Він дає можливість проводити групування об'єктів кластерами різних геометричних форм змінюючи лише види мір подібності об'єктів. Для визначення кількості кластерів задаються певні величини – пороги кластеризації μ_R^* , що характеризують ступінь подібності об'єктів в середині кластеру.

Подібність об'єктів за деяким критерієм характеризується нечітким бінарним відношенням R на множині векторних ознак $C = \{ \overline{c_i} \mid i = \overline{1, m} \}$ із функцією належності $\mu_R(\overline{c_i}, \overline{c_j})$, де $\mu_R : C^2 \rightarrow [0, 1]$.

«Кутове» нечітке бінарне відношення R^{ang} характеризує кут між векторами градієнтів $\overline{c_i}$ та $\overline{c_j}$. Функція належності даного відношення визначається фор-

мулою (рис. 1):

$$\mu_{Rang}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = e^{-\frac{1 - \frac{\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j}{|\bar{c}_i| \cdot |\bar{c}_j|}}{2}}. \quad (3)$$

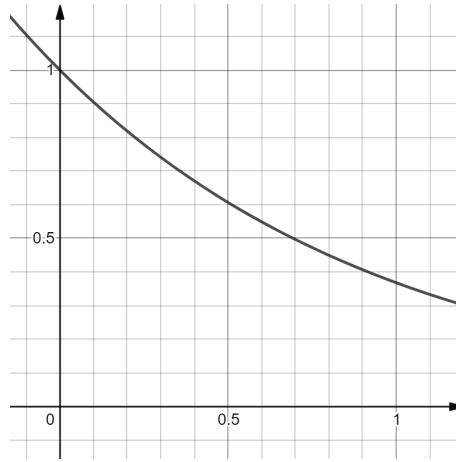


Рис. 1. Графічна інтерпретація функції виду (3)

Аргументом експоненти є нормована величина, яка прямує до 0, коли кут між векторами-градієнтами цільових функцій близький до 180° і наближається до 1, коли кут прямує до 0° . Нехай задана числова величина $\mu_{Rang}^* \in [0; 1]$ – поріг кластеризації. Він характеризує необхідну ступінь подібності критеріїв ефективності в межах одного кластеру за ознаками несуперечливої сильної зв'язаності. Якщо $\mu_{Rang}^* = 0$, то ступінь подібності об'єктів буде найслабшою, що приведе до формування одного кластеру кінченного виду, куди увійдуть всі критерії ефективності. Якщо ж $\mu_{Rang}^* = 1$, тоді, навпаки, критерії із різним напрямом векторів градієнтів сформуєть окремі кластери, бо їх ступінь подібності буде найвищою. Отже, ближчому значенню μ_{Rang}^* до одиниці буде відповідати більша кількість сформованих кластерів.

Крім того «хороша» чутливість експоненти в околі свого граничного значення ($\sup \mu_{Rang} = 1$) дозволяє проводити кластеризацію об'єктів для всіх можливих порогових величин μ_{Rang}^* проміжку $[0; 1]$ із певною точністю (наприклад, із точністю 0,01).

Проведемо модифікацію чіткого методу однорівневої кластеризації п. 6 в [11] для використання кутової міри подібності. Проведення кластеризації об'єктів із використанням кутового нечіткого бінарного відношення вимагає визначення векторів-центроїдів умовного кластеру U^l кроків 2 та 3 однорівневого алгоритму [11]. Для двовимірної задачі кластеризації поняття центроїда близьке до поняття бісектриси найбільшого кута між векторами-градієнтами критеріїв ефективності в межах одного кластеру U^l . Тому в цьому випадку центроїд можна визначити за формулою:

$$\bar{c}_i^* = \frac{\bar{c}_{i^*} + \bar{c}_{j^*}}{2}, \quad (4)$$

де $\{i^*, j^*\} \in \arg \min_{i, j \in I^l} \left(\frac{\bar{c}_i}{|\bar{c}_i|} \cdot \frac{\bar{c}_j}{|\bar{c}_j|} \right)$ та $I^l = \{i \mid \bar{c}_i \in U^l\}$.

Тобто, центроїд визначає бісектрису найбільшого кута між будь-якими векторами кластеру U^l .

Для задач більшої розмірності пропонується вектор-центроїд розраховувати, як центр ваги точок, які відповідають ортам векторів-градієнтів в межах одного кластеру U^l :

$$\bar{c}_i^* = \frac{\sum_{c_i \in U^l} \frac{c_i}{|c_i|}}{\|U^l\|}. \quad (5)$$

Використання R^{ang} дає можливість проводити кластеризацію кінчними кластерами.

Отже, за чітким однорівневим методом п. 6 в [11], та описаними модифікаціями проводиться кластеризація на чіткі кластери $K^1, K^2, \dots, K^z, z \leq m$ із відповідними представниками $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*, \dots, \bar{c}_z^*$ знайденими за формулою (4, 5).

Якщо потрібна інформація не тільки про розподіл критеріїв ефективності по кластерам, а й про ступінь їх приналежності кожному з них, то необхідно провести процедуру фазифікації п. 8 [11].

5. Комплексний підхід до структурування множини критеріїв ефективності.

Крок 1. Нормалізація. Спочатку необхідно провести нормалізацію часткових критеріїв, оскільки в різних моделях можуть використовуватись локальні критерії оптимальності, які мають різні одиниці вимірювання (гривня, грам, калорії та ін.), і виникає проблема їх співрозмірності. Для її усунення потрібно провести нормалізацію критеріїв до однієї шкали, як правило безрозмірної:

$$\bar{f}_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^{\min}(x)}{f_i^{\max}(x) - f_i^{\min}(x)}.$$

Крок 2. Кластеризація. Групуємо цільові функції за ознакою несуперечливих сильно зв'язаних критеріїв. Використаємо метод кластеризації заснований на нечітких бінарних відношеннях [11] та кутову міру схожості (3).

Крок 3. Зменшення потужності критеріального простору. Надалі в кожному із утворених кластерів представником кластера обираємо центроїди $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*, \dots, \bar{c}_z^*$ знайдені за формулою (4, 5). Вони є лінійними згортками критеріїв ефективності, що входять до відповідного кластеру, тому повністю забезпечують виконання умов Парето для оптимальної точки знайденої в подальшому.

6. Експерименти. Для проведення експериментів була розроблена комп'ютерна програма, що реалізує запропонований підхід при кластеризації критеріїв ефективності за кутовою мірою подібності (3) на кластери кінчної форми. Вона є доповненням до вже існуючого програмного забезпечення для проведення еліпсоїдної кластеризації [11] та кластеризації концентричними сферами [12].

Вхідною інформацією для проведення групування об'єктів є числові величини $n, m, \mu_{R^{arg}}^*$ та координати векторів \bar{c}_i . Далі для чіткої кластеризації застосовується метод однорівневої кластеризації із п. 6 [11], адаптований до використання кутової міри подібності (3).

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. Дана робота є розвитком напрямку структурування множини критеріїв ефективності для класу багатокритеріальних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності в умовах коли неможливе або утруднене групування, порівняння чи впорядкування часткових критеріїв ОПР.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що описано нечітке бінарне відношення та його функцію належності, які характеризують кутову

міру подібності критеріїв ефективності. Модифіковано метод однорівневої кластеризації [10] для використання кутової міри подібності. Представлено комплексний підхід до структурування критеріального простору векторних задач лінійного програмування.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробленому програмному забезпеченні, що реалізує кластеризацію кінчними кластерами. Проведення експериментів показало його ефективність при розв'язанні певних класів прикладних задач.

Перспективні дослідження полягають у розвитку підходу кластеризації методом, що заснований на нечітких бінарних [11] за кутовою мірою подібності (3) для розв'язання інших класів прикладних задач.

Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Ужгородського національного університету «Розробка математичних моделей і методів для оброблення інформації та інтелектуального аналізу даних» (номер державної реєстрації 0115U004630).

Список використаної літератури

1. Кондрук Н. Э., Маляр Н. Н. Некоторые применения кластеризации критериального пространства для задач выбора. *Компьютерная математика*. 2009. № 2. С. 142–149.
2. Кондрук Н. Е. Системы підтримки прийняття рішень для автоматизованого складання дієт. *Управління розвитком складних систем*. 2015. Вип. 23. С. 92–96.
3. Кондрук Н. Е., Маляр М. М. Застосування багатокритеріальних моделей для задач збалансованого харчування. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки*. 2010. №1, Вип. 1 с. 3–7.
4. Воронин А. М., Зиатдинов Ю. К., Козлов О. І., Чабанюк В. С. Векторная оптимизация динамических систем. / за ред. А. М. Воронина. К.: Техніка, 1999. 284 с.
5. Попов И. А., Мицитис А. К. Системная многокритериальная методология построения компромиссного варианта большой технической системы. Алгоритм. Киев: КИ ВВС, 1996. 70 с.
6. Бочаров Б. П. Формирование векторного критерия оценки качества автоматизированного управления современной библиотекой. *Культура народов Причерноморья*. 2005. № 60, Т.1. С. 31–35. URL: nbuv.gov.ua/Articles/KultNar/knp100/pdf/100t3/100t.
7. Заграевский С. В. Применение к рейтингованию художников современных математических методов экспертных оценок. *АРТ-газета*. 1999. URL: <http://zagraevsky.com/math.htm>.
8. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений. К: Наук. думка, 2002. 377 с.
9. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. К.: Видавничий дім «Слово», 2006. 816 с.
10. Маляр М. М., Цицика Н. Е. Алгоритм зменшення кількості критеріїв в багатокритеріальній задачі лінійного програмування. *Вісник Київського університету. Серія ф.–м. наук*. 2004. Вип. 2. С. 288–292.
11. Kondruk N. Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Т. 2, № 4 (86). С. 10–16. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>
12. Кондрук Н. Е. Використання довжинної міри подібності в задачах кластеризації. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2018. № 3(46). С. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>.

Malyar M. M., Kondruk N. E. Structuring of the criterional space by an angle similarity measure.

Multicriteria decision-making is a particularly hard complex of tasks for a person's information processing system. As a rule, the more the problem model is constructed and reflects the real problem or task that caused it, the more criteria it has to take into account. With this dimension, classical methods of mathematical programming are ineffective. This

necessitates the development of specific methods and approaches designed to structure the criterion space of large dimension problems.

This paper describes a fuzzy binary relation and its belonging function that determine the angular measure of similarity of efficiency criteria. It characterizes the degree of similarity between the vector gradients of the objective functions of the efficiency criteria between them. The one-tier clustering method was modified based on fuzzy binary relations to use the angular similarity measure. This allowed clustering of the criterion space into conical clusters on the basis of similarity - a consistent strong link between the performance criteria.

The complex approach to structuring the criterion space of vector linear programming problems is presented. On the basis of the proposed mathematical apparatus, software was developed that implements clustering with conical clusters. Conducting hands-on experiments has shown its effectiveness in solving certain classes of application tasks. This work is an evolution of the direction of structuring the set of efficiency criteria for a class of multicriteria linear programming problems with a large dimensional criterion space in conditions where it is difficult or impossible to group, compare or order partial criteria, preferably for the decision maker. Prospective research is to develop a proposed clustering approach which is based on method of fuzzy binary angular similarity measures for solving other classes of applied problems.

Keywords: clustering, multicriteria optimization, structuring, angular similarity measure, similarity measure.

Список використаної літератури

1. Kondruk, N. E. , & Malyar, N. N. (2009). Nekotoryie primeneniya klasterizatsii kriterialnogo prostranstva dlya zadach vyibora. *Kompyuternaya matematika*, 2, 142–149 [in Russian].
2. Kondruk, N. E. (2015). Systemy pidtrymky pryiniattia rishen dlia avtomatyzovanooho skladannia diiet. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 23, 92–96 [in Ukrainian].
3. Kondruk, N. E. & Malyar, M. M. (2010). Zastosuvannia bahatokryterialnykh modelei dlia zadach zbalansovanoho kharchuvannia. *Visnyk Cherkaskoho derzhavnoho tekhnolohichnoho universytetu. Seriya: tekhnichni nauky*, 1(1), 3–7 [in Ukrainian].
4. Voronin, A. M., Ziatdinov, Y. K., Kozlov, O. I, & Chabanyuk, V. S. (1999). In A. M., Voronina (Ed.). *Vektornaya optimizatsiya dinamicheskikh sistem*. Kyiv: Tehnika [in Russian].
5. Popov, I. A. & Mitsitis, A. K. (1996). *Sistemnaya mnogokriterialnaya metodologiya postroeniya kompromissnogo varianta bolshoy tehnichey sistemy*. Algoritm. Kiev: KI VVS [in Russian].
6. Bocharov, B. P. (2005). Formirovanie vektornogo kriteriya otsenki kachestva avtomatizirovannogo upravleniya sovremennoy bibliotekoy. *Kultura narodov Prichernomor'ya*, 60(1), 31–35 [in Russian].
7. Zagraevskiy, S. V. (1999). Primenenie k reytingovaniyu hudozhnikov sovremennyih matematicheskikh metodov ekspertnyih otsenok. *ART-gazeta* [in Russian].
8. Totsenko, V. G. (2002). *Metody i sistemy podderzhki prinyatiya resheniy*. Kyiv: Nauk. dumka [in Russian].
9. Zaichenko, Y. P. (2006). *Doslidzhennia operatsii*. Kyiv: Vydavnychi dim «Slovo» [in Ukrainian].
10. Maliar, M. M., & Tsytsyka, N. E. (2004). Alhorytm zmenshennia kilkosti kryteriiv v bahatokryterialnii zadachi liniinoho prohramuvannia. *Visnyk Kyivskoho universytetu. Seriya f.-m. nauk*, 2, 288–292 [in Ukrainian].
11. Kondruk, N. (2017). Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(4(86)), 10–16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>
12. Kondruk, N. E. (2018) Vykorystannja dovzhynnoi miry podobnosti v zadachah klasteryzacii. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnja*. 3 (46), 98–105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11> [in Ukrainian].

Одержано 17.01.2020