УДК 512.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).7-18

Н. С. Аюбова

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант
naiubova@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5074-3801

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПОХИБКАМИ ТА ІНТЕРВАЛИ НАДІЙНОСТІ

Нехай $B_H(t), t \in \mathbb{R}$ – випадковий процес дробового броунівського руху з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(s,t) = \frac{c}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}), s,t \in \mathbb{R}$$

з параметрами c, H, де $c > 0$, $H \in (0,1)$ – параметр Хюрста. У цій роботі побудовані консистентні оцінки параметра c та параметра Хюрста H за спостереженнями дробового броунівського руху у моменти часу $k + \frac{1}{2}$, де k – натуральне число з адитивними похибками. Припускається, що похибки утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2. Ця послідовність випадкових величин незалежна від дробового броунівського руху $B_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Через $\tilde{B}_H(k)$, $\tilde{B}_H(k+\frac{1}{2})$ позначимо спостереження випадкового процесу $B_H(t)$ у точках k, $k+\frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$ з адитивними похибками. Для отримання консистентних оцінок параметрів c, H застосовані статистики, побудовані за допомогою приростів першого та другого порядків послідовності випадкових величин $(\tilde{B}_H(k), k \geq 1)$:

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{B}_H(k+1) - \tilde{B}_H(k))^2,$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{B}_H(k+1) - 2\tilde{B}_H\left(k+\frac{1}{2}\right) + \tilde{B}_H(k)\right)^2, n \geq 1.$$

Для підрахунку дисперсій випадкових величин $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ застосована формула Іссерліса, що має місце для випадкових величин, що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім. Застосування цієї формули можливо завдяки гауссовості дробового броунівського руху та похибок спостережень. Нехай відомо, що параметр Хюрста H належить проміжку $H \in (0, H^*]$, де $H^* \in (0,1)$, – фіксоване число, натуральне число q задовольняє нерівність $q > \frac{1}{4-4H^*}$. Тоді статистики $\hat{c}_n = A_n$, $\hat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{B_n}{A_n}\right)$, де $A_n = S_{n^q}^{(1)} - 2\sigma^2$, $B_n = S_{n^q}^{(2)} - 6\sigma^2$ є строго консистентними оцінками параметрів c, H. Для доведення строгої консистентності оцінок у статті отримані оцінки зверху дисперсій $VarS_n^{(1)}$, $VarS_n^{(2)}$. Оцінка дисперсії $VarS_n^{(1)}$ залежить від H^* :

$$VarS_n^{(1)} \leq \frac{2(c+2\sigma^2)^2}{n} + \frac{4(c+2\sigma^2)^2}{n} + \frac{4c_1^2}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H^*), H^* < \frac{3}{4};\\ 1+\ln n, H^* = \frac{3}{4};\\ \frac{n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, H^* \in (\frac{3}{4}, 1),\end{cases}$$

де $c_1 = \max(\frac{1}{4}, 2H^*(2H^*-1))$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots, s > 1$$

– дзета функція, тоді як $VarS_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$ для всіх значень $H^* \in (0,1)$.

У роботі побудовані інтервали надійності з заданим коефіцієнтом надійності $1-\varepsilon$ для параметрів c, H. Для побудови інтервалів надійності використані оцінки зверху дисперсій $VarS_n^{(1)}$, $VarS_n^{(2)}$.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, параметр Хюрста, консистентна оцінка, довірчі інтервали, бакстерівські суми.

1. Вступ. Гауссовий випадковий процес $B_H(t), t \in \mathbb{R}$ з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(s,t) = \frac{c}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}), s,t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $c > 0$, $H \in (0,1)$ називається дробовим броунівським рухом з параметром Хюрста H.

Оцінювання параметрів дробового броунівського руху має велике практичне значення і є актуальною темою досліджень.

Застосування бакстерівських сум дозволяє отримувати строго консистентні оцінки та неасимптотичні довірчі інтервали для параметрів, що оцінюються. У роботах [1]- [3], були застосовані бакстерівські суми для оцінювання параметра Хюрста та побудовані довірчі інтервали. Монографія [4] містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів коваріаційних функцій випадкових процесів методом бакстерівських сум. Оцінювання параметра Хюрста в цих роботах розглядався при $c = 1$.

В статті [5] досліджена консистентність параметра Хюрста в моделі реальних вимірювань. В останні роки багато досліджень присвячені оцінюванню параметрів в моделях з похибками. Так, в монографії [6] досліджені моделі регресії з похибками вимірювань для оцінювань радіаційних ризиків. У статтях [7], [8] досліджено оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху у моделях з похибками при $c = 1$. Стаття [9] присвячена оцінюванню параметрів в змішаній моделі.

У цій статті побудовано консистентні оцінки для параметра Хюрста H і множника $c > 0$ коваріаційної функції дробового броунівського руху та отримані інтервали надійності.

2. Постановка задачі. Нехай (ξ_n) послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин незалежних від випадкового процесу $B_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, причому випадкова величина ξ_n має гауссовий розподіл з нульовим математичним сподіванням та відомою дисперсією σ^2. Випадковий процес $B_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$ спостерігається у точках k, $k + \frac{1}{2}$, де $1 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$ з похибками ξ_{2k-1}, ξ_{2k}. За спостереженнями випадкових величин

$$\tilde{B}_H(k) = B_H(k) + \xi_{2k-1},$$

$$\tilde{B}_H\left(k + \frac{1}{2}\right) = B_H\left(k + \frac{1}{2}\right) + \xi_{2k}, 1 \le k \le n, n \in \mathbb{N}$$

потрібно оцінити параметри $c \in (0, +\infty)$ та $H \in (0,1)$ коваріаційної функції (1).

3. Консистентні оцінки параметрів c, H. Покладемо

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{B}_H(k+1) - \tilde{B}_H(k))^2, \tag{2}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{B}_H(k+1) - 2\tilde{B}_H\left(k + \frac{1}{2}\right) + \tilde{B}_H(k)\right)^2, n \ge 1. \tag{3}$$

Підрахуємо математичне сподівання та дисперсією випадкових величин (2), (3). Для довільного $k \ge 1$

$$E(\tilde{B}_H(k+1)-\tilde{B}_H(k))^2 = E(B_H(k+1)-B_H(k)+(\xi_{2k+1}-\xi_{2k-1}))^2 =$$
$$= E(B_H(k+1)-B_H(k))^2 + E(\xi_{2k+1}-\xi_{2k-1})^2 =$$
$$= E(B_H^2(k+1)-2B_H(k)B_H(k+1)+B_H^2(k)) + 2\sigma^2 = c+2\sigma^2;$$

$$E((B_H(k+1)-2B_H\left(k+\frac{1}{2}\right)+B_H(k))+(\xi_{2k+1}-2\xi_{2k}+\xi_{2k-1}))^2 =$$
$$= E(B_H^2(k+1)+4B_H^2\left(k+\frac{1}{2}\right)+B_H^2(k)-4B_H(k+1)B_H\left(k+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+2B_H(k+1)B_H(k)-4B_H\left(k+\frac{1}{2}\right)B_H(k))+6\sigma^2 = c(2^{2-2H}-1)+6\sigma^2.$$

Отже,

$$ES_n^{(1)} = c+2\sigma^2, \tag{4}$$
$$ES_n^{(2)} = c(2^{2-2H}-1)+6\sigma^2, n \geq 1. \tag{5}$$

Перейдемо до обчислення дисперсії. Для випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ з сумісним гауссовим розподілом і нульовим математичним сподіванням має місце формула Іссерліса [10]:

$$E(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = E\eta_1\eta_2 E\eta_3\eta_4 + E\eta_1\eta_3 E\eta_2\eta_4 + E\eta_1\eta_4 E\eta_2\eta_3.$$

За допомогою цієї формули обчислимо дисперсії $VarS_n^{(1)}$ та $VarS_n^{(2)}$:

$$VarS_n^{(1)} = \frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n} E(\tilde{B}_H(k+1)-\tilde{B}_H(k))^2(\tilde{B}_H(j+1)-\tilde{B}_H(j))^2 -$$
$$-\frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n} E(\tilde{B}_H(k+1)-\tilde{B}_H(k))^2 E(\tilde{B}_H(j+1)-\tilde{B}_H(j))^2 =$$
$$= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(E(\tilde{B}_H(k+1)-\tilde{B}_H(k))^2)^2 + \frac{4}{n^2}\sum_{k<j}(E(\tilde{B}_H(k+1)-\tilde{B}_H(k))(\tilde{B}_H(j+1)-\tilde{B}_H(j)))^2 =$$
$$= \frac{2}{n^2}\left(n(c+2\sigma^2)^2 + 2\sum_{1\leq k<j\leq n}(E(\tilde{B}_H(k+1)-\tilde{B}_H(k))(\tilde{B}_H(j+1)-\tilde{B}_H(j)))^2\right) =$$
$$= \frac{2(c+2\sigma^2)^2}{n} + \frac{4(n-1)}{n^2}\left(\frac{c}{2}(2^{2H}-2)-\sigma^2\right)^2 +$$
$$+\frac{4}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)(|l-1|^{2H}+|l+1|^{2H}-2|l|^{2H})^2. \tag{6}$$

Аналогічно,

$$VarS_n^{(2)} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(E\left(\tilde{B}_H(k+1)-2\tilde{B}_H\left(k+\frac{1}{2}\right)+\tilde{B}_H(k)\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{4}{n^2}\sum_{1\le k<j\le n}\left(E\prod_{l=k,j}\left(\tilde{B}_H(l+1)-2\tilde{B}_H\left(l+\frac{1}{2}\right)+\tilde{B}_H(l)\right)\right)^2=$$

$$=\frac{2}{n}\left(c(2^{2-2H}-1)+6\sigma^2\right)^2+\frac{4(n-1)}{n^2}\left(\frac{c}{2}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{2H}-6+4\left(\frac{3}{2}\right)^{2H}-2^{2H}\right)+\sigma^2\right)^2+$$

$$+\frac{4}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)\left((l-1)^{2H}-4(l-\frac{1}{2})^{2H}+6l^{2H}-4(l+\frac{1}{2})^{2H}+(l+1)^{2H}\right)^2. \quad (7)$$

Лема 1. *Нехай* $H^*\in(0,1)$, $n\ge 3$. *Для довільних* $H\in(0,H^*]$ *виконується нерівність*

$$VarS_n^{(1)}\le\frac{2(c+2\sigma^2)^2}{n}+\frac{4(c+2\sigma^2)^2}{n}+\frac{4c_1^2}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H^*), H^*<\frac{3}{4};\\ 1+\ln n, H^*=\frac{3}{4};\\ \frac{n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, H^*\in(\frac{3}{4},1),\end{cases} \quad (8)$$

де $c_1=\max(\frac{1}{4},2H^*(2H^*-1))$.

Доведення. Для довільного $H\in(0,1)$:

$$\left|\frac{c}{2}(2^{2H}-2)-\sigma^2\right|\le c+\sigma^2. \quad (9)$$

Для $l\ge 2$ вираз $(l-1)^{2H}+(l+1)^{2H}-2l^{2H}$ є приростом другого порядку функції $f(x)=x^{2H}$, $x>0$ на відрізку $[l-1,l+1]$. Тому існує точка $\eta\in(l-1,l+1)$ така, що

$$|(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}|=|f''(\eta)|=|2H(2H-1)\eta^{2H-2}|=$$
$$=\frac{|2H(2H-1)|}{\eta^{2-2H}}\le\frac{2}{(l-1)^{2-2H}}, l\ge 2.$$

Далі,

$$\frac{4}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\le\frac{4}{n}\sum_{l=2}^{n}\frac{(2H(2H-1))^2}{(l-1)^{4-4H}}\le$$
$$\le\frac{4c_1^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{4-4H^*}} \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{4-4H^*}}\le\begin{cases}\zeta(4-4H^*), H^*<\frac{3}{4};\\ 1+\ln n, H^*=\frac{3}{4};\\ \frac{n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, H^*\in(\frac{3}{4},1).\end{cases} \quad (11)$$

Із рівності (6) та нерівностей (9), (10), (11) слідує оцінка (8) дисперсії $VarS_n^{(1)}$.

Лема 2. *Для довільних* $H\in(0,1)$, $n\ge 3$

$$VarS_n^{(2)}\le\frac{2}{n}(3c+6\sigma^2)^2+\frac{4}{n}\left(\frac{23c}{2}+\sigma^2\right)^2+\frac{9}{4n}\zeta(4), \quad (12)$$

де $\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$, $s>1$ – *дзета-функція.*

Доведення. Для довільного $H \in (0,1)$

$$|\frac{4}{2^{2H}} - 6 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2H} - 2^{2H}| \leq 23; \tag{13}$$

$$|2^{2-2H} - 1| \leq 3; \tag{14}$$

Для $l \geq 2$ вираз $(l-1)^{2H} - 4(l-\frac{1}{2})^{2H} + 6l^{2H} - 4(l+\frac{1}{2})^{2H} + (l+1)^{2H}$ є приростом четвертого порядку функції $f(x) = x^{2H}, x \geq 0$ на відрізку $[l-1, l+1]$.

Тому існує точка $\eta \in (l-1, l+1)$ така, що

$$|(l-1)^{2H} - 4(l-\frac{1}{2})^{2H} + 6l^{2H} - 4(l+\frac{1}{2})^{2H} + (l+1)^{2H}| = |f^{(4)}(\eta)|\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{16}|f^{(4)}(\eta)| = \frac{1}{16}|2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)|\eta^{2H-4} \leq \frac{3}{4}\frac{1}{(l-1)^{4-2H}}.$$

Тому

$$\frac{4}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)((l-1)^{2H} - 4(l-\frac{1}{2})^{2H} + 6l^{2H} - 4(l+\frac{1}{2})^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \leq$$

$$\leq \frac{4}{n}\frac{9}{16}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{1}{(l-1)^{8-4H}} \leq \frac{9}{4n}\zeta(4) \tag{15}$$

Із нерівностей (13), (14), (15) випливає оцінка (12) дисперсії $VarS_n^{(2)}$.

Лема доведена.

Теорема 1. *Для довільного* $H \in (0,1)$

$$S_n^{(1)} \to c + 2\sigma^2,$$

$$S_n^{(2)} \to c(2^{2-2H} - 1) + 6\sigma^2$$

у середньому квадратичному при $n \to \infty$.

Доведення. Із оцінок для дисперсій $VarS_n^{(1)}$, $VarS_n^{(2)}$, отриманих в лемах 1, 2, випливає, що $VarS_n^{(1)} \to 0$, $VarS_n^{(2)} \to 0$, $n \to \infty$, звідки випливає твердження теореми.

Зауваження 1. *Нехай q – натуральне число, $q > \frac{1}{4-4H^*}$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} VarS_{n^q}^{(1)}$ збіжний, звідки випливає, що $S_{n^q}^{(1)} \to c + 2\sigma^2$, $n \to \infty$ з ймовірністю одиниця.*

Зауваження 2. *Для довільного $\alpha > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} VarS_{[n^\alpha]}^{(2)}$ збіжний, звідки випливає, що $S_{[n^\alpha]}^{(2)} \to c(2^{2-2H} - 1) + 6\sigma^2$ з ймовірністю одиниця, де $[x]$ ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2. *Нехай* $H^* \in (0,1)$, *параметр Хюрста* $H \in (0, H^*]$, *параметр* $c \in (0,+\infty)$. *Натуральне число* $q \geq 2$ *вибрано так, що* $q > \frac{1}{4-4H^*}$. *Покладемо* $A_n = S^{(1)}_{n^q} - 2\sigma^2$, $B_n = S^{(2)}_{n^q} - 6\sigma^2$, $n \geq 1$.

Тоді статистика

$$\hat{c}_n = A_n, n \geq 1$$

– строго консистентна оцінка параметра c,

$$\hat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{B_n}{A_n}\right), n \geq 1$$

– строго консистентна оцінка параметра Хюрста H.

Твердження теореми 2 слідує із теореми 1 та зауважень 1, 2.

4. Інтервали надійності. Припустимо, що параметр c належить відрізку $[\delta, \Delta]$, а параметр Хюрста H – проміжку $(0, H^*]$, $H^* \in (0,1)$, $q = [\frac{1}{4-4H^*}] + 2$. Нехай $1 - \varepsilon \in (0,1)$ – заданий коефіцієнт довіри.

Інтервал надійності для параметра $c \in [\delta, \Delta]$.

Через $s(\varepsilon, n)$ позначимо половину довжини інтервала надійності. Внаслідок нерівності Чебишева,

$$\mathbb{P}\{|\hat{c}_n - c| > s(\varepsilon, n)\} = \mathbb{P}\{|A_n - EA_n| > s(\varepsilon, n)\} \leq \frac{VarA_n}{s^2(\varepsilon, n)}.$$

Розглянемо 3 випадки:

1) $H^* < \frac{3}{4}$. У цьому випадку $c_1 \leq \frac{3}{4}$ і

$$VarS^{(1)}_{n^q} \leq \frac{a_1}{n^q}, \tag{16}$$

де $a_1 = 2(2\Delta + 2\sigma^2)^2 + 4(\Delta + \sigma^2)^2 + \frac{9}{4}\zeta(4 - 4H^*)$.

Отже,

$$\mathbb{P}\{|\hat{c}_n - c| > s(\varepsilon, n)\} \leq \frac{a_1}{n^q s^2(\varepsilon, n)} \leq \varepsilon$$

при $s(\varepsilon, n) \geq \sqrt{\frac{a_1}{n^q \varepsilon}}$.

Таким чином, $\mathbb{P}\{c \in (\hat{c}_n - \sqrt{\frac{a_1}{n^q\varepsilon}}, \hat{c}_n + \sqrt{\frac{a_1}{n^q\varepsilon}})\} \geq 1 - \varepsilon$.

2) $H^* = \frac{3}{4}$. Тут як і у попередньому випадку, $c_1 \leq \frac{3}{4}$ і

$$VarS^{(1)}_{n^q} \leq \frac{a_2}{n^q} + \frac{9q\ln n}{4n^q}, \tag{17}$$

де $a_2 = 2(2\Delta + 2\sigma^2)^2 + 4(\Delta + \sigma^2)^2 + \frac{9}{4}$. При цьому можна покласти

$$s(\varepsilon, n) = \sqrt{\frac{4a_2 + 9q\ln n}{4n^q\varepsilon}}.$$

3) $H^* \in (\frac{3}{4}, 1)$. У цьому випадку $c_1 \leq 2$ і

$$VarS^{(1)}_{n^q} \leq \frac{a_3}{n^q} + \frac{16n^{q(4H^*-3)}}{n^q}, \tag{18}$$

де $a_3 = 2(2\Delta + 2\sigma^2)^2 + 4(\Delta + \sigma^2)^2$. При цьому можна покласти

$$s(\varepsilon, n) = \sqrt{\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)}}{n^q \varepsilon}}.$$

Інтервал надійності для параметра Хюрста $H \in (0, H^*]$.

Покладемо $\Theta = 2^{2-2H} - 1$, $H \in (0, H^*]$. Тоді $\hat{\Theta} = \frac{B_n}{A_n}$ – сильно консистентна оцінка параметра Θ; $\hat{\Theta}_n = 2^{2-2\hat{H}_n} - 1$. Спочатку побудуємо інтервал надійності для параметра Θ. Зауважимо, що $\Theta = \frac{EB_n}{EA_n}$. Через $r(\varepsilon, n)$ позначимо половину довжини інтервала надійності для параметра Θ. Маємо

$$\mathbb{P}\{|\Theta_n - \Theta| > r(\varepsilon, n)\} = \mathbb{P}\{|\frac{B_n}{A_n} - \Theta| > r(\varepsilon, n)\} =$$

$$= \mathbb{P}\{|\frac{B_n}{A_n} - \Theta| > r(\varepsilon, n), A_n > 0\} + \mathbb{P}\{|\frac{B_n}{A_n} - \Theta| > r(\varepsilon, n), A_n < 0\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{|B_n - A_n\Theta| > A_n r(\varepsilon, n)\} + \mathbb{P}\{A_n < 0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{B_n - A_n\Theta < -A_n r(\varepsilon, n)\} + \mathbb{P}\{B_n - A_n\Theta > A_n r(\varepsilon, n)\} + \mathbb{P}\{A_n < 0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n > 0\} + \mathbb{P}\{B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n)) > 0\} + \mathbb{P}\{A_n < 0\}.$$

Перший та другий доданки в останньому виразі позначимо відповідно через P_1, P_2.

Зауважимо, що

$$E(A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n) = -r(\varepsilon, n)EA_n = -cr(\varepsilon, n),$$

$$E(B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n))) = -r(\varepsilon, n)EA_n = -cr(\varepsilon, n).$$

Тому

$$P_1 = \mathbb{P}\{A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n - E(A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n) > cr(\varepsilon, n)\},$$

$$P_2 = \mathbb{P}\{B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n)) - E(B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n))) > cr(\varepsilon, n)\}.$$

Далі,

$$P_1 \leq \mathbb{P}\{|A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n - E(A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n)| > cr(\varepsilon, n)\},$$

і

$$P_2 \leq \mathbb{P}\{|B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n)) - E(B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n)))| > cr(\varepsilon, n)\}.$$

Внаслідок нерівності Чебишева та нерівності $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ отримуємо

$$P_1 \leq \frac{Var(A_n(\Theta - r(\varepsilon, n)) - B_n)}{c^2 r^2(\varepsilon, n)} \leq 2\frac{(\Theta - r(\varepsilon, n))^2 Var(A_n) + Var(B_n)}{c^2 r^2(\varepsilon, n)}.$$

$$P_2 \leq \frac{Var(B_n - A_n(\Theta + r(\varepsilon, n)))}{c^2 r^2(\varepsilon, n)} \leq 2\frac{(\Theta + r(\varepsilon, n))^2 Var(A_n) + Var(B_n)}{c^2 r^2(\varepsilon, n)}.$$

Оскільки $\Theta \in (0, 3)$, $r(\varepsilon, n)$ можна вважати менше одиниці, а $c \in [\delta, \Delta]$, то

$$P_1 + P_2 \leq 2\frac{2(\Theta^2 + r^2(\varepsilon, n))Var(A_n) + 2Var(B_n)}{c^2 r^2(\varepsilon, n)} \leq 2\frac{20Var(A_n) + 2Var(B_n)}{\delta^2 r^2(\varepsilon, n)}.$$

Тепер оцінимо зверху $\mathbb{P}\{A_n < 0\}$. Маємо:

$$\mathbb{P}\{A_n - EA_n < -c\} = \mathbb{P}\{EA_n - A_n > c\} \le \mathbb{P}\{|EA_n - A_n| > c\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\{|EA_n - A_n| > \delta\} \le \frac{Var(A_n)}{\delta^2}.$$

Оскільки $VarA_n \to 0$, $n \to \infty$ то існує натуральне число n_0, таке, що для всіх $n \ge n_0$ виконується нерівність

$$\frac{Var(A_n)}{\delta^2} < \varepsilon^2.$$

Зауважимо, що $Var(A_n) = VarS^{(1)}_{n^q}$, $Var(B_n) = VarS^{(2)}_{n^q}$ і відповідне число n_0 можна визначити за допомогою нерівності (8) леми 1. Для $n \ge n_0$

$$\mathbb{P}\{|\Theta_n - \Theta| > r(\varepsilon, n)\} \le 4\frac{10Var(A_n) + Var(B_n)}{\delta^2 r^2(\varepsilon, n)} + \varepsilon^2.$$

Тепер $r(\varepsilon, n)$ визначимо за допомогою нерівності $4\frac{10Var(A_n)+Var(B_n)}{\delta^2 r^2(\varepsilon,n)} < \varepsilon - \varepsilon^2$ та нерівностей для $VarS^{(1)}_{n^q}$, $VarS^{(2)}_{n^q}$. Із нерівності (12) леми 2 слідує наступна, незалежна від H^*, оцінка дисперсії $VarB_n$:

$$VarB_n = VarS^{(2)}_{n^q} \le \frac{a_4}{n^q} \tag{19}$$

де $a_4 = 18(\Delta + 2\sigma^2)^2 + 4\left(\frac{23}{2}\Delta + \sigma^2\right)^2 + \frac{9}{4}\zeta(4)$.

Оцінка дисперсії $VarA_n = VarS^{(1)}_{n^q}$ залежить від H^*. Розглянемо три випадки:

1) $H^* < \frac{3}{4}$. Із оцінок (16), (19) для дисперсій $Var(A_n), Var(B_n)$ слідує, що

$$4\frac{10Var(A_n) + Var(B_n)}{\delta^2 r^2(\varepsilon, n)} \le 4\frac{10a_1 + a_4}{n^q \delta^2 r^2(\varepsilon, n)}.$$

Тепер $r(\varepsilon, n)$ можна визначити із рівності

$$4\frac{10a_1 + a_4}{n^q \delta^2 r^2(\varepsilon, n)} = \varepsilon - \varepsilon^2,$$

$$r(\varepsilon, n) = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{10a_1 + a_4}{n^q(\varepsilon - \varepsilon^2)}}, n \ge n_0.$$

2) $H^* = \frac{3}{4}$. У цьому випадку із нерівностей (17), (19) випливає, що

$$4\frac{10Var(A_n) + Var(B_n)}{\delta^2 r^2(\varepsilon, n)} \le 4\frac{10a_2 + 2,25q\ln n + a_4}{n^q \delta^2 r^2(\varepsilon, n)}.$$

Таким чином, $r(\varepsilon, n)$ визначається із рівності

$$4\frac{10a_2 + 2,25q\ln n + a_4}{n^q \delta^2 r^2(\varepsilon, n)} = \varepsilon - \varepsilon^2,$$

звідки

$$r(\varepsilon, n) = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{10a_2 + 2,25q\ln n + a_4}{n^q(\varepsilon - \varepsilon^2)}}, n \geq n_0.$$

3) $H^* \in (\frac{3}{4}, 1)$. Внаслідок нерівностей (18), (19),

$$4\frac{10Var(A_n) + Var(B_n)}{\delta^2 r^2(\varepsilon, n)} \leq 4\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)} + a_4}{n^q\delta^2 r^2(\varepsilon, n)}.$$

Число $r(\varepsilon, n)$ визначається із рівності

$$4\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)} + a_4}{n^q\delta^2 r^2(\varepsilon, n)} = \varepsilon - \varepsilon^2,$$

звідки

$$r(\varepsilon, n) = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)} + a_4}{n^q(\varepsilon - \varepsilon^2)}}, n \geq n_0.$$

Із інтервалів надійності для параметра $\Theta = 2^{2-2H} - 1$, $H \in (0, H^*]$ отримаємо інтервали надійності для параметра Хюрста H:

$$\Theta \in (\Theta_n - r(\varepsilon, n), \Theta_n + r(\varepsilon, n)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow H \in (1 - \frac{1}{2}\log_2(1 + \Theta_n + r(\varepsilon, n)), 1 - \frac{1}{2}\log_2(1 + \Theta_n - r(\varepsilon, n))).$$

Теорема 3. *Нехай* $0 < \delta < \Delta$, $H^* \in (0, 1)$, $H \in (0, H^*]$, $q = \max([\frac{1}{4-4H^*}] + 1;\ 2)$ *фіксовані числа. Параметр* c *належить відрізку* $[\delta, \Delta]$, $1 - \varepsilon$ *– заданий коефіцієнт довіри. Тоді*

1) Якщо $H^* < \frac{3}{4}$, *то*

$$(\hat{c}_n - \sqrt{\frac{a_1}{n^q\varepsilon}}, \hat{c}_n + \sqrt{\frac{a_1}{n^q\varepsilon}}),$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\log_2(2^{2-2\hat{H}_n} + r(\varepsilon, n)), 1 - \frac{1}{2}\log_2(2^{2-2\hat{H}_n} - r(\varepsilon, n))\right) \tag{20}$$

де $\hat{c}_n = A_n$, $a_1 = 12(\Delta + \sigma^2)^2 + \frac{9}{4}\zeta(4 - 4H^*)$, $\hat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{B_n}{A_n}\right)$, $a_4 = 18(\Delta + 2\sigma^2)^2 + 4(\frac{23}{2}\Delta + 2\sigma^2)^2 + \frac{9}{4}\zeta(4)$, $n \geq n_0 = \min\{n | \frac{a_1}{n^q\delta^2} < \varepsilon^2\}$,

$$r(\varepsilon, n) = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{10a_1 + a_4}{n^q(\varepsilon - \varepsilon^2)}}$$

– інтервали надійності з коефіцієнтом довіри $1 - \varepsilon$ *для параметрів* c, H *відповідно;*

2) Якщо $H^* = \frac{3}{4}$, *то*

$$(\hat{c}_n - \sqrt{\frac{4a_2 + 9q\ln n}{4n^q\varepsilon}}, \hat{c}_n + \sqrt{\frac{4a_2 + 9q\ln n}{4n^q\varepsilon}})$$

та інтервал (20), де $\hat{c}_n$, $\hat{H}_n$, a_4 *визначені в 1),* $a_2 = 12(\Delta + \sigma^2)^2 + \frac{9}{4}$,
$n \geq n_0 = \min\{n | \frac{4a_2 + 9q \ln n}{4n^q} < \varepsilon^2\}$,

$$r(\varepsilon, n) = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{10a_2 + 2,25q \ln n + a_4}{n^q(\varepsilon - \varepsilon^2)}}$$

– інтервали надійності з коефіцієнтом довіри $1 - \varepsilon$ *для параметрів* c, H *відповідно.*

3) Якщо $H^* \in (\frac{3}{4}, 1)$, *то*

$$(\hat{c}_n - \sqrt{\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)}}{n^q\varepsilon}}, \hat{c}_n + \sqrt{\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)}}{n^q\varepsilon}})$$

та інтервал (20), де $\hat{c}_n$, $\hat{H}_n$, a_4 *визначені в 1),* $a_3 = 12(\Delta + \sigma^2)^2$,
$n \geq n_0 = \min\{n | \frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)}}{n^q} < \varepsilon^2\}$,

$$r(\varepsilon, n) = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{a_3 + 16n^{q(4H^*-3)}}{n^q(\varepsilon - \varepsilon^2)}}$$

– інтервали надійності з коефіцієнтом довіри $1 - \varepsilon$ *для параметрів* c, H *відповідно.*

5. Висновок. В роботі отримані консистентні оцінки для параметра Хюрста дробового броунівського руху з коваріаційною функцією (1) і для сталої $c > 0$ та побудовані довірчі інтервали в моделі спостереження з похибкою у вимірюваннях.

Список використаної літератури

1. Kurchenko O. O. Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM. *Theory Stoch. Process.* 2002. Vol. 8(24). P. 242–248.
2. Курченко О. О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 2002. Вип. 67. С. 88–96.
3. Breton J. C. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion. *Electronic Journal of Statistics.* 2009. Vol. 3. P. 416–425.
4. Prakasa Rao B. L. S., Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. Chichester: John Wiley Sons, 2010. 280 p.
5. Аюбова Н. С., Курченко О. О. Оцінюваня параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі реальних вимірювань. *Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка.* 2017. Вип. 2(38). С. 18–23.
6. Кукуш О. Г., Ліхтарьов І. А., Масюк С. В., Чепурний М. І., Шкляр С. В. Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. Київ: ДІА., 2015. 288 с.
7. Synyavska O. O. Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error. *Theory Stoch. Process.* 2016. Vol. 21(37). P. 84–90.
8. Аюбова Н. С. Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі з похибками вимірювань. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика.* 2017. Вип. 2(31). С. 10–14.
9. Dozzi M., Mishura Y., Shevchenko G. Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models. *Statistical Inference for Stochastic Processes, Springer Verlag.* 2015. Vol. 18(2). P. 151–175.
10. Isserlis L. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. *Biometrika.* 1918. Vol. 12. P. 134–139.
11. Ламперти Дж. Случайные процессы. Київ: Вища школа. 1983. 227 с.

Aiubova N. S. Estimation of parameters of the Fractional Brownian Motion by observations with errors and confidence intervals.

Let $B_H(t), t \in \mathbb{R}$ be a random process of fractional Brownian motion with zero mean and covariance function

$$r(s,t) = \frac{c}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}), s, t \in \mathbb{R}$$

with parameters c, H, where $c > 0$, $H \in (0,1)$ is Hurst parameter. In this paper, consistent estimates of the Hurst parameter H and parameter c are built based on observations of fractional Brownian motion at time moments $k + \frac{1}{2}$, where k is a natural number with additive errors. We assume that errors form a sequence of independent and identically-distributed random variables with zero mean and variance σ^2. This sequence of random variables is independent of the fractional Brownian motion $B_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Let $\tilde{B}_H(k)$, $\tilde{B}_H(k+\frac{1}{2})$ are observations of a random process $B_H(t)$ at points k, $k+\frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$ with additive errors. To obtain consistent estimates for parameters c, H, we use statistics which are constructed using increments of the first and second orders of the sequence of random variables $(\tilde{B}_H(k), k \geq 1)$:

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{B}_H(k+1) - \tilde{B}_H(k))^2,$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{B}_H(k+1) - 2\tilde{B}_H\left(k+\frac{1}{2}\right) + \tilde{B}_H(k)\right)^2, n \geq 1.$$

To calculate variances of random variables $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, the Isserlis formula is applied, which occurs for random variables which have a compatible Gaussian distribution with zero mean. The application of this formula is possible due to the Gausianness of the fractional Brownian motion and errors of observations. Let it is known that the Hurst parameter H belongs to the interval $H \in (0, H^*]$, where $H^* \in (0,1)$, is a fixed number, the natural number q satisfies the inequality $q > \frac{1}{4-4H^*}$. Then statistics $\hat{c}_n = A_n$, $\hat{H}_n = 1 - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{B_n}{A_n}\right)$, where $A_n = S_{n^q}^{(1)} - 2\sigma^2$, $B_n = S_{n^q}^{(2)} - 6\sigma^2$ are strictly consistent estimates of parameters c, H. To prove the strict consistency of estimates, upper estimates of $VarS_n^{(1)}$, $VarS_n^{(2)}$ are obtained in the paper. The variance estimate of $VarS_n^{(1)}$ depends on H^* :

$$VarS_n^{(1)} \leq \frac{2(c+2\sigma^2)^2}{n} + \frac{4(c+2\sigma^2)^2}{n} + \frac{4c_1^2}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H^*), H^* < \frac{3}{4};\\ 1 + \ln n, H^* = \frac{3}{4};\\ \frac{n^{4H^*-3}}{4H^*-3}, H^* \in (\frac{3}{4}, 1),\end{cases}$$

Where $c_1 = \max(\frac{1}{4}, 2H^*(2H^*-1))$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots, s > 1$$

is zeta function, whereas $VarS_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$ for all $H^* \in (0,1)$. In this article confidence intervals with specified reliability coefficient $1-\varepsilon$ for parameters c, H are built. Upper estimates of $VarS_n^{(1)}$, $VarS_n^{(2)}$ are used to construct confidence intervals.

Keywords: fractional Brownian motion, Hurst parameter, consistent estimate, confidence intervals, Baxter sums.

References

1. Kurchenko, O. O. (2002). Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM. *Theory Stoch. Process, 8(24)*, 242–248.
2. Kurchenko, O. O. (2002). One strong consistency estimate of the Hurst parameter of the fractional Brownian motion. *Theory Probab. Math. Statist., 67,* 88–96 [in Ukrainian].
3. Breton, J. C. (2009). Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion. *Electronic Journal of Statistics, 3.* 416–425.
4. Prakasa Rao, B. L. S. (2010). Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. Chichester: John Wiley Sons.

5. Aiubova, N. S., & Kurchenko, O. O. (2017). Estimation of the Hurst parameter of fractional Brownian motion in a model of real observations. *Scientific Bulletin of Kyiv National Taras Shevchenko University. Series Maths. And Mech., 2(38),* 18–23 [in Ukrainian].
6. Kukush, A., Likhtarov, I., Masiuk, S., Chepurny, M., & Shklyar, S. (2015). Regression model with measurement errors and their application for estimation of radiation risk. Kyiv [in Ukrainian].
7. Synyavska, O. O. (2016). Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error. *Theory Stoch. Process. 21(37)*, 84–90.
8. Aiubova, N. S. (2017). Estimation of the Hurst parameter of fractional Brownian motion in a model with measurement error. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Series Mathematics and Informatics, 2(31)*, 10–14 [in Ukrainian].
9. Dozzi, M., Mishura, Y., & Shevchenko, G. (2015). Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models. *Statistical Inference for Stochastic Processes, Springer Verlag, 18(2).* 151–175.
10. Isserlis, L. (1918). On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. *Biometrika, 12.* 134–139.
11. Lamperti, J. (1983). Random processes. Kiev: Vyshcha shkola [in Russian].

Одержано 15.10.2019