УДК 512.44
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).19-34

Я. В. Варга[1], О. Г. Рошко[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
ст. викладач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики,
кандидат фізико-математичних наук
iana.varga@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7842-248X

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістрантка 2-го року навчання
oksana.roshko17@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0363-4776

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДІЛЕННЯМ ВІДРІЗКУ ІНТЕГРУВАННЯ НАВПІЛ

Запропоновано новий підхід для дослідження та побудови наближених розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованим нелінійним інтегральним крайовим умовам, які залежать і від похідної. В основі метода [6] лежить перехід від заданих інтегральних крайових умов до параметризованих умов модельного типу, які мають простий вигляд початкових умов.

Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно-аналітична схема, яка базується на параметризованих послідовних наближеннях з покращеними характеристиками збіжності. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайової задачі.

В основі дослідження існування розв'язків розглядуваних крайових задач лежить вивчення розв'язків скінченно вимірної системи наближених визначальних алгебраїчних рівнянь. Ця система може бути записана в явному вигляді на основі побудованої параметризованої послідовності. Таким чином від нескінченно вимірної задачі здійснено перехід до встановлення розв'язності скінченно вимірної системи алгебраїчних рівнянь.

Доведено, що діленням відрізка інтегрування навпіл, в два рази можна покращити достатні умови рівномірної збіжності параметризованих послідовних наближень. Цю техніку і її переваги продемонстровано на прикладі інтегральної крайової задачі, в яких для виконання достатніх умов збіжності потрібно поділити відрізок інтегрування навпіл.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, нелінійна інтегральна крайова задача, неперервно диференційовний розв'язок, параметризація, умова Ліпшиця, ділення відрізку інтегрування, збіжність послідовних наближень.

1. Вступ. У науковій літературі вивчення розв'язків систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих різного вигляду інтегральним крайовим умовам, звертають досить багато уваги [3], [5], [7–10].

Дослідження таких крайових задач пов'язано з властивостями спеціальних послідовностей функцій. Головне обмеження пов'язане із збіжністю цих послідовностей полягає в тому, що найбільше власне значення матриці Q, припускається меншим за одиницю:

$$Q = \frac{3(b-a)}{10}K \tag{1}$$

$$r(Q) < 1. \tag{2}$$

У даній роботі показано, що використовуючи відповідну техніку ділення заданого інтервалу на підінтервали достатню умову вдається послабити в два чи більше разів.

2. Постановка задачі та зведення до двох модельних задач. Розглянемо нелінійну інтегральну крайову задачу вигляду:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \tag{3}$$

$$\int_a^b g(s, u(s), u'(s))ds = \int_a^b g\left(s, u(s), f(s, u(s))\right) ds = d, \tag{4}$$

де $f : [a, b] \times D \to \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times D \times D^{'} \to \mathbb{R}^n$ є неперервні функції в деякій обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^n$, $D^{'} \subset \mathbb{R}^n$ і $d \in \mathbb{R}^n$ заданий постійний вектор.

Зафіксуємо деякі відкриті обмежені області D_a, $D_{\frac{a+b}{2}}$, $D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося неперервно диференційовними розв'язками u крайової задачі (3),(4) такими, що

$$u(a) \in D_a, \quad u\left(\frac{a+b}{2}\right) \in D_{\frac{a+b}{2}} \;\; i \;\; u(b) \in D_b. \tag{5}$$

В загальному можемо вибрати D_a, $D_{\frac{a+b}{2}}$, D_b опуклими множинами.

На основі множин D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$ введемо в розгляд множину

$$D_{a,\frac{a+b}{2}} = (1-\theta)z + \theta\lambda, \; z \in D_a, \; \lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}, \; \theta \in [0, 1]\,, \tag{6}$$

і її покомпонентний векторний ρ^x — окіл

$$D^x = B\left(D_{a,\frac{a+b}{2}}, \rho^x\right). \tag{7}$$

Аналогічно, на основі множин $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b визначимо множину

$$D_{\frac{a+b}{2},b} = (1-\theta)\lambda + \theta\eta, \; \lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}, \; \eta \in D_b, \; \theta \in [0, 1]\,, \tag{8}$$

і її покомпонентний векторний ρ^y — окіл

$$D^y = B\left(D_{\frac{a+b}{2},b}, \rho^y\right). \tag{9}$$

Важливо підкреслити, що D^x, D^y є обмежені множини і надалі припускається, що умови Ліпшиця

$$f \in Lip(K_x, D^x), \; f \in Lip(K_y, D^y), \tag{10}$$

$$\begin{array}{c} |f(t,u) - f(t,v)| \le K_x\,|u-v|\,,\, t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \{u, v\} \in D^x, \\ |f(t,u) - f(t,v)| \le K_y\,|u-v|\,,\, t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \{u, v\} \in D^y \end{array} \tag{11}$$

в цих областях виконується локально.

Ставимо задачу знаходження неперервно диференційовного розв'язку u задачі (3), (4) для яких має місце включення (5).

Насамперед, спростимо інтегральні крайові умови (4) і зведемо їх до підходящих умов модельного типу. Для цього введемо в розгляд векторні параметри

$$z = col(z_1, z_2, \ldots, z_n), \;\; \lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \;\; \eta = col(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \tag{12}$$

формально поклавши

$$z = u(a), \quad \lambda = u\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \eta = u(b). \tag{13}$$

Після цього, замість крайової задачі (3), (4), використовуючи техніку ділення відрізку навпіл, будемо розглядати відповідно на інтервалах $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ та $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, наступні дві модельного типу параметризовані задачі (14)–(15) та (16)-(17):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x(a) = z, \tag{14}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \tag{15}$$

та

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \tag{16}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y(b) = \eta, \tag{17}$$

кожна з яких складається з двох задач Коші, де $z, \lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$ вважаються параметрами. Зауважимо, що довжина інтервалу в задачах (14)–(15) та (16)–(17) є $\frac{b-a}{2}$ в протилежність $b-a$ у випадку вихідної задачі (3), (4).

Техніка параметризації, яку будемо використовувати, полягає у тому, що замість вихідної задачі (3), (4) ми вивчаємо сім'ю параметризованих модельних задач (14)–(15) та (16)–(17). Після цього, розв'язки вихідної КЗ отримуються відповідним вибором чисельних значень введених параметрів.

Зауваження 1. *Множина розв'язків крайової задачі (3), (4) співпадає з тією множиною розв'язків параметризованих задач (14)–(15) та (16)–(17), які задовольняють додатковим умовам (13).*

Лема 1. *([2], Лема 3.13). Нехай $f : [\tau, \tau + I] \to \mathbb{R}^n$ є неперервною функцією. Тоді для довільного $t \in [\tau, \tau + I]$, має місце нерівність*

$$\left| \int_{\tau}^{t} \left[f(\tau) - \frac{1}{I} \int_{\tau}^{\tau+I} f(s)ds \right] d\tau \right| \leq \alpha_1(t, \tau, I)\ \delta_{[\tau,\tau+I]}(f), \tag{18}$$

де

$$\alpha_1(t, \tau, I) = 2\,(t-\tau)\left(1 - \frac{t-\tau}{I}\right), \ |\alpha_1(t, \tau, I)| \leq \frac{I}{2}, \ t \in [\tau, \tau + I], \tag{19}$$

і

$$\delta_{[\tau,\tau+I]}(f) = \frac{\max\limits_{t\in[\tau,\tau+I]} f(t) - \min\limits_{t\in[\tau,\tau+I]} f(t)}{2}.$$

Лема 2. *([2], Лема 3.16). Нехай послідовність безперервних функцій $\{\alpha_m(t, \tau, I)\}_{m=0}^{\infty}$ для $t \in [\tau, \tau + I]$ визначається рекурентним співвідношенням*

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) = \left(1 - \frac{t-\tau}{I}\right) \int_{\tau}^{t} \alpha_m(s, \tau, I)ds + \frac{t-\tau}{I} \int_{t}^{\tau+I} \alpha_m(s, \tau, I)ds, \tag{20}$$

$m = 0, 1, 2, ...,$ *де*

$$\alpha_0(t,\tau,I) = 1,$$

тоді справедлива наступна оцінка для $t \in [\tau, \tau + I]$*:*

$$\alpha_{m+1}(t,\tau,I) \leq \frac{10}{9}\left(\frac{3I}{10}\right)^m \alpha_1(t,\tau,I),\ m \geqslant 0, \tag{21}$$

$$\alpha_{m+1}(t,\tau,I) \leq \frac{3I}{10}\alpha_m(t,\tau,I), m \geqslant 2,$$

де $\alpha_1(t,\tau,I)$ *наводиться в (19).*

3. Ділення відрізку інтегрування навпіл та послідовні наближення. Отже, ми пропонуємо замість ІКЗ (3)–(4) досліджувати спочатку окремо дві допоміжні модельні задачі (14)–(15) та (16)–(17). Для цього побудуємо підходящі ітераційні процеси і вивчатимемо їх властивості.

Покладемо, що областю визначення по фазовій змінній функції f в правій частині системи (3) є множина D^x вигляду (7), тобто $f : \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \times D^x \to \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що $f \in Lip(K_x, D^x)$ з вектором ρ^x, який задовільняє нерівність

$$\rho^x \geq \frac{b-a}{4}\delta_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],D^x}(f), \tag{22}$$

крім того

$$r\left(Q_x\right) < 1,\ \ Q_x = \frac{3(b-a)}{20}K_x. \tag{23}$$

Для параметризованої задачі (14)–(15) введемо в розгляд наступну рекурентну параметризовану послідовність функцій $x_m : \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \to \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, ...$, поклавши

$$x_0(t,z,\lambda) = z + \frac{2(t-a)}{b-a}\left[\lambda - z\right] = \left[1 - \frac{2(t-a)}{b-a}\right]z + \frac{2(t-a)}{b-a}\lambda,$$

$$x_m(t,z,\lambda) = z + \int_a^t f\left(s, x_{m-1}(s,z,\lambda)\right)ds -$$

$$- \frac{2(t-a)}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_{m-1}(s,z,\lambda)\right)ds - \frac{2(t-a)}{b-a}\left[\lambda - z\right],\ \ t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \tag{24}$$

для всіх $m = 1, 2, ..., z \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Подібно, для параметризованої задачі (16)–(17) на підінтервалі $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ покладемо, що областю визначення по фазовій змінній функції f є множина D^y вигляду (9), крім того припустимо, що $f \in Lip(K_y, D^y)$ з вектором ρ^y, який задовільняє нерівність

$$\rho^y \geq \frac{b-a}{4}\delta_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],D^y}(f) \tag{25}$$

і

$$r(Q_y) < 1, \quad Q_y = \frac{3(b-a)}{20}K_y. \tag{26}$$

Для вивчення другої модельної задачі (16)–(17) введемо в розгляд параметризовану послідовність функцій $y_m : \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, ...$, поклавши

$$y_0(t, \lambda, \eta) = \lambda + \frac{2t-a-b}{b-a}\left[\eta - \lambda\right] = \left[1 - \frac{2t-a-b}{b-a}\right]\lambda + \frac{2t-a-b}{b-a}\eta,$$

$$y_m = \lambda + \int_{\frac{a+b}{2}}^{t} f\left(s, y_{m-1}(s, \lambda, \eta)\right) ds -$$

$$- \frac{2t-a-b}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f\left(s, y_{m-1}(s, \lambda, \eta)\right) ds + \frac{2t-a-b}{b-a}\left[\eta - \lambda\right], \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \quad (27)$$

для всіх $m = 1, 2, ...$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що всі члени послідовності функцій (24), (27) задовольняють модельні крайові умови (13) для всіх z, λ і η з $\mathbb{R}^n$.

4. Збіжність послідовних наближень. Будемо використовувати послідовності $x_m : \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \to \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, ...$, і $y_m : \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, ...$ з формул (24) та (27) для дослідженння розв'язків вихідної ІКЗ (3), (4).

Наступне твердження показує, що послідовність функцій (24) рівномірно збігається для всіх $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і її гранична функція є розв'язком певної адитивно збуреної задачі.

Теорема 1. *Нехай існує невід'ємний вектор ρ^x такий, що $f \in Lip(K_x, D^x)$ на інтервалі $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ і який задовольняє нерівність (22) та виконується*

$$r(Q_x) < 1,$$

де матриця Q_x задана (23).

Тоді, для довільної пари векторів $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$:

1. Всі члени послідовності (24) є неперервно диференційовними функціями на інтервалі $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ і задовольняють модельні умови

$$x_m\left(t = a, z, \lambda\right) = z, \; x_m\left(t = \frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = \lambda.$$

2. Послідовності функцій (24) на інтервалі $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ рівномірно збігається при $m \to \infty$ до граничної функції

$$x_\infty\left(t, z, \lambda\right) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z, \lambda).$$

3. Гранична функція задовольняє умови

$$x_\infty\left(a, z, \lambda\right) = z, \; x_\infty\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = \lambda.$$

4. Функція $x_\infty\left(t, z, \lambda\right)$ в області D^x є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int\limits_a^t f(s, x(s))ds -$$

$$-\frac{2(t-a)}{b-a}\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(s,x(s))ds+\frac{2(t-a)}{b-a}\left[\lambda-z\right],\ t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]. \tag{28}$$

Іншими словами, $x_\infty(t,z,\lambda)$ є розв'язком наступної задачі Коші для адитивно збуреної системи:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\frac{2}{b-a}\Delta(z,\lambda),\ \ t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\\&x\left(a\right)=z,\end{aligned} \tag{29}$$

де збурення $\Delta(z,\lambda):D_a\times D_{\frac{a+b}{2}}\ \to\mathbb{R}^n$ є відображенням, яке задається формулою

$$\Delta(z,\lambda)=\lambda-z-\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(s,x_\infty\left(s,z,\lambda\right))ds. \tag{30}$$

5. Має місце наступна оцінка:

$$\left|x_\infty\left(t,z,\lambda\right)-x_m\left(t,z,\lambda\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{10}{9}\alpha_1\left(t,a,\frac{a+b}{2}\right)Q_x^m\left(I_n-Q_x\right)^{-1}\delta_{\left[a,\frac{b-a}{2}\right],D^x}(f),\ \ t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right],m\geq0, \tag{31}$$

де

$$\delta_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],D^x}(f)=\frac{1}{2}\ \left[\max_{(t,x)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times D^x}f(t,x)-\min_{(t,x)\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\times D^x}f(t,x)\right]. \tag{32}$$

Доведення. Справедливість твердження 1 перевіряється прямим обчисленням. Аналогічно [6] доведемо, що при умовах теореми для фіксованих $z\in D_a$, $\lambda\in D_{\frac{a+b}{2}}$ і $t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, послідовність функцій (24) належить області D і є послідовністю Коші у банаховому просторі $C\left(\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\mathbb{R}^n\right)$ з стандартною рівномірною нормою.

Дійсно з використанням оцінки (18) з леми 1 для $\tau=a$, $I=\frac{b-a}{2}$, співвідношення (24) при $m=0$, $t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ випливає, що

$$\left|x_1\left(t,z,\lambda\right)-x_0\left(t,z,\lambda\right)\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\alpha_1\left(t,a,\frac{b-a}{2}\right)\left[\max_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]}f\left(t,x_0\left(t,z,\lambda\right)\right)-\min_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]}f\left(t,x_0\left(t,z,\lambda\right)\right)\right]$$

$$\leq\alpha_1\left(t,a,\frac{b-a}{2}\right)\delta_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],D^x}(f)\leq\frac{b-a}{4}\delta_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],D^x}(f), \tag{33}$$

приходимо до висновку, що $x_1\left(t,z,\lambda\right)\in D^x$, при $(t,z,\lambda)\in[a,b]\times D_a\times D_{\frac{a+b}{2}}$.

Використовуючи це і міркуючи за індукцією згідно леми 2 легко встановити, що

$$\left|x_m\left(t,z,\lambda\right)-x_0\left(t,z,\lambda\right)\right|\leq\alpha_1\left(t,a,\tfrac{b-a}{2}\right)\delta_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],D^x}(f)\leq\tfrac{b-a}{4}\delta_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],D^x}(f),$$
$$m=2,3\ldots,$$

це означає, що всі функції послідовності (24) містяться в області D^x, для всіх $m = 1, 2, 3, \ldots$ та $(t, z, \lambda) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$.

Розглянемо різницю функцій

$$x_{m+1}(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda) = \int\limits_a^t [f(s, x_m(s, z, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, z, \lambda))]\, ds -$$

$$- \frac{2(t-a)}{b-a} \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} [f(s, x_m(s, z, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, z, \lambda))]\, ds, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

і введемо позначення

$$r_m(t, z, \lambda) = |x_m(t, z, \lambda) - x_{m-1}(t, z, \lambda)|, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Відповідно до рекурентного співвідношення (20) леми 2, використовуючи умову Ліпшиця (11) і умову (21), для $m = 1$ з (34) і (33) випливає, що

$$\begin{gathered} r_2(t, z, \lambda) \leq \\ \leq K_x \left[\left(1 - \tfrac{2(t-a)}{b-a} \right) \int\limits_t^a \alpha_1\left(s, a, \tfrac{b-a}{2}\right) ds + \tfrac{2(t-a)}{b-a} \int\limits_b^t \alpha_1\left(s, a, \tfrac{b-a}{2}\right) ds \right] \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \\ \leq K_x \alpha_2\left(t, a, \tfrac{b-a}{2}\right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \tfrac{10}{9} Q_x \alpha_1\left(s, a, \tfrac{b-a}{2}\right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \end{gathered}$$

де матриця Q_x має вигляд (23). За індукцією легко встановити, що

$$\begin{gathered} r_{m+1}(t, z, \lambda) \leq K_x^m \alpha_{m+1}\left(t, a, \tfrac{b-a}{2}\right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \\ \leq \tfrac{10}{9} Q_x^m \alpha_1\left(t, a, \tfrac{b-a}{2}\right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f). \end{gathered}$$

Таким чином, з урахуваннням останньої нерівності

$$\begin{gathered} |x_{m+j}(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda)| \leq \\ \leq |x_{m+j}(t, z, \lambda) - x_{m+j-1}(t, z, \lambda)| + |x_{m+j-1}(t, z, \lambda) - x_{m+j-2}(t, z, \lambda)| + \ldots + \\ |x_{m+1}(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda)| = \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t, z, \lambda) \leq \\ \leq \tfrac{10}{9} \alpha_1\left(t, a, \tfrac{b-a}{2}\right) \sum_{i=1}^{j} Q_x^{m+i-1} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \tfrac{10}{9} \alpha_1\left(t, a, \tfrac{b-a}{2}\right) Q_x^m \sum_{i=0}^{j-1} Q_x^i \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \end{gathered} \tag{35}$$

де $\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f)$ задається в (32). Оскільки, максимальне власне значення матриці Q_x вигляду (23) не перевищує одиницю, то

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q_x^i \leq (I_n - Q_x)^{-1}, \quad \lim_{m \to \infty} Q_x^m = 0_n.$$

Таким чином, згідно з критерієм Коші, з нерівності (35) випливає, що послідовність функцій $\{x_m(t, z, \lambda)\}_{m=0}^{\infty}$ вигляду (24) рівномірно збігається в області $(t, z, \lambda) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ до граничної функції $x_\infty(t, z, \lambda)$.

Так як всі функції послідовності (24) задовольняють умови $x_m(a, z, \lambda) = z$, $x_m(b, z, \lambda) = \lambda$ для всіх значень введених параметрів $z \in D_a$, $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$, можна зробити висновок, що гранична функція $x_\infty(t, z, \lambda)$ також їх задовольняє. Перейшовши у рівності (24) до границі при $m \to \infty$ отримаємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (28) або що теж саме є розв'язком задачі Коші (29), де $\Delta(z, \lambda)$ задається формулою (30). При переході до границі при $j \to \infty$ у (24) отримаємо оцінку (31), що і завершує доведення.

Теорема 2. *Нехай існує невід'ємний вектор ρ^y такий, що $f \in Lip(K_y, D^y)$ на інтервалі $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, який також задовольняє нерівність (25) і*

$$r(Q_y) < 1$$

де матриця Q_y задана в (26).

Тоді для довільної фіксованої пари векторів $(\lambda, \eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$:

1. Всі члени послідовності функції (27) є неперервно диференційовними на інтервалі $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ і задовольняють модельні умови

$$y_m\left(t = \frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right) = \lambda,\ \ y_m\left(t = b, \lambda, \eta\right) = \eta.$$

2. Послідовністі функцій (27) на інтервалі $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ рівномірно збігається при $m \to \infty$ до граничної функції

$$y_\infty\left(t, \lambda, \eta\right) = \lim_{m\to\infty} y_m(t, \lambda, \eta).$$

3. Гранична функція задовольняє умови

$$y_\infty\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right) = \lambda,\ \ y_\infty\left(b, \lambda, \eta\right) = \eta.$$

4. Функція $y_\infty\left(t, \lambda, \eta\right)$ в області D^y є единим неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \lambda + \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(s, y(s))ds -$$

$$-\frac{2t-a-b}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s, y(s))ds + \frac{2t-a-b}{b-a}\left[\eta - \lambda\right],\ \ t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Іншими словами, $y_\infty\left(t, \lambda, \eta\right)$ є розв'язком наступної задачі Коші для збуреної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)\ + \frac{2}{b-a}H(\lambda, \eta),\ \ t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \tag{36}$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda,$$

де збурення $H(\lambda,\eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$ *є відображенням, яке задається формулою*

$$H(\lambda,\eta) = \eta - \lambda - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s, y_\infty(s,\lambda,\eta))ds. \tag{37}$$

5. Має місце наступна оцінка:

$$|y_\infty(t,\lambda,\eta) - y_m(t,\lambda,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{10}{9}\alpha_1\left(t, \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) Q_y^m (I_n - Q_y)^{-1} \delta_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],D^y}(f), t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], m \geq 0,$$

де

$$\delta_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],D^y}(f) = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\times D^y} f(t,x) - \min_{(t,x)\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\times D^y} f(t,x)\right].$$

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1.

5. Граничні функції і визначальні рівняння. Природно сподіватися, що граничні функції $x_\infty(t,z,\lambda)$ і $y_\infty(t,\lambda,\eta)$ послідовностей (24) і (27) на підінтервалах $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ можуть бути корисними для отримання критерія розв'язності ІКЗ (3), (4). Виявляється, що функції

$$\Delta(z,\lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \to \mathbb{R}^n \text{ і } H(\lambda,\eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$$

які задані рівняннями (30) і (37) дають можливість зробити такий висновок.

Насправді, теореми 1 і 2 гарантують, що при зроблених допущеннях функції

$$x_\infty(t,z,\lambda) : \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \to \mathbb{R}^n \text{ і } y_\infty(t,\lambda,\eta) : \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \to \mathbb{R}^n$$

є коректно визначеними для всіх $(z,\lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і $(\lambda,\eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$. Тому, якщо покласти

$$u_\infty(t,z,\lambda,\eta) := \begin{cases} x_\infty(t,z,\lambda), \text{ якщо } t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ y_\infty(t,\lambda,\eta), \text{ якщо } t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} \tag{38}$$

ми одержимо функцію $u_\infty(t,z,\lambda,\eta) : [a,b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$, яка також коректно визначена для тих же значень параметрів $(z,\lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і $(\lambda,\eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$. Очевидно, що ця функція є неперервною, тому що в точці $t = \frac{a+b}{2}$ маємо

$$x_\infty\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = y_\infty\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right) = \lambda. \tag{39}$$

Поряд з рівняннями (14) і (15) визначених відповідно на інтервалах $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ і $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, введемо в розгляд наступні рівняння з адитивним збуренням у правій частині

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \frac{2}{b-a}\mu^x, \ t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \tag{40}$$

з початковою умовою

$$x(a) = z, \tag{41}$$

та

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \ + \frac{2}{b-a}\mu^y, \ t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \tag{42}$$

з початковою умовою

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \tag{43}$$

де

$$\mu^x = \mathrm{col}\left(\mu_1^x, ..., \mu_n^x\right), \ \mu^y = \mathrm{col}\left(\mu_1^y, ..., \mu_n^y\right) \in \mathbb{R}^n$$

вважаємо керуючими параметрами.

Теорема 3. *Нехай $z \in D_a$ і $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$ є фіксовані. Припустимо, що всі умови теорем 1, 2 мають місце.*

Тоді, для того, щоб розв'язки $x(\cdot, a, z)$ і $y(\cdot, \frac{a+b}{2}, \lambda)$ задач Коші (40), (41) і (42), (43), відповідно мали властивості модельних умов

$$x(a) = z, \ x\left(\frac{a+b}{2}, a, z\right) = \lambda,$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \ y\left(b, \frac{a+b}{2}, \lambda\right) = \eta,$$

необхідно і достатньо, щоб керуючі параметри μ^x і μ^y були задані формулами:

$$\mu^x = \lambda - z - \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_\infty(s, z, \lambda))ds$$

та

$$\mu^y = \eta - \lambda - \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s, y_\infty(s, \lambda, \eta))ds,$$

де $x_\infty(\cdot, z, \lambda)$ і $y_\infty(\cdot, \lambda, \eta)$ є відповідно граничними функціями послідовностей (24) та (27). Більш того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty(\cdot, z, \lambda), \ \ y\left(\cdot, \frac{a+b}{2}, \lambda\right) = y_\infty(\cdot, \lambda, \eta).$$

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2, [11].

Наступна теорема встановлює зв'язок функції (38) з розв'язком ІКЗ (3), (4) в термінах нулів функцій $\Delta(z, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \to \mathbb{R}^n$ та $H(\lambda, \eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$, які визначені в (30), (37).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теорем 1, 2. Тоді:*

1. Функція $u_\infty(t, z, \lambda, \eta) : [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$ задана згідно (38) є неперервно диференційовним розв'язком ІКЗ (3), (4) тоді і тільки тоді, коли *трійка векторів (z, λ, η) задовольняє систему $3n$ алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{aligned}
&\Delta(z,\lambda) = \lambda - z - \int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_\infty(s,z,\lambda))ds = 0, \\
&H(\lambda,\eta) = \eta - \lambda - \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s, y_\infty(s,\lambda,\eta))ds = 0, \\
&P(z,\lambda,\eta) = \int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} g\left(s, x_\infty(s,z,\lambda), x'_\infty(s,z,\lambda)\right) ds + \\
&+ \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} g\left(s, y_\infty(s,\lambda,\eta), y'_\infty(s,z,\lambda)\right) ds - d = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

2. Для будь-якого розв'язку $U(\cdot)$ задачі (3), (4) з властивістю

$$\left(U(a), U\left(\frac{a+b}{2}\right), U(b)\right) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b,$$

існує така трійка векторів (z_0, λ_0, η_0), що

$$U(\cdot) = u_\infty(t, z_0, \lambda_0, \eta_0),$$

де функція $u_\infty(t, z_0, \lambda_0, \eta_0)$ задана згідно (38).

Доведення. Неперервна диференційовність розв'язку

$$u_\infty(t,z,\lambda,\eta) : [a,b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n$$

в точці $t = \frac{a+b}{2}$ випливає з рівнянь (39), (29), (36), та з перших двох формул системи (44), неперервна диференційовність цієї функції в інших точках відрізку очевидна з їх означення.

Систему рівнянь (44) називають системою визначальних рівнянь тому, що її корені визначають розв'язки заданої крайової задачі.

Хоча Теорема 4 теоретично дає відповідь як побудувати розв'язок КЗ (3), (4), одначе її застосування пов'язане з труднощями, тому що явний вигляд $x_\infty(t,z,\lambda)$, $y_\infty(t,\lambda,\eta)$ і функцій

$$\Delta(z,\lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \to \mathbb{R}^n,\ H(\lambda,\eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n,$$

$$P(z,\lambda,\eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \to \mathbb{R}^n,$$

які задані в (44) зазвичай є невідомими. Ці труднощі можуть бути подолані, якщо застосувати функції $x_m(s,z,\lambda)$, $y_m(s,\lambda,\eta)$ для якогось фіксованого m. На їх основі замість точної визначальної системи можна розглядати так звану m-ту наближену систему визначальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\Delta_m(z,\lambda)=\lambda-z-\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(s,x_m\left(s,z,\lambda\right),)ds=0,\\
&H_m(\lambda,\eta)=\eta-\lambda-\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s,y_m\left(s,\lambda,\eta\right))ds=0,\\
&P_m(z,\lambda,\eta)=\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} g\left(s,x_m\left(s,z,\lambda\right),x_m^{'}\left(s,z,\lambda\right)\right)ds+\\
&+\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} g\left(s,y_m\left(s,\lambda,\eta\right),y_m^{'}\left(s,z,\lambda\right)\right)ds-d=0.
\end{aligned}\tag{45}$$

Зауважимо, що в противагу (44) m-та наближена визначальна система (45) містить в собі члени, які залежать від функцій $x_m\left(\cdot,z,\lambda\right)$, $y_m\left(\cdot,\lambda,\eta\right)$ і тому вона явно може бути побудована.

Природно очікувати, що наближення до невідомого розв'язку задачі (3), (4) може бути отримано на основі функції

$$u_m(t,z,\lambda,\eta)=\left\{\begin{array}{c} x_m\left(t,z,\lambda\right),\ \text{якщо}\ t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\\ y_m\left(t,\lambda,\eta\right),\ \text{якщо}\ t\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{array}\right.\tag{46}$$

яка є „наближеним" варіантом до (38) і яка коректно визначена для всіх $t\in[a,b]$ та $(z,\lambda)\in D_a\times D_{\frac{a+b}{2}}$, $(\lambda,\eta)\in D_{\frac{a+b}{2}}\times D_b$.

Лема 3. *Якщо вектори z, λ і η задовольняють наближену систему визначальних рівнянь (45), для деякого фіксованого m, тоді функція $u_m(t,z,\lambda,\eta)$, яка задана рівнянням (46) є неперервно диференційовною на відрізку $[a,b]$.*

Приклад 1. *Застосуємо техніку ділення відрізку навпіл, що описана вище на відрізку [0,1] до системи диференціальних рівнянь:*

$$\begin{array}{c}\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{t}{4}x_2^2(t)-\frac{7}{2}tx_1(t)+\frac{27}{64}t^3+\frac{3}{5}t:=f_1(t,x_1,x_2),\\ \frac{dx_2(t)}{dt}=t^2x_1(t)-\frac{t}{4}x_2(t)-\frac{1}{8}t^4-\frac{3}{80}t^2+\frac{1}{4}:=f_2(t,x_1,x_2),\end{array}\tag{47}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\begin{array}{c}\int_0^1 sx_1(s)x_2(s)x_1'(s)ds=\frac{11}{3840}\\ \int_0^1 s^2x_2^2(s)x_2'(s)ds=\frac{1}{320}\end{array}\tag{48}$$

Очевидно, що (47), (48) є окремим випадком (3), (4) при $a:=0$, $b:=1$,

$$f(t,x_1,x_2):=\left(\begin{array}{c}\frac{t}{4}x_2^2(t)-\frac{7}{2}tx_1(t)+\frac{27}{64}t^3+\frac{3}{5}t\\ t^2x_1(t)-\frac{t}{4}x_2(t)-\left(\frac{1}{8}t^2+\frac{3}{80}\right)t^2+\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$g(t,x_1,x_2,x_1^{'},x_2^{'}):=\begin{pmatrix} tx_1x_2x_1' \\ t^2x_2^2x_2'\end{pmatrix}$, і $d:=\begin{pmatrix} 11/3840 \\ 1/320\end{pmatrix}$.

Можна перевірити, що точний розв'язок ІКЗ (47), (48) має вигляд:

$$x_1^*=\frac{t^2}{8}+\frac{1}{10},\ \ x_2^*=\frac{t}{4}.\tag{49}$$

Введемо наступні параметри, згідно (12), (13):

$$z := x(0) = col(x_1(0), x_2(0)) = col(z_1, z_2),$$
$$\lambda := x\left(\frac{1}{2}\right) = col\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = col\left(\lambda_1, \lambda_2\right),$$
$$\eta := x(1) = col\left(x_1\left(1\right), x_2\left(1\right)\right) = col\left(\eta_1, \eta_2\right).$$

Нехай опуклі підмножини D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$, де шукаємо значення розв'язку $x(a)$ та $x(\frac{a+b}{2})$, мають вигляд:

$$D_a = D_{\frac{a+b}{2}} = \left\{(x_1, x_2) : 0.001 \le x_1 \le 0.14,\ -0.1 \le x_2 \le 0.14\right\}.$$

А опуклі підмножини $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b, де шукаємо значення розв'язку $x(\frac{a+b}{2})$ та $x(b)$ виглядають наступним чином:

$$D_{\frac{a+b}{2}} = D_b = \left\{(y_1, y_2) : 0.12 \le y_1 \le 0.23,\ 0.1 \le y_2 \le 0.26\right\}.$$

В цьому випадку опукла лінійна комбінація $D_{a,\frac{a+b}{2}}$ вигляду (6) для векторів $z \in D_a$ і $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$ є наступною: $D_{a,\frac{a+b}{2}} = D_a = D_{\frac{a+b}{2}}$, а опукла лінійна комбінація $D_{\frac{a+b}{2},b}$ вигляду (8) для векторів $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$ і $\eta \in D_b$ є наступною: $D_{\frac{a+b}{2},b} = D_{\frac{a+b}{2}} = D_b$.

Вектор ρ^x та ρ^y вибираємо наступним чином

$$\rho^x = \rho^y = col\left(0.7;\ 0.7\right).$$

Таблиця 1. Наближені значення параметрів для точного розв'язку (49)

	m=0	m=1	m=3	m=7
z_1	0.06421701460	0.09906628668	0.1001168533	0.1000004488
z_2	0.005996242672	0.0001225348381	-0.00001755409528	$-5.536578960 \times 10^{-8}$
λ_1	0.1058443567	0.1305971424	0.1313113474	0.1312502829
λ_2	0.1298611545	0.1250915341	0.1249880058	0.1249999615
η_1	0.2149835312	0.2247209962	0.2250320802	0.2250001206
η_2	0.2513983582	0.2499957088	0.2499954852	0.2499999962

Отже, ρ^x – окіл D^x для $D_{a,\frac{a+b}{2}}$ задається наступним чином

$$D^x = \left\{(x_1, x_2) : -0.701 \le x_1 \le 0.84,\ -0.8 \le x_2 \le 0.84\right\}$$

Векторний ρ^y – окіл D^y для $D_{\frac{a+b}{2},b}$ задається наступним чином

$$D^y = \left\{(y_1, y_2) : -0.58 \le y_1 \le 0.93,\ -0.6 \le y_2 \le 0.96\right\}.$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (10) для правої частини системи диференціальних рівнянь (47) в області $D = D^x \cup D^y$ виконується з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 7/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix},$$

але в цьому випадку не виконується умова (2), оскільки

$$Q = \frac{3}{10}\begin{bmatrix} 7/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}, \ r(Q) = 1.061405 > 1.$$

Після ділення відрізку інтегрування навпіл в областях D^x та D^y умова Ліпшиця (11) виконується, відповідно з матрицями K_x, K_y, на основі яких

$$Q_x := \frac{3}{20}K_x = \frac{3}{20}\begin{bmatrix} 7/4 & 1/32 \\ 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}, \quad r(Q_x) = 0.2632 < 1,$$

$$Q_y := \frac{3}{20}K_y = \frac{3}{20}\begin{bmatrix} 7/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad r(Q_y) = 0.5307 < 1.$$

Якщо вектори ρ^x, ρ^y вибрати як нижче вказано і обчислити $\delta_{[a,\frac{a+b}{2}],D^x}(f)$, $\delta_{[\frac{a+b}{2},b],D^y}(f)$, то отримаємо:

$$\delta_{[a,\frac{a+b}{2}],D^x}(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times D^x} f(t,x) - \min_{(t,x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times D^x} f(t,x)\right] = \begin{bmatrix} 1.392475, \\ 0.295125 \end{bmatrix},$$

$$\rho^x = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4}\delta_{[a,\frac{a+b}{2}],D^x}(f) = \begin{bmatrix} 0.34811875, \\ 0.07378125 \end{bmatrix}.$$

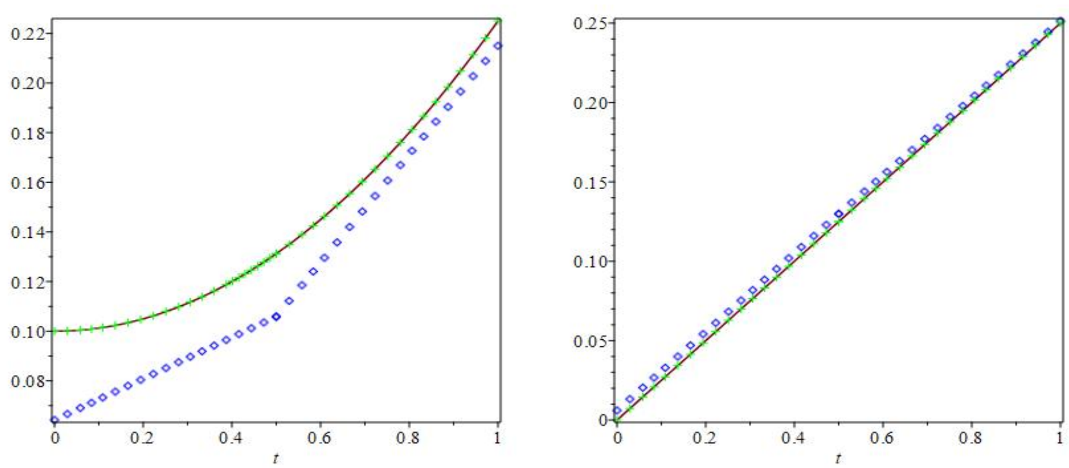
$$\delta_{[\frac{a+b}{2},b],D^y}(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]\times D^y} f(t,x) - \min_{(t,x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]\times D^y} f(t,x)\right] = \begin{bmatrix} 2.7577, \\ 0.95 \end{bmatrix},$$

$$\rho^y = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4}\delta_{[\frac{a+b}{2},b],D^y}(f) = \begin{bmatrix} 0.689425, \\ 0.2375 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, ми перевірили, що всі умови теорем 1, 2 для крайової задачі (47), (48) мають місце.

Використовуючи пакет символьної математики Maple розв'язуємо наближену систему визначальних рівнянь (45) при $m = 0, 1, 3, 7$ і отримуємо чисельні результати, які представлені в таблиці 1.

На рис. 1 зображено графіки компонент точного (49) та наближеного розв'язків на нульовій і сьомій ітерації.



а) перша компонента б) друга компонента

Рис. 1. Точний розв'язок (49) (лінія) та його нульове ($\diamond$) і сьоме наближення ($\times$).

Похибка сьомої апроксимації ($m = 7$) наступна:

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{71}(t)| \leq 3 \cdot 10^{-8}, \quad \max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{72}(t)| \leq 5 \cdot 10^{-8}.$$

6. Висновки. У даній статті показано, що у тих випадках коли не виконуються достатні умови збіжності для модельної параметризованої послідовності функцій, а саме коли найбільше власне значення певної матриці, що визначається локальними умовами Ліпшиця, більше за одиницю, тоді доцільно застосовувати техніку ділення відрізку інтегрування на підінтервали.

Так, у випадку ділення відрізку інтегрування $[a, b]$ навпіл, вихідна нелінійна інтегральна крайова задача зводиться до двох модельних параметризованих задач, які визначені і вивчаються відповідно на відрізках $\left[a, \frac{b+a}{2}\right]$ та $\left[\frac{b+a}{2}, b\right]$.

Просто будуються дві модельні параметризовані послідовності. Доводиться їх рівномірна збіжність. Встановлюється зв'язок розв'язків модельних задач з розв'язком вихідної інтегральної задачі.

Доведено, що у випадку ділення відрізку інтегрування навпіл в два раза вдається покращити достатні умови збіжності побудованих послідовностей.

Список використаної літератури

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно–аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Київ: Наукова думка, 1992. 279 с.
2. Ronto A., Ronto M., Successive Approximation Techniques in Non- Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations , Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, vol. IV, 441–592, Edited by F. Batelli and M. Feckan, Elsevier B.V., 2008.
3. Mao J., Zhao Z., Xu N. On existence and uniqueness of positive solutions for integral boundary value problems. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2010. No. 16, P. 1–8.
4. Ronto A., Ronto M. Periodic successive approximations and interval halving. *Miskolc Mathematical Notes.* 2012. Vol. 13, No. 1, P. 459–482.
5. Варга Я. В. Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика.* 2015. Вип. 26, № 1. С. 23–34.
6. Ronto A., Ronto M., Varha J. A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation.* 2015.Vol. 250, P. 689–700. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.021.
7. Ronto M., Varha Y. Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems. *Miskolc Mathematical Notes.* 2015. Vol. 16, No. 2, P. 1129–1152. DOI: https://doi.org/10.181514/MMN.2015.1192.
8. Ronto M., Varha Y. Constructive existence analysis of solutions o non–linear integral boundary value problems. *Miskolc Mathematical Notes.* 2014. Vol. 15, No. 2, P. 725–742.
9. Ronto M., Varha Y. Integral boundary value problems and division into subintervals. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Series mathematics and informatics.* 2015. Vol. 27, No. 2, P. 144–153.
10. Varha I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes.* 2018. Vol. 19, No. 2, P. 1233–1241. DOI: https://doi.org/10.18514/MMN.2018.2738
11. Ronto M., Varha Y., Marynets K. *Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems Tatra Mountains, Mathematical Publications.* 2015. Vol. 63, P. 247–267. DOI: https://doi.org/10515/tmmp-2015-0035.

Varga I. V., Roshko O. H. Investigation of integral boundary value problems by dividing the segment of integration in half.

We give a new approach for the investigation of existence and construction of on approximate solutions of nonlinear non-autonomous systems of ordinary differential equations under nonlinear integral boundary conditions depending on the derivative. At the heart of the method [6] are transition from given integral boundary conditions to parametrized conditions model type, which have a simple appearance of the initial conditions.

For a model parametrized problem, a constructive numerical analytical schemes is constructed, which is built on parametrized approximations with improved convergence characteristics. The connections between the solutions is established model and transitional of the boundary value problems.

It is proved that by dividing the segment of integration in half, twice can be improved sufficient conditions uniform convergence parametrized sequential approximations. This technique and its advantages are shown in the example of integral boundary value problem, in which to perform sufficient convergence conditions we need to divide the segment of integration in half.

Keywords: ordinary differential equations, nonlinear integral boundary value problems, continuously differentiated solution, Lipschitz condition, division segment integration, convergence of successive approximations.

References

1. Samoilenko, A .M., & Ronto, M. I. (1992). Numerical–analytical methods in the theory of boundary value problems of ordinary value differential equations. *Kyiv: Scientific thought* [in Russian].
2. Ronto, A. & Ronto, M. (2008). Successive Approximation Techniques in Non- Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. In F. Batelli & M. Feckan (Ed.). *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, 4,* 441–592,
3. Mao, J., Zhao, Z. & Xu, N. (2010). On existence and uniqueness of positive solutions for integral boundary value problems. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 16,* 1–8.
4. Ronto, A., & Ronto, M. (2012). Periodic successive approximations and interval halving. *Miskolc Mathematical Notes. 13, 1,* 459–482.
5. Varga, I. V. (2015). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 26, 1,* 23–34 [in Ukrainian].
6. Ronto, A., Ronto, M., & Varha, J. (2015). A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation 250,* 689–700. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.021
7. Ronto, M., & Varha, Y.(2015). Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems. *Miskolc Mathematical Notes, 16, 2,* 1129–1152. https://doi.org/10.181514/MMN.2015.1192
8. Ronto, M., & Varha, Y. (2014). Constructive existence analysis of solutions o non–linear integral boundary value problems. *Miskolc Mathematical Notes, 15, 2,* 725–742.
9. Ronto, M., & Varha, Y. (2015). Integral boundary value problems and division into subintervals. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. mathematics and informatics, 27, 2,* 144–153.
10. Varha, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes, 19, 2,* 1233–1241. https://doi.org/10.18514/MMN.2018.2738
11. Ronto, M., Varha, Y., & Marynets, K.(2015). Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems *Tatra Mountains, Mathematical Publications, 63,* 247–267. https://doi.org/10515/tmmp-2015-0035

Одержано 17.10.2019