УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).35-51

М. С. Герич

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9634-5254

ПРО РОЗПОДІЛ ПЕРЕСТРИБКІВ ЧЕРЕЗ НЕСКІНЧЕННО ВІДДАЛЕНИЙ РІВЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СКАЛЯРНИХ ГРАТЧАСТИХ ПРОЦЕСІВ

Процеси ризику описуються складними пуассонівськими процесами. Основні характеристики, що досліджуються в теорії ризику, тісно пов'язані з розподілами граничних функціоналів для однорідних процесів з незалежними приростами (екстремумів на скінченному інтервалі, абсолютних екстремумів, перестрибкових функціоналів та інших). В більшості робіт з теорії ризику такий зв'язок не достатньо освітлюється і відомі результати для розподілу функціоналів процесів з незалежними приростами часто залишаються осторонь при вивченні задач ризику. В той же час для однорідних процесів з незалежними приростами та випадкових блукань багато результатів з розподілу екстремумів та інших функціоналів можна використати і пристосувати для опису основних характеристик як у теорії ризику, так і в теорії систем масового обслуговування.

Мета даної роботи одержати результати для розподілу абсолютних екстремумів граничних функціоналів і привернути увагу на зв'язок теорії ризику з граничними задачами для випадкових процесів з незалежними приростами. Для майже напівнеперервних знизу процесів розглядаються граничні задачі, пов'язані з розподілами різних граничних функціоналів, які мають не лише теоретичний інтерес, а й практичне застосування.

При дослідженні задач, пов'язаних з розподілом граничних функціоналів використовується багато різних методів, які можна умовно поділити на прямі (імовірнісні) та аналітичні. Але найбільш привабливим є одержання точних формул, тому у даній роботі проводяться дослідження деяких розподілів граничних функціоналів факторизаційним методом, який дозволяє отримати результати без суттєвих обмежень на процес.

Дана стаття присвячена вивченню розподілів перестрибкових функціоналів через нескінченно віддалений рівень для одного класу цілочислових гратчастих пуассонівських процесів. А саме, досліджуються майже напівнеперервні знизу процеси, які перетинають від'ємний рівень лише геометрично розподіленими стрибками. У роботі отримано співвідношення для спільних генератрис перестрибкових функціоналів та умовних генератрис скінченного рівня x для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів, а також доведено справедливість співвідношень для генератрис перестрибку, недострибку та стрибка, що накриває нескінченно віддалений рівень у випадку довільного знаку середнього значення процесу.

Ключові слова: майже напівнеперервні знизу процеси, генератриси екстремумів, перестрибкові функціонали.

Дана стаття присвячена вивченню розподілів перестрибкових функціоналів для цілочислових пуассонівських гратчастих процесів. Зауважимо, що в розділі 7 монографії [1] та у роботі [2] для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$ розподіли $\gamma_k(x)$ розглядалися не для всіх випадків значень процесу $m_1^0 = E\xi(1)$ і лише при скінченних $x < \infty$ там детально вивчався розподіл

$\gamma_k(x)$. В роботі [3] було детально вивчено питання розподілу перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, отримано співвідношення для генератрис $\gamma_k(0)$ при різних знаках значення m_1^0. Дослідження ж розподілів перестрибкових функціоналів у випадку нескінченно віддаленого рівня не є достатньо вивчено, щоб усунути цю прогалину, зупинимось на вивченні питання про розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x \to \infty$.

Для цього введемо складний пуассонівський процес

$$\xi(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k ,$$

де $\nu(t)$ – процес Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Означення 1. *Однорідний процес з незалежними приростами $\{\xi(t), t \ge 0, \xi(0) = 0\}$ називається гратчастим пуассонівським процесом, якщо стрибкова міра Леві зосереджена в послідовності точок $\{x_r = rh\}$ ($h > 0, r \ne 0$ – ціле) і визначається співвідношенням*

$$\Pi_0(r) = \Pi_0(x_r) = \lambda p_r,\ p_r = P\{\xi_1 = rh\},\ r = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots,$$

а генератриса такого процесу визначається співвідношенням

$$g_t(z) = Ez^{\xi(t)} = e^{tk(z)},\ |z| = 1,$$

$$k(z) = \lambda(p(z) - 1),\ p(z) = Ez^{\xi_1} = \sum_{r \ne 0} z^{rh} p_r,\ |z| = 1. \tag{1}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $h = 1$ і розглядати тільки цілозначні процеси. Як і раніше функцію $k(z) = \ln g_1(z)$ називаємо кумулянтою процесу.

Означення 2. *Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\ t \ge 0,\ \xi(0) = 0\}$ називається майже напівнеперервним знизу, якщо $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише геометрично розподіленими стрибками, а його кумулянта має вигляд*

$$k(z) = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1 - z}{z - b}\ (0 < b < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0),\ |m_1^0| < \infty. \tag{2}$$

Означення 3. *Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\ t \ge 0,$ $\xi(0) = 0\}$ називається напівнеперервним знизу якщо $b = 0$.*

Зокрема процес $\xi(\theta_s)$ має генератрису

$$g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s - k(z)},\ |z| = 1. \tag{3}$$

Крім того, для генератриси процесу $\xi(\theta_s)$ має місце основна факторизаційна тотожність (див. [4], [5])

$$g(s, z) = g_+(s, z) g_-(s, z),\ |z| = 1, \tag{4}$$

де $g_\pm(s,z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}$ $(|z|^{\pm 1} \le 1)$.

Введемо позначення граничних функціоналів процесу
$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}$ – момент 1-го досягнення рівня $x \ge 0$,
$\gamma_1(x) = \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$ – перший перестрибок через x,
$\gamma_2(x) = \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0)$ – перший недострибок $\xi(t)$,
$\gamma_3(x) = \gamma_x^+ = \gamma_1(x) + \gamma_2(x)$ – перший стрибок, що накриває рівень x,
$\xi^\pm(t) = \sup\limits_{0 \le u \le t} (inf)\, \xi(u),\ \xi^\pm = \sup\limits_{0 \le t < \infty} (inf)\, \xi(t)$ – екстремуми процесу $\xi(t)$.

Позначимо через θ_s випадкову величину з показниковим розподілом: $P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \ge 0$ і відповідно генератриси цих функціоналів

$$g(s,z) = Ez^{\xi(\theta_s)}\,(|z| = 1),\ g_\pm(s,z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}\,(|z|^{\pm 1} \le 1);$$

$$V(s,x,u_1,u_2,u_3) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_1^{\gamma_1(x)} u_2^{\gamma_2(x)} u_3^{\gamma_3(x)},\ \tau^+(x) < \infty];$$

$$V_k(s,x,u_k) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_k^{\gamma_k(x)},\ \tau^+(x) < \infty],\ k = \overline{1,3}.$$

В позначеннях $V(...)$ та $V_k(...)$ у випадку $m_1^0 \ge 0$ $P\{\tau^+(x) < \infty\} = 1$, тому в них достовірна подія пропускається.

Спільна генератриса всіх перестрибкових функціоналів визначається при довільному знаку m_1^0, згідно з теоремою 7.7. в [2], таким чином

$$sV(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s) W(s, x-y, u_1,u_2,u_3), x \in \mathbb{Z}_0^+, \tag{5}$$

$$p_{\pm y}^\pm(s) = P\{\xi^\pm(\theta_s) = \pm y\}, y \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$W(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y \ge 0} A(x+y,u_1,u_2,u_3) p_{-y}^-(s),\ x \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$A(x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{k \ge x+1} u_1^{k-x} u_2^x u_3^k \Pi_0^+(k),\ \Pi_0^+(k) = \lambda_1 p_k,\ x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Ми обмежимось розглядом генератрис маргінальних розподілів. Зокрема, згідно з теоремою 7.7. в [2], для маргінальних генератрис

$$V_k(s,x,u_k) = E\left[e^{-s\tau^+(x)} u_k^{\gamma_k(x)},\, \tau^+(x) < \infty\right] =$$
$$= E\left[u_k^{\gamma_k(x)},\, \xi^+(\theta_s) > x\right],\ 0 < x < \infty,\ k = \overline{1,3}$$

та їх твірних перетворень

$$v_k(s,z,u_k) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x V_k(s,x,u_k),\ k = \overline{1,3}$$

одержані співвідношення

$$V_k(s,x,u_k) = s^{-1} \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s) W_k(s,x-y,u_k), x \ge 0,\ k = \overline{1,3}, \tag{6}$$

$$v_k(s,z,u_k) = s^{-1} w_k(s,z,u_k) g_+(s,z),\ k = \overline{1,3}. \tag{7}$$

Функції $W_k(s,x,u_k)$ визначаються таким чином

$$W_k(s,x,u_k)=\sum_{y\geq 0}A_k(x+y,u_k)p^-_{-y}(s),\ x\geq 0, \tag{8}$$

де

$$A_1(x,u_1)=\sum_{k\geq x+1}u_1^{k-x}\Pi_0^+(k),\ A_2(x,u_2)=\sum_{k\geq x+1}u_2^x\Pi_0^+(k)=u_2^x\Pi(x),$$

$$A_3(x,u_3)=\sum_{k\geq x+1}u_3^k\Pi_0^+(k),\ a_k(z,u_k)=\sum_{x\geq 0}z^xA_k(x,u_k),$$

які остаточно виражаються через генератрису додатних стрибків

$$\widetilde{\Pi}_0^+(z)=\sum_{x\geq 0}^{\infty}z^x\Pi_0^+(x)=\lambda_1\widetilde{p}_1(z),$$

де $\widetilde{\Pi}_0^+(1)=\lambda_1$, та генератриси хвостів розподілу

$$\widetilde{\Pi}(z)=\sum_{r\geq 0}^{\infty}z^r\Pi(r),\ \Pi(r)=\sum_{k\geq r+1}^{\infty}\Pi_0^+(k),\ \Pi(0)=\lambda_1,$$

$\widetilde{\Pi}(1)=\sum\limits_{r\geq 0}^{\infty}\Pi(r)=\lambda_1\sum\limits_{r>0}rp_r$. Причому генератриса хвостів зв'язана з розподілом стрибків наступним співвідношенням

$$\widetilde{\Pi}(z)=\frac{\lambda_1}{1-z}(1-\widetilde{p}_1(z)), \tag{9}$$

$$A_1(0,u_1)=\lambda_1\widetilde{p}_1(u_1)=\widetilde{\Pi}_0^+(u_1),\ A_1(0,1)=\lambda_1,\ A_1(x,1)=\Pi(x),$$

$$a_1(z,u_1)=\frac{u_1}{u_1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_1)-\widetilde{\Pi}_0^+(z))=\frac{\lambda_1u_1}{u_1-z}(\widetilde{p}_1(u_1)-\widetilde{p}_1(z)),$$

$$a_1(1,u_1)=u_1\widetilde{\Pi}(u_1),$$

$$A_2(0,u_2)=\Pi(0)=\lambda_1,\ A_2(0,1)=\lambda_1,\ A_2(x,1)=\Pi(x),$$

$$a_2(z,u_2)=\frac{1}{1-zu_2}(\widetilde{\Pi}_0^+(1)-\widetilde{\Pi}_0^+(zu_2))=\frac{\lambda_1}{1-zu_2}(1-\widetilde{p}_1(zu_2))=\widetilde{\Pi}(zu_2),$$

$$a_2(1,u_2)=\widetilde{\Pi}(u_2),$$

$$A_3(0,u_3)=\widetilde{\Pi}_0^+(u_3),\ A_3(0,1)=\lambda_1,\ A_3(x,1)=\Pi(x),$$

$$a_3(z,u_3)=\frac{1}{1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_3)-\widetilde{\Pi}_0^+(zu_3))=\frac{\lambda_1}{1-z}(\widetilde{p}_1(u_3)-\widetilde{p}_1(zu_3)),$$

$$a_3(1,u_3)=\lambda_1u_3\widetilde{p}'_1(u_3).$$

Твірні перетворення функцій (8) мають вигляд

$$w_k(s,z,u_k)=\sum_{x\geq 0}z^xW_k(s,x,u_k). \tag{10}$$

Якщо $\xi(t)\,(\xi(0)=0)$ – майже напівнеперервний знизу цілозначний процес Пуасона з кумулянтою (2), тоді $\xi^-(\theta_s)$ має геометричний розподіл, завдяки якому вдається конкретизувати представлення (8) для $W_k(s,x,u_k)$ $(k=\overline{1,3})$.

У роботі [3], для дослідження розподілу перестрибків через рівень $x=0$ було отримано лему 1, що випливає з результатів розділу 7 в [2], про асимптотичну поведінку коренів кумулянтного рівняння Лундберга при $s\to 0$

$$k(z)=s,\ s\geq 0.\quad (\mathfrak{L}_s)$$

Лема 1. *[3] Для $\xi(t)$ з кумулянтою (2) з $|m_1^0|<\infty$ та $\sigma_1^2<\infty$ рівняння $(\mathfrak{L}_s)$ при $s\to 0$ має 2 дійсні корені $0<z_1(s)<1<z_2(s)$. Лівий корінь $z_1(s)$ визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$*

$$\begin{gathered} g_-(s,z)=\frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)},\ p_-(s)=\frac{1-z_1(s)}{1-b}, \\ z_1(s)=q_-(s)+bp_-(s), \\ p^-_{-k}(s)=p_-(s)(z_1(s)-b)(z_1(s))^{k-1},\ k\geq 1. \end{gathered} \tag{11}$$

а) Якщо $m_1^0=0$, тоді при $s\to 0$ добуток доповнень коренів $\overline{z}_1(s)=1-z_1(s),\ \overline{z}_2(s)=z_2(s)-1$

$$\overline{z}_1(s)\overline{z}_2(s)=O(s),\ p_-(s)p_+(s)\approx k_1 s,\ k_1=(\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1}. \tag{12}$$

б) Якщо $m_1^0>0$, тоді $z_2(0)=1$, а $z_1(0)<1$ визначає генератрису ξ^-

$$\begin{gathered} E\,z^{\xi^-}=\frac{p_-(1-b)(z-b)}{z-z_1(0)},\ p_-=\frac{1-z_1(0)}{(1-b)},\ z_1(0)=q_-+bp_-, \\ s^{-1}p_+(s)p_-(s)\to_{s\to 0} p'_+(0)p_-,\ p'_+(0)=E[\tau^+(0)]. \end{gathered} \tag{13}$$

в) Якщо $m_1^0<0$, тоді $z_2(0)>1$, а $z_1(0)=1$, при цьому (див. (7.91) в [2])

$$\begin{gathered} z_1(s)\approx 1+\frac{s}{|m_1^0|},\ p_-(s)\approx\frac{s}{|m_1^0|(1-b)}, \\ s^{-1}p_-(s)p_+(s)\to_{s\to 0} p'_-(0)p_+,\ s\to 0, \\ p'_-(0)=E[\tau^-(0)]=\frac{1}{|m_1^0|(1-b)}. \end{gathered} \tag{14}$$

Отже, при $m_1^0=0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має двократний корінь $z_{1,2}(0)=1$ (див. (12)). При $m_1^0>0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0)=1$, а $z_1(0)<1$ (визначає p_- в (13)). При $m_1^0<0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0)>1$, і $z_1(0)=1$, а $1-z_1(s)\approx O(s)$ визначає асимптотику $p_-(s)$ в (14).

Надалі будемо розглядати майже напівнеперервний знизу процес. Наведемо для цих процесів вигляд для спільних генератрис пар функціоналів $\{\tau^+(x),\gamma_k(x)\}$.

Лема 2. *[2] Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) має місце співвідношення (6), де $W_k(s,x,u_k)$ визначаються через $A_k(x,u_k)$*

$$\begin{gathered} W_1(s,x,u_1)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_1(x,u_1)+ \\ +\frac{(z_1(s)-b)u_1}{u_1-z_1(s)}\{A_1(x,u_1)-A_1(x,z_1(s))\}], \end{gathered} \tag{15}$$

$$W_2(s,x,u_2)=p_-(s)u_2^x(z_1(s))^{-1}[b\Pi(x)+ \\ +(z_1(s)-b)\sum_{y\geq 0}(u_2z_1(s))^y\Pi(x+y)], \tag{16}$$

$$W_3(s,x,u_3)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_3(x,u_3)+ \\ +\frac{z_1(s)-b}{1-z_1(s)}\left\{A_3(x,u_3)-(z_1(s))^{-x}A_3(x,u_3z_1(s))\right\}]. \tag{17}$$

Із співвідношеня в (7.46) (див. теорему 7.7 в [2]) та (5) випливає твердження для спільної генератриси функціоналів

Теорема 1. *[2] Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) має місце співвідношення*

$$\widetilde{v}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=s^{-1}g_+(s,\varepsilon)\widetilde{w}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)= \\ =s^{-1}(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)w(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3), \tag{18}$$

де

$$w(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=p_-(s)\Bigg[a(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)+\frac{u_2(z_1(s)-b)}{u_1-u_2z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)-u_1u_2^{-1}(z_1(s))^{-1}a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1},u_2u_3z_1(s)\Big\}\Bigg]. \tag{19}$$

З теореми 1 випливає

Наслідок 1. *[3] Спільні генератриси пар функціоналів $\{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon),\, \gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$ мають вигляд*

$$\widetilde{v}_k(s,\varepsilon,u_k)=E\left[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\, \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty\right]= \\ =(1-\varepsilon)v_k(s,\varepsilon,u_k)=s^{-1}(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)w_k(s,\varepsilon,u_k)= \\ =s^{-1}g_+(s,\varepsilon)\widetilde{w}_k(s,\varepsilon,u_k),\ k=\overline{1,3}\,, \tag{20}$$

де

$$w_1(s,\varepsilon,u_1)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Bigg[ba_1(\varepsilon,u_1)+\frac{(z_1(s)-b)u_1}{u_1-z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a_1(\varepsilon,u_1)-a_1(\varepsilon,z_1(s)\Big\}\Bigg], \tag{21}$$

$$w_2(s,\varepsilon,u_2)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Bigg[b\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)+\frac{z_1(s)(z_1(s)-b)}{z_1(s)-\varepsilon}\cdot \\ \cdot\Big\{\widetilde{\Pi}(z_1(s)u_2)-\varepsilon(z_1(s))^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)\Big\}\Bigg], \tag{22}$$

$$w_3(s,\varepsilon,u_3)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Bigg[ba_3(\varepsilon,u_3)+\frac{z_1(s)-b}{1-z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a_3(\varepsilon,u_3)-a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1},u_3z_1(s)\Big\}\Bigg]. \tag{23}$$

У випадку $m_1^0 \le 0$, $z_1(s) \to 1$ при $s \to 0$, тому $w_k^0(\varepsilon, u_k) = \lim\limits_{s\to 0} w_k(s,\varepsilon,u_k)$ залежить тільки від ε, u_k.

У випадку $m_1^0 > 0$, $z_1(s) \to z_1(0) = q_- + bp_- < 1$ при $s \to 0$, тому границя $w_k^+(\varepsilon, u_k) = \lim\limits_{s\to 0} w_k(s,\varepsilon,u_k)$ крім ε, u_k суттєво залежить від $z_1(0) < 1$.

Лема 3. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2) при $|m_1^0| < \infty$ та $\sigma_1^2 < \infty$*

1) При $m_1^0 = 0$

$$m^0(1) = \lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}} m_0(s,\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 1\\ s\to 0}} \frac{1-\varepsilon}{s} p_-(s) g_+(s,\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_1^2(1-b)}. \tag{24}$$

2) При $m_1^0 > 0$

$$m_+(1) = \lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}} m_+(s,\varepsilon) = \lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}} \frac{1-\varepsilon}{s} g_+(s,\varepsilon) = \frac{1}{m_1^0}. \tag{25}$$

Зауважимо, що при $m_1^0 = 0$ моменти додатних стрибків $\mu_1 = \widetilde{p}_1'(1)$, $\mu_2 = \widetilde{p}_1''(1)$ пов'язані з моментами геометричного розподілу:

$$\begin{gathered} \lambda_1\mu_1 = \lambda_2(1-b)^{-1}, \\ \sigma_1^2 = k''(1) = \lambda_1\mu_2 + \frac{\lambda_2 b}{(1-b)^2} = \lambda_1(1-b)^{-1}(b\mu_1 + (1-b)\mu_2). \end{gathered} \tag{26}$$

Поскільки при $m_1^0 < 0$ хвіст розподілу $\overline{P}_+(s,x) = P\{\xi^+(\theta_s) > x\} \to 0$ при $s \to 0$, тому для дослідження генератрис $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$ нам доведеться розглянути, замість спільних генератрис функціоналів $V_k(s,x,u_k)$, умовні генератриси функціоналів $\gamma_k(x)$, $k = \overline{1,3}$.

Будемо позначати умовні генератриси

$$E\left[u_k^{\gamma_k(x)} | \, \xi^+(\theta_s) > x\right] = V_k(s,x,u_k)\left(\overline{P}_+(s,x)\right)^{-1}, \; k = \overline{1,3}, \tag{27}$$

і для відповідних умовних генератрис має місце

Лема 4. *Умовні генератриси $\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)$ мають вигляд*

$$\begin{aligned} E&\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} | \, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] = \\ &= s^{-1}(1-\varepsilon) g_+(s,\varepsilon)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1} w_k(s,\varepsilon,u_k). \end{aligned} \tag{28}$$

Доведення. Після усереднення (27) за геометричним розподілом знаходимо

$$\begin{aligned} E&\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} | \, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] = \\ &= (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x V_k(s,x,u_k)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > x\}\right]^{-1}, \end{aligned}$$

яке згідно (6) перепишемо

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}|\,\xi^+(\theta_s)>\widetilde{\nu}_\varepsilon\right]=$$
$$=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x s^{-1}\sum_{y=0}^{x}p_y^+(s)W_k(s,x-y,u_k)\left[P\{\xi^+(\theta_s)>x\}\right]^{-1}.$$

Змінивши порядок сумування в останньому співвідношені, отримаємо

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}|\,\xi^+(\theta_s)>\widetilde{\nu}_\varepsilon\right]=$$
$$=s^{-1}(1-\varepsilon)\sum_{y=0}^{\infty}p_y^+(s)\varepsilon^y\sum_{x-y=0}^{+\infty}\varepsilon^{x-y}W_k(s,x-y,u_k)\left[P\{\xi^+(\theta_s)>x\}\right]^{-1},$$

звідки й випливає (28).

Позначимо

$$w_k^0(s,x,u_k)=p_-^{-1}(s)w_k(s,x,u_k),\ x\geq 0,\ k=\overline{1,3}. \tag{29}$$

Теорема 2. *Якщо процес $\xi(t)$ має кумулянту (2), тоді*

1) При $m_1^0=0$

$$\begin{aligned}E\,u_1^{\gamma_1(\infty)}&=\left[bu_1\widetilde{\Pi}(u_1)+\lambda_1\frac{u_1(1-b)}{u_1-1}\left(\widetilde{p}'_1(u_1)-\widetilde{p}'_1(1)\right)\right]m^0(1),\\ E\,u_2^{\gamma_2(\infty)}&=\left[b\widetilde{\Pi}(u_2)+(1-b)u_2\widetilde{\Pi}'(u_2)\right]m^0(1),\\ E\,u_3^{\gamma_3(\infty)}&=\lambda_1\left[bu_3\widetilde{p}'_1(u_3)+\frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}''_1(u_3)\right]m^0(1).\end{aligned} \tag{30}$$

2) Якщо $m_1^0>0$, тоді

$$\begin{aligned}E\,u_1^{\gamma_1(\infty)}&=p_-z_0^{-1}[ba_1(1,u_1)+(z_0-b)u_1\frac{a_1(1,u_1)-a_1(1,z_0)}{u_1-z_0}]m_+(1),\\ E\,u_2^{\gamma_2(\infty)}&=p_-[b\widetilde{\Pi}(u_2)+\frac{z_0-b}{z_0-1}\left(\widetilde{\Pi}(z_0u_2)-\widetilde{\Pi}(u_2)\right)]m_+(1),\\ E\,u_3^{\gamma_3(\infty)}&=p_-z_0^{-1}[ba_3(1,u_3)+(z_0-b)\frac{a_3(1,u_3)-a_3(z_0^{-1},u_3z_0)}{1-z_0}]m_+(1).\end{aligned} \tag{31}$$

3) Якщо $m_1^0<0$, тоді умовні генератриси

$$\begin{aligned}E\left[u_1^{\gamma_1(\infty)}\,|\tau^+(\infty)<\infty\right]&=[bu_1\widetilde{\Pi}(u_1)+\lambda_1\frac{u_1(1-b)}{u_1-1}\cdot\\ &\cdot(\widetilde{p}'_1(u_1)-\widetilde{p}'_1(1))]m_-(1),\\ E\left[u_2^{\gamma_2(\infty)}\,|\tau^+(\infty)<\infty\right]&=\left[b\widetilde{\Pi}(u_2)+(1-b)u_2\widetilde{\Pi}'(u_2)\right)]m_-(1),\\ E\left[u_3^{\gamma_3(\infty)}\,|\tau^+(\infty)<\infty\right]&=\lambda_1[bu_3\widetilde{p}'_1(u_3)+\frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}''_1(u_3)]m_-(1).\end{aligned} \tag{32}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $m_1^0 = 0$. Підставимо (21) у (29), після чого отримаємо

$$w_1^0(s,\varepsilon,u_1) = bz_s^{-1}a_1(\varepsilon,u_1) + \frac{(z_s-b)u_1}{(u_1-z_s)z_s}\left[a_1(\varepsilon,u_1) - a_1(\varepsilon,z_s)\right]. \tag{33}$$

Здійснимо граничний перехід при $s \to 0$ в (33)

$$w_1^0(0,\varepsilon,u_1) = \lim_{s\to 0} w_1^0(s,\varepsilon,u_1) = ba_1(\varepsilon,u_1) + \frac{(1-b)u_1}{u_1-1}\left[a_1(\varepsilon,u_1) - a_3(\varepsilon,1)\right]. \tag{34}$$

В (34) перейдемо до границі при $\varepsilon \to 1$

$$w_1^0(0,1,u_1) = \lim_{\varepsilon\to 1} w_1^0(0,\varepsilon,u_1) = bu_1\widetilde{\Pi}(u_1) + \frac{\lambda_1(1-b)u_1}{u_1-1}\left[\widetilde{p}_1'(u_1) - \widetilde{p}_1'(1)\right]. \tag{35}$$

Із (35) при $u_1 \to 1$ отримаємо

$$w_1^0(0,1,1) = \lim_{u_1\to 1} w_1^0(0,1,u) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2). \tag{36}$$

Розглянемо $\widetilde{\nu}_\varepsilon$ геометрично розподілену випадкову величину з параметром $\varepsilon < 1$. Тоді згідно з (20), генератриси $\{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon),\ \gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$ після врахування (29) визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} &E\left[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < +\infty\right] = \\ &= \frac{1-\varepsilon}{s}p_-(s)g_+(s,\varepsilon)w_k^0(s,\varepsilon,u_k) = m_0(s,\varepsilon)w_k^0(s,\varepsilon,u_k). \end{aligned} \tag{37}$$

З урахуванням (24), із леми 3 та граничних значень (35) і (36) із (37) при $s \to 0$ і $\varepsilon \to 1$ випливає, що

$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)} = w_1^0(0,1,u)(w_1^0(0,1,1))^{-1}. \tag{38}$$

Згідно (26), з (36) маємо $w_1^0(0,1,1) = \sigma_1^2(1-b)$ і, таким чином, перше співвідношення в (30) доведено.

Далі підставивши (22) в (29), розглянемо твірне перетворення $w_2^0(s,\varepsilon,u_2)$ з граничними значеннями при $s \to 0$ і $\varepsilon \to 1$

$$\begin{aligned} w_2^0(s,\varepsilon,u_2) &= bz_s^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2) + \frac{z_s-b}{z_s-\varepsilon}\left(\widetilde{\Pi}(z_su_2) - \varepsilon z_s^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)\right), \\ w_2^0(0,1,u_2) &= b\widetilde{\Pi}(u_2) + (1-b)u_2\widetilde{\Pi}'(u_2), \\ w_2^0(0,1,1) &= \lim_{u_2\to 1} w_2^0(0,1,u_2) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2). \end{aligned} \tag{39}$$

З урахуванням леми (3), із (37) після граничного переходу $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$ знаходимо, що

$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)} = w_2^0(0,1,u_2)(w_2^0(0,1,1))^{-1}.$$

Згідно з (39), із врахуванням (26) з останнього співвідношення випливає друге співвідношення (30).

Із (23) та (29), аналогічно, як і в попередніх випадках при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$

$$w_3^0(s,\varepsilon,u_3) = z_s^{-1}[ba_3(\varepsilon u_3) + \frac{z_s - b}{1 - z_s}\left(a_3(\varepsilon u_3) - a_3(\varepsilon z_s^{-1}, u_3 z_s)\right)],$$

$$w_3^0(0,1,u_3) = ba_3(1,u_2) + (1-b){a'}_3(1,u_3), \quad (40)$$

де ${a'}_3(1,u_3) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, a_3(\varepsilon,u_3)|_{\varepsilon=1} = \frac{\lambda_1}{2} u_3^2 \widetilde{p}_1''(u_3)$,

$$w_3^0(0,1,1) = \lim_{u_3 \to 1} w_2^0(0,1,u_3) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2),$$

згідно (37), встановлюється третє співвідношення (30).

Розглянемо далі випадок $m_1^0 > 0$. Із (20), попередньо знайшовши граничні значення (21) – (23) при $s \to 0$ і $\varepsilon \to 1$, отримаємо

$$w_1(0,1,u_1) = p_-(0) z_0^{-1}[ba_1(1,u_1) + (z_0 - b)u_1 \frac{a_1(1,u_1) - a_1(1,z_0)}{u_1 - z_0}],$$

$$w_2(0,1,u_2) = p_-(0) z_0^{-1}[b\widetilde{\Pi}(u_2) + \frac{z_0 - b}{z_0 - 1}\left(\widetilde{\Pi}(z_0 u_2) - \widetilde{\Pi}(u_2)\right)],$$

$$w_3(0,1,u_3) = p_-(0) z_0^{-1}[ba_3(1,u_3) + (z_0 - b)\frac{a_3(1,u_3) - a_3(z_0^{-1}, u_3 z_0)}{1 - z_0}],$$

та врахувавши співвідношення (25) із леми 3, одержимо (31).

І накінець зупинимось на випадку $m_1^0 < 0$.

При $m_1^0 < 0$ позначимо

$$m_0^-(s,\varepsilon) = s^{-1} p_-(s)(1-\varepsilon) g_+(s,\varepsilon)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1}. \quad (41)$$

Здійснивши в (41) граничний перехід при $s \to 0$ згідно леми 1 отримаємо

$$m_0^-(0,\varepsilon) = {p'}_-(0)(1-\varepsilon) g_+(\varepsilon)\left[P\{\xi^+ > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1}.$$

При $\varepsilon \to 1$ із останнього співвідношення отримаємо

$$m_-(1) = {p'}_-(0)\left[E\xi^+\right]^{-1}. \quad (42)$$

Згідно леми 4, із співвідношення (28) після врахування (29) умовні генератриси визначаються співвідношеннями

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} |\, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] =$$
$$= s^{-1} p_-(s)(1-\varepsilon) g_+(s,\varepsilon)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1} w_k^0(s,\varepsilon,u_k),\ k = \overline{1,3}. \quad (43)$$

Здійснивши граничний перехід в (43) при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$ і після врахування (42) та відповідних граничних значень (35), (39), (40), отримуємо (32).

Зауваження 1. *Для ілюстрації деяких результатів з розподілу граничних функціоналів використовується введене Ю. П. Студнєвим (див. [6]) поняття дискретних квазіймовірнісних розподілів.*

Означення 4. *Числова послідовність $\{p_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ називається дискретним квазіймовірнісним розподілом, якщо*

$$\sum_{|k|\geq 0} p_k = 1, \ \sum_{|k|\geq 0} |p_k| < \infty.$$

Квазігенератрисою такого розподілу називається твірна функція

$$p_*(z) = \sum_{|k|\geq 0} p_k z^k, \ |z| = 1. \tag{44}$$

Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ рівняння Лундберга $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $b < z_0 < 1$. Якщо позначити $b' = z_0$, то враховуючи, що $p_- = \frac{1-z_0}{1-b}$, при $m_1^0 > 0$ генератрису ξ^- можна звести до вигляду

$$g_-(z) = \frac{1-b'}{1-b} \cdot \frac{z-b}{z-b'} = \frac{z-b}{1-b} \cdot \frac{1-b'}{z-b'} = b_*^+(z) g_*^-(z),$$

$g_*^-(z)$ – генератриса геометричного розподілу на $\mathbb{Z}_-$ з параметром b', $b_*^+(z)$ квазігенератриса бернуллійового "розподілу":

$$p_0 = -\frac{b}{1-b}, \ p_1 = 1 - p_0 = \frac{1}{1-b}; \ E\xi^- = \frac{b-b'}{(1-b')(1-b)} < 0.$$

За рахунок $p_1 > 0$ множина значень ξ^- поповнюється значенням $\{0\}$.

Для розподілу ξ^+ та перестрибкових функціоналів процесу $\xi(t)$ з поліноміальними генератрисами додатних стрибків $\widetilde{p}_1(z)$ використовуються квазігенератриси геометричного розподілу на $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ з параметром $0 < c_* = |z_3(0)|^{-1} < 1 \, (|z_3(0)| > z_{1,2}(0))$:

$$p_*^+(z) = \frac{1+c_*}{1+c_* z},$$

$$p_k^* = (1+c_*)(-c_*)^k, \, k \geq 0, \sum_{k\geq 0} p_k^* = 1, \sum_{k\geq 0} |p_k^*| = \frac{1+c_*}{1-c_*}.$$

Приклад 1. *Нехай $\xi(t)$ - цілозначний пуассонівський процес з генератрисою стрибків*

$$p(z) = \frac{q(1-b)}{z-b} + \frac{p(z^2+z)}{2}, \ p = q = \frac{1}{2}, \, 0 < b < 1.$$

Дослідити функціонали $\xi^{\pm}$ і $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$ процесу при всіх знаках значення m_1^0 на підставі основної факторизаційної тотожності та графіків його кумулянти: 1) $m_1^0 = 0$; 2) $m_1^0 > 0$; 3) $m_1^0 < 0$.

Розв'язання. Отже, $\xi(t)$ – майже напівнеперервний знизу процес. Згідно (1), кумулянта даного процесу має вигляд:

$$k(z) = \lambda \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-z)}{z-b} + \frac{1}{2} \frac{z^2+z-2}{2} \right] = \lambda_1 \cdot \frac{z^2+z-2}{2} + \lambda_2 \cdot \frac{(1-z)}{z-b},$$

де $\lambda > 0$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$.

Перепишемо кумулянту $k(z)$ у наступному вигляді:

$$k(z) = \frac{\lambda P_3(z)}{4(z-b)},\ P_3(z) = (z-1)(z^2 + (2-b)z - 2(1+b)).$$

Тоді генератриса процесу $\xi(\theta_s)$ згідно (3) матиме вигляд:

$$g(s,z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{4s(z-b)}{4s(z-b) - \lambda P_3(z)},\ s > 0,\ |z| = 1,$$

або перепишемо

$$g(s,z) = \frac{4s(z-b)}{P_3(s,z)},\ P_3(s,z) = 4s(z-b) - \lambda P_3(z). \tag{45}$$

Рівняння Лундберга ($\mathfrak{L}_s$): $k(z) = s$ або $P_3(s,z) = 0$ має 3 корені (див. рис. 1):

$$b < z_1(s) < 1 < z_2(s) < |z_3(s)|, z_3(s) < 0.$$

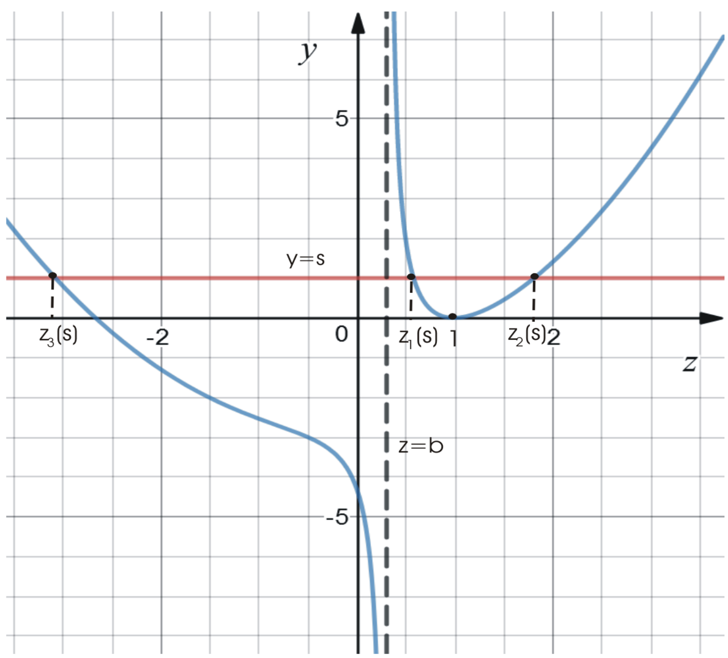

Рис. 1. Графік кумулянти $y = k(z)$ та $y = s$

В силу того, що $\xi(t)$ – майже напівнеперервний знизу, то згідно леми 1 має місце (11)

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z - z_1(s)},\ p_-(s) = \frac{1 - z_1(s)}{1-b},$$

де $z_1(s)$ – додатній розв'язок рівняння Лундберга, $b < z_1(s) < 1$. Отже,

$$P_3(s,z) = (z - z_1(s))P_2(s,z),\ \text{де } P_2(s,z) = -\lambda(z - z_2(s))(z - z_3(s)).$$

На основі (45) і (11), із основної факторизаційної тотожності (4) отримаємо співвідношення

$$g(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)} \cdot \frac{4s(p_-(s))^{-1}}{P_2(s,z)},\ p_-(s) = \frac{4s}{P_2(s,1)},$$

з якого визначається генератриса

$$g_+(s,z) = \frac{4s}{p_-(s)P_2(s,z)} = \frac{P_2(s,1)}{P_2(s,z)} = \frac{z_2(s)-1}{z_2(s)-z} \cdot \frac{|z_3(s)|+1}{|z_3(s)|+z}. \tag{46}$$

Отже, згідно з (46), розподіл $\xi^+(\theta_s)$ виражається через геометричний розподіл з параметром $c_2(s) = (z_2(s))^{-1}$ та квазірозподіл геометричного типу з параметром $c_3^*(s) = (|z_3(s)|)^{-1}$.

Знайдемо $m_1^0 = k'(1) = \frac{\lambda(1-3b)}{4(1-b)}$, $\sigma_1^2 = k''(1) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{(1-b)^2}$ і розглянемо наступні випадки:

1) При $m_1^0 = 0$, $b = \frac{1}{3}$ $(\lambda = 1)$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$: (див. рис. 2)

$$z_1(0) = z_2(0) = 1,\ z_3(0) = -\frac{8}{3}.$$

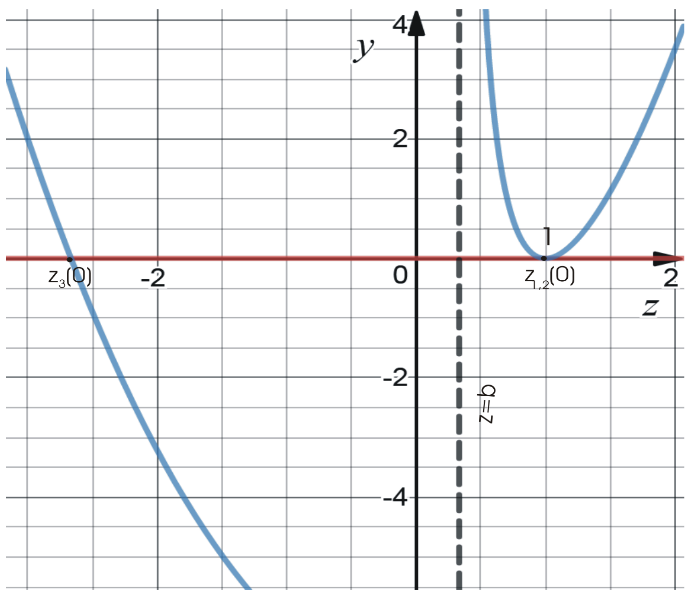

Рис. 2. Графік кумулянти $y = k(z)$ при $m_1^0 = 0$

В силу (11) $p_-(s) \to 0$ і $g_-(s,z) \to 0$, при $s \to 0$. Згідно з (46) $g_+(s,z) \to 0$ при $s \to 0$. Отже, $P\{\xi^\pm = \pm\infty\} = 1$.

Згідно з теоремою 2, при $m_1^0 = 0$ генератриси $\gamma_{1,2,3}(\infty)$ визначаються через співвідношення (9) та

$$\widetilde{p}_1(z) = \frac{z^2+z}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial\beta} a_3(1,z) = \frac{\lambda_1}{2} z^2 \widetilde{p}_1''(z),$$

співвідношеннями (30).

Отже,

$$E\, z^{\gamma_1(\infty)} = \frac{1}{22}\left(z^2 + 6z\right),$$

$$E\,z^{\gamma_2(\infty)} = \frac{3}{22}\,z + \frac{1}{11},$$

$$E\,z^{\gamma_3(\infty)} = \frac{2}{11}\left(z^2 + \frac{1}{4}z\right).$$

2) При $m_1^0 > 0$, $b < \frac{1}{3}$ ($\lambda = 10$, $b = \frac{1}{4}$) рівняння Лундберга ($\mathfrak{L}_0$) має наступні розв'язки (див. рис. 3):

$$z_2(0) = 1,\ \ z_1(0) = \frac{-7+\sqrt{209}}{8} < 1 < |z_3(0)|, z_3(0) = \frac{-7-\sqrt{209}}{8} < 0.$$

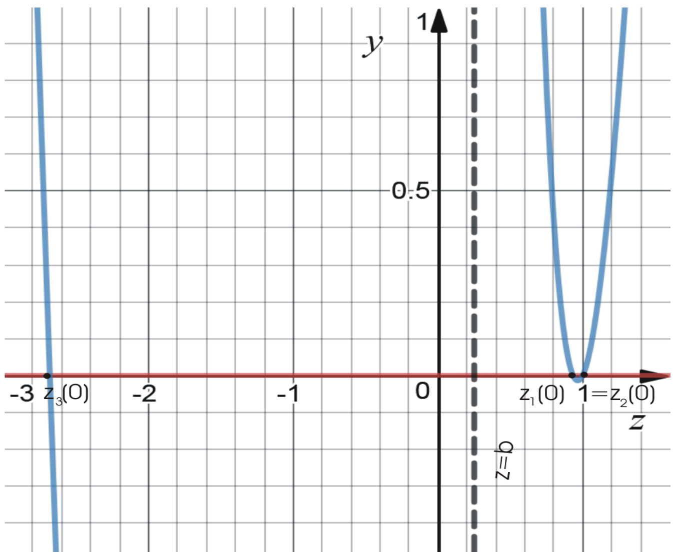

Рис. 3. Графік кумулянти $y = k(z)$ при $m_1^0 > 0$

В силу (46), $g_+(s,z) \to 0$ при $s \to 0$. Отже, ξ^+ має вироджений розподіл.

Згідно з (11) генератриса ξ^- визначається при $s \to 0$ співвідношенням

$$g_-(z) = \frac{p_-(z-b)}{z - z_1(0)},\ \ p_- = \frac{1 - z_1(0)}{1-b}.$$

Згідно з теоремою 2, при $m_1^0 > 0$ генератриси $\gamma_{1,2,3}(\infty)$ визначаються через співвідношення (9) та

$$\widetilde{p}_1(z) = \frac{z^2+z}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial\beta}a_3(1,z) = \frac{\lambda_1}{2}z^2\widetilde{p}_1''(z),$$

співвідношеннями (31).

Отже,

$$E\,z^{\gamma_1(\infty)} = 3p_-\left[z^2 + (z_0 + \frac{7}{4})z\right],$$

$$E\,z^{\gamma_2(\infty)} = 3p_-(z_0 z + 0,5),$$

$$E\,z^{\gamma_3(\infty)} = \frac{3}{4}p_-\left[(4z_0+7)z^2 + 4z\right],$$

де $z_0 = z_1(0) = \frac{-7+\sqrt{209}}{8}$, $p_- = \frac{4}{3}(1-z_0) = \frac{15-\sqrt{209}}{6}$.

3) При $m_1^0 < 0$, $b > \frac{1}{3}$ ($\lambda = 10$, $b = \frac{1}{2}$) рівняння Лундберга ($\mathfrak{L}_0$) має наступні розв'язки (див. рис. 4):

$$z_1(0) = 1,\ 1 < z_2(0) = \frac{-3+\sqrt{57}}{4} < |z_3(0)|, z_3(0) = \frac{-3-\sqrt{57}}{4} < 0.$$

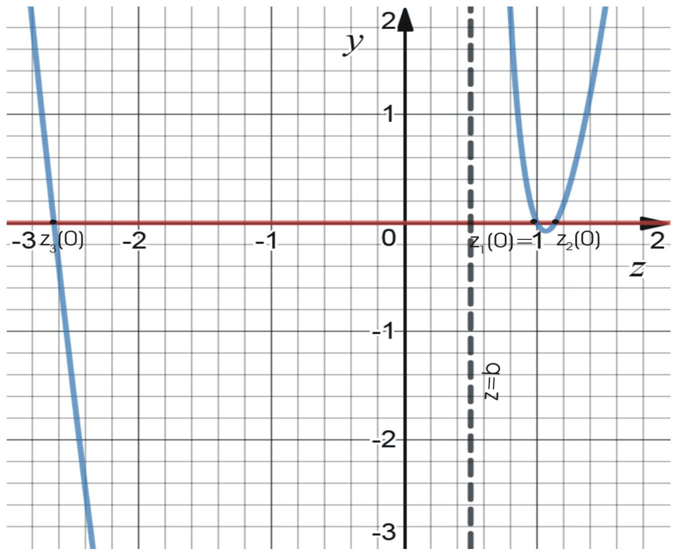

Рис. 4. Графік кумулянти $y = k(z)$ при $m_1^0 < 0$

В силу (11) $p_-(s) \to 0$ і $g_-(s,z) \to 0$ при $s \to 0$. Отже, ξ^- має вироджений розподіл.

Згідно з (46), генератриса ξ^+ визначається при $s \to 0$ співвідношенням

$$g_+(z) = Ez^{\xi^+} = \frac{1-(z_2(0))^{-1}}{1-(z_2(0))^{-1}z} \cdot \frac{1+|z_3(0)|^{-1}}{1+|z_3(0)|^{-1}z} \tag{47}$$

і є добутком генератрис геометричного розподілу з параметрами $c_2(0) = (z_2(0))^{-1}$ та квазірозподілу з параметром $c_3^*(0) = (|z_3(0)|)^{-1} < c_2(0) < 1$. В силу умови $c_3^*(0) = (|z_3(0)|)^{-1} < c_2(0) < 1$ цей добуток визначає звичайний розподіл ξ^+. Після розкладу $g_+(z)$ на прості дроби із (47) отримаємо

$$\begin{gathered} g_+(z) = \frac{(1-(z_2(0))^{-1})(1+(|z_3(0)|)^{-1})}{(z_2(0))^{-1}+(|z_3(0)|)^{-1}} \cdot \\ \cdot \left(\frac{(z_2(0))^{-1}}{1-(z_2(0))^{-1}z} + \frac{(|z_3(0)|)^{-1}}{1+(|z_3(0)|)^{-1}z} \right), \end{gathered} \tag{48}$$

а після відповідних розкладів (48) у степеневі ряди в термінах $c_2(0)$ та $c_3^*(0)$ одержимо

$$g_+(z) = \frac{(1-c_2(0))(1+c_3^*(0))}{c_2(0)+c_3^*(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \left((c_2(0))^{k+1} + (-1)^k (c_3^*(0))^{k+1}\right) z^k,$$

де $c_3^*(0) < c_2(0) < 1$.

Отже,

$$p_k^+ = \frac{(1-c_2(0))(1+c_3^*(0))}{c_2(0)+c_3^*(0)}\left((c_2(0))^{k+1}+(-1)^k(c_3^*(0))^{k+1}\right) > 0,\ k \geq 0.$$

Згідно з теоремою 2, при $m_1^0 < 0$ генератриси $\gamma_{1,2,3}(\infty)$ визначаються через умовні генератриси (32), співвідношенням (9) та

$$\widetilde{p}_1(z) = \frac{z^2+z}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial\beta}a_3(1,z) = \frac{\lambda_1}{2}z^2\widetilde{p}_1''(z).$$

Отже,

$$E\left[z^{\gamma_1(\infty)}|\tau^+(\infty)<\infty\right] = \frac{5}{4}\left[z^2+4z\right]m_-(1),$$

$$E\left[z^{\gamma_2(\infty)}|\tau^+(\infty)<\infty\right] = \frac{5}{2}(z+1)m_-(1),$$

$$E\left[z^{\gamma_3(\infty)}|\tau^+(\infty)<\infty\right] = \frac{5}{4}\left[3z^2+z\right]m_-(1),$$

де $m_-(1) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{z_2(0)-1} - \frac{1}{|z_3(0)|+1}\right)^{-1} = \frac{4}{35}$.

У випадку цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$ встановлено співвідношення для розподілів $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$, та співвідношення для умовних генератрис $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$.

Список використаної літератури

1. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами: монографія. Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. 459 с.
2. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 543 с.
3. *Герич М. С.* Про розподіл перестрибків через нульовий рівень для одного класу гратчастих процесів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2(33). С. 45–54.
4. *Герич М. С., Гусак Д. В.* Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2011. Вип. 2(22). С. 54-63.
5. *Герич М. С.* Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова. *Карпатські математичні публікації.* 2012. Вип. 4, №2. С. 229-240.
6. *Студнев Ю. П.* Локальная предельная теорема для дискретных квазивероятностных распределений. *Теория вероят. и её примен.* 1992. Т 37, №4. С. 800-808.

Herych M. S. About the distribution of jumping functionals an infinitely remote level for one class of scalar lattice processes.

Risk processes are described by complex Poisson processes. The main characteristics studied in risk theory are closely related to the distributions of boundary functionals for homogeneous processes with independent increments (finite-interval extrema, absolute extrema, jumping functionals). For the most part, work in risk theory does not sufficiently illuminate this connection, and the known results for the distribution of process functionals with independent increments are often left aside in the study of risk tasks. At the same time, for homogeneous processes with independent increments and random walks, many results from the distribution of extremes and other functionals can be used and adapted to describe the main characteristics of both risk theory and queuing theory.

The purpose of this paper is to obtain results for the distribution of absolute extrema of boundary functionals and to draw attention to the connection of risk theory with boundary value problems for random processes with independent increments. For almost semicontinuous processes, boundary problems related to distributions of different boundary functionals are considered, which have not only theoretical interest but also practical application.

In the study of problems related to the distribution of boundary functionals, there are many different methods that can be conditionally divided into direct (probabilistic) and analytical ones. However, the most attractive is to obtain exact formulas, so in this work we study some distributions of boundary functionals by the factorization method.

This article is devoted to the study of distributions of jumping functionals through an infinitely distant level for one class of integer lattice Poisson processes. Namely, the almost semi-continuous from below processes are investigated that cross a negative level with only geometrically distributed jumps. In this paper relations for joint generators of jumping functionals and conditional generators of finite level for integer lattice Poisson processes are obtained, as well as the validity of relations for generators of jumping that covers an infinitely distant level in the case, is proved.

Keywords: almost semicontinuous processes, moment generating functions of extrema, jumping functionals.

References

1. Husak D. V. (2007). Hranychni Zadachi Dlia Protsesiv Z Nezalezhnymy Pryrostamy Monohrafiia. Kyiv. Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. [in Ukranian].
2. Husak D. V. (2011). Protsesy Z Nezalezhnymy Pryrostamy V Teorii Ryzyku. Kyiv. Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. [in Ukranian].
3. Herych M. S. (2018). Pro Rozpodil Perestrybkiv Cherez Nulovyi Riven Dlia Odnoho Klasu Hratchastykh Protsesiv. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 2(33).* 45–54.[in Ukranian].
4. Herych, M. S., & Husak, D. V. (2011). Utochnennia Komponent Osnovnoi Faktoryzatsiinoi Totozhnosti Dlia Hratchastykh Puassonivskykh Protsesiv Na Lantsiuhakh Markova. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 2(22).* 54-63.[in Ukranian].
5. Herych M. S. (2012). Utochnennia Osnovnoi Faktoryzatsiinoi Totozhnosti Dlia Maizhe Napivneperervnykh Hratchastykh Puassonivskykh Protsesiv Na Lantsiuhu Markova. Karpatski Matematychni Publikatsii. 4(2), 229-240. [in Ukranian].
6. Studnev Yu. P. (1992). Lokalnaia Predelnaia Teorema Dlia Dyskretnykh Kvazyveroiatnostnykh Ra- Spredelenyi. Teoryia Veroiat. Y Ejo Prymen. T 37 4. 800-808. [in Russian].

Одержано 05.11.2019