УДК 512.56+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).52-61

С. М. Дяченко

Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
доцент кафедри математики,
кандидат фізико-математичних наук
smdyachenko@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8513-809X

ОПИС ЗОБРАЖЕНЬ НАПІВГРУПИ РІССА НАД ГРУПОЮ C_2 У МОДУЛЯРНОМУ ВИПАДКУ

Матричні зображення алгебраїчних об'єктів завжди цікавили науковців. Найбільше вони вивчаються у математиці та фізиці. При розгляді зображень як правило виникають дві основні задачі: перша – дослідити, до якого типу складності відноситься задача (скінченного типу, ручна чи дика), друга – описати зображення (цю задачу найпростіше розв'язати у випадку, коли задача скінченного типу, оскільки в цьому випадку кількість нерозкладних зображень скінченна).

Задачі про опис зображень певних алгебраїчних об'єктів, як правило груп та напівгруп, поділяються ще на два типи: модулярні та немодулярні. У випадку скінченного порядку задача відноситься до модулярного випадку, якщо характеристика поля, над яким розглядаються зображення, ділить порядок відповідної групи (чи деякої підгрупи напівгрупи). Відповідно немодулярний випадок — коли характеристика поля нуль, або не ділить порядок групи (підгрупи напівгрупи). Ці задачі відносяться до різних категорій складності. Наприклад, відома лема Машке, яка говорить про напівпростоту групової алгебри у немодулярному випадку, фактично означає, що всі задачі про зображення груп у немодулярному випадку є задачами скінченного типу. Якщо ж розглянути модулярний випадок, то теорія одразу стає нетривіальною, над її побудовою працювало багато математиків.

На відміну від теорії зображень груп (див. [1]), теорія зображень напівгруп вивчена менше. Якщо говорити про класифікацію нерозкладних зображень напівгруп, то в першу чергу слід виділити роботи І. С. Понізовського [2, 3], К. Рінгеля [4], а серед робіт останнього часу — роботи В. М. Бондаренка та його учнів С. М. Дяченка, О. М. Тертичної, О. В. Зубарук, Е. М. Костишин, Я. В. Заціхи; див. зокрема [5–10]. Зображення напівгруп Рісса почав вивчати І. С. Понізовський [2]. Він розглянув немодулярний випадок і описав напівгрупи скінченного типу.

Дана стаття є продовженням статті [10], в якій автор розглянув зображувальний тип напівгрупи Рісса над групою C_2 у модулярному випадку, тобто у випадку, коли характеристика основного поля рівна 2. У статті розглянуті задачі скінченного типу і описані всі нерозкладні зображення.

Ключові слова: напівгрупа Рісса, зображення, матрична задача, опис зображень.

1. Попередні результати та основні поняття. Нехай $C_2 = \{e, a \,|\, a^2 = e\}$ — циклічна група другого порядку і B — не нульова $n \times m$ матриця над $C_2 \cup \{0\}$. Для кожного $g \in C_2$ та пари індексів (i, j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ розглянемо $m \times n$ матрицю $(g)_{ij}$. У цієї матриці на місці (i, j) стоїть елемент g, а решта рівні нулю. Позначимо $\mathcal{R}(C_2, B)$ множину усіх таких матриць разом з нульовою матрицею. Визначимо множення "$*$" наступним чином

$$(g)_{ij} * (g')_{i'j'} = (g)_{ij} \cdot B \cdot (g')_{i'j'}$$

де "$\cdot$" — звичайне множення матриць. Тоді множина $\mathcal{R}(C_2, B)$ разом з операцією "$*$" називається напівгрупою Рісса над групою C_2 з сендвіч-матрицею B.

Нехай F — поле характеристики два. Позначимо $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_2, B)$. Позначимо $\mathcal{M}(B) = F[\mathcal{R}(B)]$ — напівгрупова алгебра. Тоді $\mathcal{M}(B)$ — це алгебра всіх $m \times n$ матриць над груповою алгеброю $F[C_2]$ з множенням $M_1 * M_2 = M_1 B M_2$.

У роботі [10] розв'язана задача опису алгебр скінченного та ручного типів. У даній статті я розгляну випадок скінченного типу і опишу всі нерозкладні зображення.

У роботі [10] на алгебрах вводиться відношення еквівалентності (яке фактично є Моріта еквівалентністю), при якому зберігається зображувальний тип. Доведена теорема, що алгебра буде мати скінченний тип, якщо сендвіч-матриця має один з наступних виглядів:

(a) $B = (e)$

(b) $B = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $B = (e, 0)$

(d) $B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e+a \end{pmatrix}$

2. Опис зображень випадок (a). У цьому випадку маємо фактично зображення групи $C_2 = \{e, a\}$ над полем характеристики два. Нехай φ — деяке зображення розмірності n. Нехай $\varphi(e) = I$, $\varphi(a) = A$. Алгебра $\mathcal{M}(B)$ має твірну a, тому зображення однозначно визначається значенням $\varphi(a)$.

Виконуються рівності: $I^2 = I$; $A^2 = I$; $AI = IA = A$;. Матриця I зводиться до вигляду

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де E_r — одинична матриця розмірності r. В силу комутативності матриця A буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A^2 = I$ мають місце рівності $A_2^2 = 0$, $A_1^2 = E$. Остання рівність в силу того, що характеристика поля рівна 2, еквівалентна рівності $(A - E)^2 = 0$. Пригадуючи жорданову нормальну форму, отримаємо канонічний вигляд для матриць A_1, A_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, підбиваючи підсумки, маємо теорему.

Теорема 1. *Зображення алгебри $\mathcal{M}(B)$ у випадку (a) однозначно визначаються матрицею $A = \varphi(a)$. Всі нерозкладні зображення вичерпуються випадками, за яких матриця A має наступний вигляд.*

(1)$A = (0)$

(2)$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)$A = (1)$

(4)$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Опис зображень випадок (b). Базис алгебри $\mathcal{M}(B)$ складається з наступних елементів: $e_1 = (e, 0)$, $e_2 = (0, e)$, $a_1 = (a, 0)$, $a_2 = (0, a)$. При цьому, оскільки $a_2 = a_1 * e_2$, системою твірних алгебри будуть елементи e_1, e_2, a_1. Отже, довільне зображення φ буде визначатись трьома матрицями: $M_1 = \varphi(e_1)$, $M_2 = \varphi(e_2)$, $A_1 = \varphi(a_1)$. Для цих матриць виконуються наступні співвідношення.

$$\begin{array}{lll} M_1M_1 = M_1 & M_2M_1 = 0 & A_1M_1 = A_1 \\ M_1A_1 = A_1 & M_2A_1 = 0 & A_1A_1A_1 = M_1 \\ M_1M_2 = M_2 & M_2M_2 = 0 & \end{array}$$

Якщо звести матрицю M_1 до вигляду

$$M_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді матриці M_2, A_1 отримають наступний вигляд:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A виконується співвідношення $A^2 = E$, яке над полем характеристики 2 можна переписати $(A - E)^2 = 0$. Згадуючи Жорданову нормальну форму, знайдемо загальний вигляд матриці

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Матриця C поділиться на три горизонтальні смуги C_1, C_2, C_3 (починаючи з гори), відповідно до поділу матриці A. З цими смугами можна буде робити наступні елементарні перетворення:

1) довільні одночасні перетворення стовпців всіх матриць;

2) довільні перетворення рядків матриці C_1 і одночасні перетворення рядків матриць C_2, C_3;

3) зовнішні додавання рядків матриці C_3 до рядків матриці C_1 та рядків матриці C_1 до рядків матриці C_2.

Канонічний вигляд такої матриці C має наступний вигляд.

0	0	0	E	0	0
0	0	0	0	0	0
0	E	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	E	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	E	0
0	0	0	0	0	E
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Отримані результати можна підсумувати у наступну теорему.

Теорема 2. *Зображення алгебри $\mathcal{M}(B)$ у випадку (b) однозначно визначаються трійкою матриць $M_1 = \varphi(e_1)$, $M_2 = \varphi(e_2)$, $A_1 = \varphi(a_1)$. Всі нерозкладні зображення вичерпуються наступними випадками.*

(1)$M_1 = (0),\ M_2 = (0),\ A_1 = (0)$

(2)$M_1 = (1),\ M_2 = (0),\ A_1 = (1)$

(3)$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4)$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5)$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6)$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7)$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Опис зображень випадок (c). Базис алгебри $\mathcal{M}(B)$ складається з наступних елементів:

$$e_1 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

При цьому, оскільки $a_2 = e_2 * a_1$, системою твірних алгебри будуть елементи e_1, e_2, a_1. Отже, довільне зображення φ буде визначатись трьома матрицями: $M_1 = \varphi(e_1)$, $M_2 = \varphi(e_2)$, $A_1 = \varphi(a_1)$. Для цих матриць виконуються наступні співвідношення.

$$\begin{array}{lll} M_1M_1 = M_1 & M_1M_2 = 0 & M_1A_1 = A_1 \\ A_1M_1 = A_1 & A_1M_2 = 0 & A_1A_1A_1 = M_1 \\ M_2M_1 = M_2 & M_2M_2 = 0 & \end{array}$$

Якщо звести матрицю M_1 до вигляду

$$M_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді матриці M_2, A_1 отримають наступний вигляд:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A виконується співвідношення $A^2 = E$, яке над полем характеристики 2 можна переписати $(A - E)^2 = 0$. Згадуючи Жорданову нормальну форму, знайдемо загальний вигляд матриці

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Матриця C поділиться на три вертикальні смуги C_1, C_2, C_3, відповідно до поділу матриці A. З цими смугами можна буде робити наступні елементарні перетворення:

1) довільні одночасні перетворення рядків всіх матриць;

2) довільні перетворення стовпців матриці C_1 і одночасні перетворення стовпців матриць C_2, C_3;

3) зовнішні додавання стовпців матриці C_1 до стовпців матриці C_3 та стовпців матриці C_2 до стовпців матриці C_1.

Канонічний вигляд такої матриці C має наступний вигляд.

0	0	0	0	E	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	E	0	0	0	0
0	E	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	E	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	E
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Теорема 3. *Зображення алгебри $\mathcal{M}(B)$ у випадку (c) однозначно визначаються трійкою матриць $M_1 = \varphi(e_1)$, $M_2 = \varphi(e_2)$, $A_1 = \varphi(a_1)$. Всі нерозкладні зображення вичерпуються наступними випадками.*

$(1) M_1 = (0),\ M_2 = (0),\ A_1 = (0)$

$(2) M_1 = (1),\ M_2 = (0),\ A_1 = (1)$

$$(3) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Опис зображень випадок (d). Базис алгебри $\mathcal{M}(B)$ складається з наступних восьми елементів.

$$e_{11} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix},\ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},\ a_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

Якщо врахувати рівності $e_{22} = e_{21} * e_{21}$, $a_{21} = e_{21} * a_{11}$, $a_{12} = a_{11} * e_{12}$, $a_{22} = e_{22} * e_{22} + e_{22}$ і нарешті $a_{11} = e_{12} * e_{21} + e_{11}$, система твірних алгебри складається з елементів e_{11}, e_{12}, e_{21}. Отже, довільне зображення φ буде визначатись трьома матрицями: $M = \varphi(e_{11})$, $M_1 = \varphi(e_{12})$, $M_2 = \varphi(e_{21})$. Для цих матриць виконуються наступні співвідношення.

$$\begin{array}{lll} MM = M & & M_1M = 0 \\ MM_1 = M_1 & M_2M = M_2 & (M_1M_2)^2 = 0 \\ MM_2 = 0 & M_2M_2 = 0 & M_1M_1 = 0 \end{array}$$

Якщо звести матрицю M до вигляду

$$M = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді матриці M_1, M_2 отримають наступний вигляд:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці (A, C) утворюють так званий зустрічний пучок (перетворення рядків A одночасно зі стовбцями C і перетворення стовбців A одночасно з рядками C). Крім того зі співвідношення $(M_1M_2)^2 = 0$ слідує $(CA)^2 = 0$.

Після зведення матриці C до вигляду

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

матриця

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи співвідношення $(CA)^2 = 0$, отримаю співвідношення $A_{11}^2 = 0$,, $A_{11}A_{12} = 0$. A_{11} зводиться до Жорданової нормальної форми. Загалом матриці вийдуть розміром 4 на 4.

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 \\ Y_1 & Z_0 & Y_2 & Z \end{pmatrix}.$$

Матриця Z_0 перетворюється в нульову додаванням першого рядка матриці A до останнього. Для решти матриць буде така матрична задача:

1) перетворення стовпців Y_1 одночасні з перетвореннями рядків X_1;

2) перетворення стовпців Y_2 одночасні з перетвореннями рядків X_2;

3) зовнішнє додавання стовпців Y_1 до стовпців Y_2 одночасне з зовнішнім додаванням рядків X_2 до рядків X_1;

4) зовнішнє додавання стовпців Y_2 до стовпців Z;

5) зовнішнє додавання рядків X_2 до рядків Z.

Розв'язавши останню задачу, отримаю канонічний вигляд матриць.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отримані результати можна підсумувати у наступну теорему.

Теорема 4. *Зображення алгебри $\mathcal{M}(B)$ у випадку (d) однозначно визначаються трійкою матриць $M = \varphi(e_{11})$, $M_1 = \varphi(e_{12})$, $M_2 = \varphi(e_{21})$. Всі нерозкладні зображення вичерпуються наступними випадками.*

(1)$M = (0),\ M_1 = (0),\ M_2 = (0)$

(2)$M = (1),\ M_1 = (0),\ M_2 = (0)$

(3)$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(4)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(8)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(13)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(14) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Висновки. У статті розглянуті зображення напівгруп Рісса над групою C_2 у модулярному випадку. У випадку, коли задача має скінченний тип, наведено опис усіх нерозкладних зображень.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ* . 1977. Т. 71. С. 24–41.
2. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы. *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1972. Т. 28. С. 154–163.
3. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ.* 1987. Т.160. С. 229–238.
4. Ringel C. M. The Representation Type of the Full Transforamtion Semigroup T_4. *SemiGroup Forum.* 2000. Vol. 61. P. 429–434.
5. Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.* 2015. Vol. 20, No. 1. P. 32–39.
6. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія «Математика і інформ.».* 2018. № 2(33). С. 19–26.
7. Bondarenko V. M., Tertychna O. V., Zubaruk O. V. On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2016. Vol. 21, № 1. C. 18–23.
8. Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2013. Vol. 16, No. 1. P. 16–19.
9. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія «Математика і інформ.».* 2018. № 1 (32). С. 36–49.
10. Dyachenko S. M. On modular representations of some semigroups and representations of quivers with relations. *Вісник Київського університету (серія механіка і математика).* 2010. № 3. С. 11–15.

Dyachenko S. M. Representations of Rees Semigroup over C_2 in modular case.

Matrix representations of algebraic objects have always interested scientists. Most of them are studied in mathematics and physics. When considering representations, there are usually two main problems: the first is to investigate what type of complexity has matrix problem (finite type, tame or wild), the second is to describe all representations (this problem is easiest to solve when the matrix problem is of finite type, since in this case the number of non-decomposable representations is finite).

A problem of describing representations of certain algebraic objects, as groups and semigroups, are further divided into two types: modular and non-modular. In the case of finite orders a problem refers to the modular case if the characteristic of the field over which the representation is considered divides the order of the corresponding group (or a subgroup of the semigroup). Accordingly, nonmodular case – when the field characteristic is zero or does not divide the order of the group (a subgroup of the semigroup). These problems fall into different categories of complexity. For example, the well-known Mashke lemma. Problem to find all representations of a given group in the non-modular case are finite-type problems. If we consider the modular case, then the theory immediately becomes non-trivial, many famous mathematicians worked on its.

Unlike theory of representations groups [1]), semi-group repsentation theory has been studied less. If we talk about the classification of non-decomposable representations of semigroups, we should first of all highlight the works of I. S. Ponizovskiy [2, 3]. Among the works of recent times I want highlight articles of V. M. Bondarenko and his students S. M. Dyachenko, O. M. Tertichna, O. V. Zubaruk, E. M. Kostyshyn, Ja. V. Zaciha (see [5–10]). The representations of the Rees semigroups began to be studied by I. S. Ponizovsky [2]. He considered a non-modular case and described semigroups of finite type.

This article is a continuation of the article [10], which consider the representation type of the Rees semigroup over the group C_2 in the modular case, that is, if the characteristic of the basic field is equal to 2. The article deals with finite-type problems and describes all non-decomposable representations.

Keywords: Rees semigroup, representation, matrix problem.

References

1. Bondarenko, V. M., & Drozd, Y. A. (1977). Representation type of finite groups. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1*, 24–41 [in Russian].
2. Ponizovski, J. S. (1972). Finitness of the type of semigroup algebras for finite completely simple semigroups. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 28,* 154–163 [in Russian].
3. Ponizovski, J. S. (1987). Some examples of semigroup algebras of finite representation type. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 160,* 229–238 [in Russian].
4. Ringel, C. M. (2000). The Representation Type of the Full Transforamtion Semigroup T_4 *SemiGroup Forum, 61,* 429–434
5. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Y. V. (2015). On characteristic properties of semigroups *Algebra Discrete Math, 20(1)*, 32–39.
6. Bondarenko, V. M., & Zaciha, J. V. (2018). On matrix representations of monoids of the fourth order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematics and informatics, 2(33)*, 19–26 [in Ukrainian].
7. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. V., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics, 21(1)*, 18–23.
8. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn, E. M. (2013). On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ *Algebra and Discrete Mathematics. 16 (1)* 16–19.
9. Bondarenko, V. M., & Zaciha, J. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, Ser. of mathematics and informatics, 1(32)*, 36–49 [in Ukrainian].
10. Dyachenko, S. M. (2010). On modular representations of some semigroups and representations of quivers with relations *Scientific Bulletin of Kyiv University, ser. machanics and mathematics, 3,* 11–15.

Одержано 03.11.2019