УДК 512.643.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).82-96

О. А. Тилищак[1], Р. Ф. Цімболинець[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри,
кандидат фізико-математичних наук
alxtlk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7828-3416

[2] Свалявська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №2,
вчитель математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
ruslanadinis@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4460-6675

НЕЗВІДНІСТЬ ОДНІЄЇ МАТРИЦІ 8-ГО ПРЯДКУ НАД ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ ДОВЖИНИ БІЛЬШЕ 2

Розглядаються квадратні матриці, вигляду $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{diag}[\overbrace{1, \dots, 1}^{k}, t, \dots, t]$, де k — натуральне число менше порядку матриці, над комутативним локальним кільцем радикал Джекобсона якого є головним ідеалом породженим елементом t. Відомо, що для k не взаємно простого з порядком матриці всі розглядувані матриці звідні. Якщо радикал ненульовий, то всі розглядувані матриці з $k = 1$ або k на одиницю менше порядку матриці незвідні а всі розглядувані матриці порядку менше 7 незвідні тоді і тільки тоді, коли k взаємно просте з порядком матриці. Якщо ступінь нільпотентності радикала 2, то матриці $M(t, 3, 7)$, $M(t, 4, 7)$ є звідні. Якщо радикал не нільпотентний, або ступінь нільпотентності радикала вище 2, то всі розглядувані матриці порядку менше 8 незвідні тоді і тільки тоді, коли k взаємно просте з порядком матриці. Відомо, отже, що $M(t, 1, 8)$, $M(t, 7, 8)$ є незвідні а $M(t, 2, 8)$, $M(t, 4, 8)$, $M(t, 6, 8)$ є звідні. В роботі показано незвідність матриці $M(t, 5, 8)$. Крім того, для довільного комутативного локального кільця з ненульовим радикалом, породженим елементом t, у випадку подібності розглядуваних матриць довільного порядку до $\left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ (тобто їх звідності), описується вигляд, до якого подібна квадратна матриця D. В цьому випадку, порядок D не менше 2 а всі стовпці, окрім можливо одного, який складається з усіх елементів кратних t, одержаного вигляду містять рівно один ненульовий елемент рівний 1 або добутку t на оборотній множник. Для доведення незвідності матриці $M(t, 5, 8)$ показано, що подібність до матриці $\left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, за 6 можливими випадками знайденого вигляду D неможливі. Випадки класифіковано за кількістю одиниць та порядком матриці D від 2 до 4. А також показано, що неможливість подібності в інших випадках зводиться до розглянутих.

Ключові слова: мономіальна матриця, незвідна матриця, матриця порядку 8, локальне кільце, кільце головних ідеалів, радикал Джекобсона.

1. Вступ. Задача про опис, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем, що не є полем, містить в собі нерозв'язну задачу лінійної алгебри про пару матриць над полем вже для локальних кілець головних ідеалів. Для кілець з нільпотентним радикалом це вперше доведено в 1976 р. В. М. Бондаренком [1]. В таких випадках стає актуальною задача досліджень, з точністю до подібності, матриць спеціального вигляду.

Далі через K будемо позначати комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $tK \neq 0$ $(t \in K)$. Нехай k і n натуральні числа, $k < n$. Розглянемо мономіальну матрицю порядку n над кільцем K вигляду:

$$M(t,k,n) = \begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{0 \;\; \dots \;\; 0}}^{k} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & t \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & t & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{1}$$

Нерозкладність розглядуваних матриць та достатня умова нерозкладності певного узагальнення цих матриць одержано в [2]. З результатів П. М. Гудивка та одного з авторів [3] випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого $tK \neq 0$ $(t \in K)$. Матриці $M(t,1,n)$, $M(t,n-1,n)$ порядку $n > 1$ незвідні над кільцем K.*

Було показано [4], що для $(n,k) > 1$ матриця $M(t,k,n)$ звідна над кільцем K, а для $n < 7$, $(n,k) = 1$ матриця $M(t,k,n)$ незвідна. Якщо $t^2 = 0$ в [4, 6] показано, що матриці $M(t,3,7)$, $M(t,4,7)$ звідні. Якщо $t^2 \neq 0$ в [5] показано, що всі матриці $M(t,k,7)$ незвідні. Для таких матриць 8-го порядку над тим же кільце відомо, що $M(t,1,8)$, $M(t,7,8)$ є незвідні а $M(t,2,8)$, $M(t,4,8)$, $M(t,6,8)$ є звідні. В роботі показано незвідність матриці $M(t,5,8)$.

2. Про звідність матриць $M(t,k,n)$. Через K^* будемо позначати мультиплікативну групу кільця K а $\overline{M} = (m_{ij} + tK)$ — матрицю над полем K/tK отриману з матриці $M = (m_{ij})$ над кільцем K редукцією за модулем tK.

Теорема 2. *Нехай n і k натуральні числа, $k < n$, K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого tK $(t \in K,\ t \neq 0)$. Якщо матриця $M(t,k,n)$ подібна (над K) до матриці $N = \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, де D — квадратна матриця порядку m $(0 < m < n)$, тоді D подібна (над K) до*

$$\begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{0 \;\; \dots \;\; 0}}^{k'} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & td_{1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td_{1m} \\ 1 & \dots & 0 & td_{2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & td_{k'+2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & td_{k'+3,k'+1} & td_{k'+3,k'+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & td_{m,k'+1} & 0 & \dots & td_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

для деякого k' $(0 < k' < k)$, де $d_{ij} \in K^*$, якщо $i - j \equiv 1 \pmod{m}$.

Доведення. З [5, Теорема 2, с. 38] випливає, що D подібна до матриці

$$\begin{array}{l} \quad\overbrace{\hphantom{0 \;\; \dots \;\; 0}}^{k'} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & td_{1,k'+1} & \dots & td_{1m} \\ 1 & \dots & 0 & td_{2,k'+1} & \dots & td_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & \dots & td_{k'+1,m} \\ 0 & \dots & 0 & td_{k'+2,k'+1} & \dots & td_{k'+2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & td_{m,k'+1} & \dots & td_{mm} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3}$$

для деякого $0 < k' < m$. Це, зокрема, означає, що $\overline{D} \neq 0$. Позначимо через $T_{ij}(d)$, де $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, $d \in K$, перетворення подібності, що полягає в додаванні до j-го стовпця i-го стовпця домноженого на d з одночасним додаванням до i-го рядка j-го рядка домноженого на $-d$. Очевидно, результат послідовного виконання двох перетворень $T_{ij}(d)$ та $T_{i'j'}(d')$ не залежить від їх порядку, якщо $i = i'$ або $j = j'$. В результаті виконання $T_{k',k'+2}(-td_{k'+1,k'+2}), \dots, T_{k',m}(-td_{k'+1,m})$ над матрицею (3) одержимо для деяких $d'_{ij} \in K$ матрицю

$$\begin{array}{l}
\quad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\quad}^{k'}\\
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & td_{1,k'+1} & td_{1,k'+2} & \dots & td_{1m}\\
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & td_{2,k'+1} & td_{2,k'+2} & \dots & td_{2m}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & td_{k'-1,k'+1} & td_{k'-1,k'+2} & \dots & td_{k'-1,m}\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & td'_{k',k'+1} & td'_{k',k'+2} & \dots & td'_{k',m}\\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & td_{k'+2,k'+1} & td_{k'+2,k'+2} & \dots & td_{k'+2,m}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & td_{m,k'+1} & td_{m,k'+2} & \dots & td_{mm}
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{4}$$

Проводячи перетворення далі $T_{k'-1,k'+2}(-td'_{k',k'+2}), \dots, T_{k'-1,m}(-td'_{k',m})$, аналогічно потім $T_{k'-2,k'+2}(-td''_{k'-1,k'+2}), \dots, T_{k'-2,m}(-td''_{k'-1,m})$ і так до $T_{1,k'+2}(-td^{(k'-1)}_{2,k'+2})$, $\dots$, $T_{1,m}(-td^{(k'-1)}_{2,m})$. Одержимо для деяких $d''_{ij}, \dots, d^{(k')}_{ij} \in K$ матрицю

$$\begin{array}{l}
\quad\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{k'}\\
\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & & td^{(k')}_{1,k'+2} & \dots & td^{(k')}_{1,m-1} & td^{(k')}_{1m}\\
\cline{6-9}
1 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{} & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \multicolumn{1}{c}{} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{} & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & \dots & 0 & td_{k'+2,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{} & td_{k'+2,k'+2} & \dots & td_{k'+2,m-1} & td_{k'+2,m}\\
0 & \dots & 0 & td_{k'+3,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{} & td_{k'+3,k'+2} & \dots & td_{k'+3,m-1} & td_{k'+3,m}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \multicolumn{1}{c}{} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & td_{m,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{} & td_{m,k'+2} & \dots & td_{m,m-1} & td_{m,m}
\end{array}\right)
\end{array}. \tag{5}$$

Якщо $d^{(k')}_{1,k'+2} \equiv \dots \equiv d^{(k')}_{1m} \equiv 0 \pmod{tK}$ то матриця $M(t, k, n)$ подібна над K/t^2K до матиці вигляду $N = \left(\begin{smallmatrix} D' & B' \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$, де $D' = (td_{k'+1+i,k'+1+j})$ $(i, j = 1, \dots, m - k' - 1)$. Тоді $\overline{D'} = 0$, а це суперечить [5, Теорема 2, с. 38]. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $d^{(k')}_{1m} \in K^*$. В результаті виконання перетворень $T_{m,k'+2}\left(-d^{(k')}_{1,k'+2}(d^{(k')}_{1m})^{-1}\right)$, $\dots$, $T_{m,m-1}\left(-d^{(k')}_{1,m-1}(d^{(k')}_{1m})^{-1}\right)$ над матрицею (5) одержимо для деяких $d^{(k'+1)}_{ij} \in K$ матрицю

$$\begin{array}{l}
\quad\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{k'}\\
\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \dots & \multicolumn{1}{c}{0} & td^{(k')}_{1m}\\
1 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \dots & \multicolumn{1}{c}{0} & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \ddots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots\\
0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \dots & \multicolumn{1}{c}{0} & 0\\
0 & \dots & 0 & td_{k'+2,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{td^{(k'+1)}_{k'+2,k'+2}} & \dots & \multicolumn{1}{c}{td^{(k'+1)}_{k'+2,m-1}} & td_{k'+2,m}\\
0 & \dots & 0 & td_{k'+3,k'+1} & \multicolumn{1}{c}{td^{(k'+1)}_{k'+3,k'+2}} & \dots & \multicolumn{1}{c}{td^{(k'+1)}_{k'+3,m-1}} & td_{k'+3,m}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \ddots & \multicolumn{1}{c}{\vdots} & \vdots\\
\cline{5-7}
0 & \dots & 0 & td^{(k'+1)}_{m,k'+1} & td^{(k'+1)}_{m,k'+2} & \dots & td^{(k'+1)}_{m,m-1} & td^{(k'+1)}_{m,m}
\end{array}\right)
\end{array}. \tag{6}$$

З [5, Теорема 2, с. 38] також отримуємо, що хоча б одне з чисел $d^{(k'+1)}_{m,k'+2}, \dots, d^{(k'+1)}_{m,m-1}$ оборотне. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $d^{(k'+1)}_{m,m-1} \in K^*$. В результаті виконання над (6) перетворень $T_{m-1,k'+2}\left(-d^{(k'+1)}_{m,k'+2}(d^{(k'+1)}_{m,m-1})^{-1}\right), \dots, T_{m-1,m-2}\left(-d^{(k'+1)}_{m,m-2}(d^{(k'+1)}_{m,m-1})^{-1}\right)$, $T_{m-1,m}\left(-d^{(k'+1)}_{m,m}(d^{(k'+1)}_{m,m-1})^{-1}\right)$ одержимо для деяких $d^{(k'+2)}_{ij} \in K$ матрицю

$$\begin{array}{l} \;\overbrace{\qquad\quad\;\;}^{k'} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & td^{(k')}_{1m} \\ 1 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & td_{k'+2,k'+1} & td^{(k'+2)}_{k'+2,k'+2} & \dots & td^{(k'+2)}_{k'+2,m-2} & td^{(k'+1)}_{k'+2,m-1} & td^{(k'+2)}_{k'+2,m} \\ 0 & \dots & 0 & td_{k'+3,k'+1} & td^{(k'+2)}_{k'+3,k'+2} & \dots & td^{(k'+2)}_{k'+3,m-2} & td^{(k'+1)}_{k'+3,m-1} & td^{(k'+2)}_{k'+3,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & td^{(k'+2)}_{m-1,k'+1} & td^{(k'+2)}_{m,k'+2} & \dots & td^{(k'+2)}_{m-1,m-2} & td^{(k'+2)}_{m-1,m-1} & td^{(k'+2)}_{m-1,m} \\ 0 & \dots & 0 & td^{(k'+1)}_{m,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td^{(k'+1)}_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{7}$$

Продовжуючи аналогічно далі одержимо для деяких $d^{(m)}_{ij} \in K$, $d^{(m)}_{k'+3,k'+2}, \dots, d^{(m)}_{m,m-1}, d^{(k')}_{1m} \in K^*$ матрицю

$$\begin{array}{l} \;\overbrace{\qquad\quad\;\;}^{k'} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1m} \\ 1 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m)}_{k'+2,k'+1} & td^{(m)}_{k'+2,k'+2} & \dots & td^{(m)}_{k'+2,m-1} & td^{(m)}_{k'+2,m} \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m)}_{k'+3,k'+1} & td^{(m)}_{k'+3,k'+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m)}_{m,k'+1} & 0 & \dots & td^{(m)}_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{8}$$

Враховуючи оборотність $d^{(m)}_{k'+3,k'+2}$ виконаємо над матрицею (8) перетворення $T_{k'+2,k'+3}\left(d^{(m)}_{k'+2,k'+2}(d^{(m)}_{k'+3,k'+2})^{-1}\right)$. Тоді для деяких $d^{(m+1)}_{ij} \in K$ одержимо

$$\begin{array}{l} \;\overbrace{\qquad\quad\;\;}^{k'} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1m} \\ 1 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m+1)}_{k'+2,k'+1} & 0 & td^{(m+1)}_{k'+2,k'+3} & \dots & td^{(m)}_{k'+2,m-1} & td^{(m)}_{k'+2,m} \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m)}_{k'+3,k'+1} & td^{(m)}_{k'+3,k'+2} & td^{(m+1)}_{k'+3,k'+3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m)}_{k'+4,k'+1} & 0 & td^{(m)}_{k'+4,k'+3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & td^{(m)}_{m,k'+1} & 0 & 0 & \dots & td^{(m)}_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{9}$$

Проводячи аналогічні перетворення далі для деяких $d^{(2m)}_{ij} \in K$ одержимо

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0}}^{k'} \hphantom{td^{(2m)}_{k'+3,k'+1} \quad td^{(m)}_{k'+3,k'+2} \quad \dots \quad td^{(m)}_{m,m-1} \quad td^{(2m)}_{m,m}} \\
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1m} \\
1 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+2,m} \\
0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+3,k'+1} & td^{(m)}_{k'+3,k'+2} & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+3,m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{m,k'+1} & 0 & \dots & td^{(m)}_{m,m-1} & td^{(2m)}_{m,m}
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{10}
$$

Враховуючи оборотність $d^{(k')}_{1m}$ виконаємо над останньою матрицею перетворення $T_{k'+2,1}\left(d^{(2m)}_{k'+2,m}(d^{(k')}_{1m})^{-1}\right)$, $\dots$, $T_{m,1}\left(d^{(2m)}_{m,m}(d^{(k')}_{1m})^{-1}\right)$. Тоді для деяких $d^{(2m+1)}_{ij} \in K$ одержимо

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{td^{(2m+1)}_{11} \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{k'} \hphantom{td^{(k')}_{1,k'+1} \quad td^{(m)}_{k'+3,k'+2} \quad \dots \quad td^{(m)}_{m,m-1} \quad td^{(k')}_{1m}} \\
\begin{pmatrix}
td^{(2m+1)}_{11} & 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1m} \\
1 & 0 & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & td^{(k'-2)}_{3,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
td^{(2m+1)}_{k'+2,1} & 0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
td^{(2m+1)}_{k'+3,1} & 0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+3,k'+1} & td^{(m)}_{k'+3,k'+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
td^{(2m+1)}_{m1} & 0 & \dots & 0 & td^{(2m)}_{m,k'+1} & 0 & \dots & td^{(m)}_{m,m-1} & 0
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{11}
$$

Перетворення $T_{12}\left(td^{(2m+1)}_{11}\right)$, $T_{k'+2,2}\left(td^{(2m+1)}_{k'+2,1}\right)$, $\dots$, $T_{m,2}\left(td^{(2m+1)}_{m,1}\right)$, зведуть матрицю (11) для деяких $d^{(2m+2)}_{ij} \in K$ до вигляду

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{0 \quad td^{(2m+2)}_{12} \quad \dots \quad 0}}^{k'} \hphantom{td^{(k')}_{1,k'+1} \quad td^{(m)}_{k'+3,k'+2} \quad \dots \quad td^{(m)}_{m,m-1} \quad td^{(k')}_{1m}} \\
\begin{pmatrix}
0 & td^{(2m+2)}_{12} & \dots & 0 & td^{(k')}_{1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & td^{(k')}_{1m} \\
1 & td^{(2m+2)}_{22} & \dots & 0 & td^{(k'-1)}_{2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & td^{(k'-2)}_{3,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & td_{k'+1,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & td^{(2m+2)}_{k'+2,2} & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+2,k'+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & td^{(2m+2)}_{k'+3,2} & \dots & 0 & td^{(2m)}_{k'+3,k'+1} & td^{(m)}_{k'+3,k'+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & td^{(2m+2)}_{m2} & \dots & 0 & td^{(2m)}_{m,k'+1} & 0 & \dots & td^{(m)}_{m,m-1} & 0
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{12}
$$

Проводячи аналогічні перетворення далі для деяких $d^{(3m)}_{ij} \in K$ одержимо

$$D^{(3m)} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \ldots \ 0}^{k'} & td^{(3m)}_{1,k'+1} & 0 & \ldots & 0 & td^{(k')}_{1m} \\ 1 \ \ldots \ 0 & td^{(3m)}_{2,k'+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots \ \ddots \ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \ldots \ 1 & td^{(3m)}_{k'+1,k'+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 \ \ldots \ 0 & td^{(3m)}_{k'+2,k'+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 \ \ldots \ 0 & td^{(3m)}_{k'+3,k'+1} & td^{(m)}_{k'+3,k'+2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots \ \ddots \ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \ldots \ 0 & td^{(3m)}_{m,k'+1} & 0 & \ldots & td^{(m)}_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

$D^{(3m)}$, до якої подібна D, має вигляд (2). Нехай $1 \leqslant i \leqslant m$, $i-k'-1 \equiv 1 \pmod m$). Залишилося показати, що $d^{(3m)}_{i,k'+1} \in K^*$. Припустимо $d^{(3m)}_{i,k'+1} \in tK$, тоді $td^{(3m)}_{i,k'+1} \in t^2K$. Легко побувати стовпчик $S = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k'}, 1, \alpha_{k'+2}, \ldots, \alpha_m)^T$, що над K/t^2K $DS = 0$. Такий стовпчик є першим стовпчиком деякої оборотної матриці C порядку m на K/t^2K і перший стовпчик DC, як і $C^{-1}DC$ нульовий. Оскільки нульова 1×1-матриця не подібна матриці вигляду (3), то маємо протиріччя до [5, Теорема 2, с. 38]. Тому $d^{(3m)}_{i,k'+1} \in K^*$. Теорема доведена.

3. Незвідність матриці $M(t,5,8)$. Нехай далі K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого tK ($t \in K$, $t^2 \neq 0$). Покажемо незвідність матриці $M(t,5,8)$.

Лема 1. *Для жодного $d_{12} \in K^*$ матриця $M(t,5,8)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ \text{де } D = \begin{pmatrix} 0 & td_{12} \\ 1 & td_{22} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Припустимо, подібність матриць $M(t,5,8) \sim \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Тоді існує така матриця $C \in GL(8,K)$, що $C^{-1}MC = \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ O & A \end{smallmatrix}\right)$, тобто

$$MC = C \begin{pmatrix} D & B \\ O & A \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Нехай

$$C = (c_{i,j}), \ (i,j = 1, \ldots, 8) \ \text{ і } \ C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \\ c_{51} & c_{52} \\ c_{61} & c_{62} \\ c_{71} & c_{72} \\ c_{81} & c_{82} \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівності (14) отримаємо: $M(t,5,8)C' = C'D$, тобто

$$\begin{pmatrix} tc_{81} & tc_{82} \\ c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \\ c_{51} & c_{52} \\ tc_{61} & tc_{62} \\ tc_{71} & tc_{72} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & tc_{11}d_{12}+tc_{12}d_{22} \\ c_{22} & tc_{21}d_{12}+tc_{22}d_{22} \\ c_{32} & tc_{31}d_{12}+tc_{32}d_{22} \\ c_{42} & tc_{41}d_{12}+tc_{42}d_{22} \\ c_{52} & tc_{51}d_{12}+tc_{52}d_{22} \\ c_{62} & tc_{61}d_{12}+tc_{62}d_{22} \\ c_{72} & tc_{71}d_{12}+tc_{72}d_{22} \\ c_{82} & tc_{81}d_{12}+tc_{82}d_{22} \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Позначимо через $(15)_{[i,j]}$ скалярну рівність $(M(t,5,8)C')_{ij} = (C'D)_{ij}$. Тоді:

$$\begin{array}{rll} (15)_{[1,1]}: & c_{12} = tc_{81}, & (15)_{[7,1]}: \; c_{72} = tc_{61}, \\ (15)_{[6,1]}: & c_{51} = c_{62}, & (15)_{[8,1]}: \; c_{82} = tc_{71}. \\ (15)_{[5,1]}, (15)_{[6,2]}: & c_{41} = c_{52} = tc_{61}d_{12} + tc_{51}d_{22}, & \\ (15)_{[4,1]}, (15)_{[5,2]}: & c_{31} = c_{42} = tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22}, & \\ (15)_{[3,1]}, (15)_{[4,2]}: & c_{21} = c_{32} = tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22}, & \\ (15)_{[2,1]}, (15)_{[3,2]}: & c_{11} = c_{22} = tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22}, & \end{array}$$

З цих рівностей, зокрема, $\overline{c_{12}} = \overline{c_{22}} = \overline{c_{32}} = \overline{c_{42}} = \overline{c_{52}} = \overline{c_{72}} = \overline{c_{82}} = 0$. З оборотності C випливає, що $\overline{c_{62}} \neq 0$. Тобто $c_{51} = c_{62} \in K^*$. Вилучаючи невідомі за тими ж рівностями з (15) отримуємо систему із 4 рівнянь:

$$\begin{cases} tc_{51} &= tc_{71}d_{12} + t^2c_{61}d_{22}, \\ t^2c_{61} &= tc_{81}d_{12} + t^2c_{71}d_{22}, \\ t^2c_{71} &= t^2c_{81}d_{22}, \\ tc_{81} &= 0. \end{cases}$$

З 3-го рівняння випливає, що $c_{71} = c_{81}d_{22} + tc'_{71}$, а з 4-го: $c_{81} = t^2c'_{81}$ для деяких $c'_{71}, c'_{81} \in K$. А тоді з 1-го рівняння отримуємо, що $tc_{51} \equiv 0 \pmod{t^2K}$, що неможливо, бо $c_{51} \in K^*$. Лема доведена.

Лема 2. *Для жодного $d_{13}, d_{32}, \in K^*$ матриця $M(t,5,8)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \; \textit{де } D = \begin{pmatrix} 0 & td_{12} & td_{13} \\ 1 & td_{22} & 0 \\ 0 & td_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Припустимо, подібність матриць $M(t,5,8) \sim \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Тоді існує така матриця $C \in GL(8,K)$, що

$$C = (c_{i,j}), \; (i,j = 1,\ldots,8), \; C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} \end{pmatrix} \; \text{ і } \; M(t,5,8)C' = C'D.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} tc_{81} & tc_{82} & tc_{83} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ tc_{61} & tc_{62} & tc_{63} \\ tc_{71} & tc_{72} & tc_{73} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & tc_{11}d_{12} + tc_{12}d_{22} + tc_{13}d_{32} & tc_{11}d_{13} \\ c_{22} & tc_{21}d_{12} + tc_{22}d_{22} + tc_{23}d_{32} & tc_{21}d_{13} \\ c_{32} & tc_{31}d_{12} + tc_{32}d_{22} + tc_{33}d_{32} & tc_{31}d_{13} \\ c_{42} & tc_{41}d_{12} + tc_{42}d_{22} + tc_{43}d_{32} & tc_{41}d_{13} \\ c_{52} & tc_{51}d_{12} + tc_{52}d_{22} + tc_{53}d_{32} & tc_{51}d_{13} \\ c_{62} & tc_{61}d_{12} + tc_{62}d_{22} + tc_{63}d_{32} & tc_{61}d_{13} \\ c_{72} & tc_{71}d_{12} + tc_{72}d_{22} + tc_{73}d_{32} & tc_{71}d_{13} \\ c_{82} & tc_{81}d_{12} + tc_{82}d_{22} + tc_{83}d_{32} & tc_{81}d_{13} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} (16)_{[1,1]} &: c_{12} = tc_{81}, & (16)_{[5,3]} &: c_{43} = tc_{51}d_{13}, \\ (16)_{[2,1]}, (16)_{[3,2]} &: c_{11} = c_{22} = tc_{31}d_{12} + tc_{32}d_{22} + tc_{33}d_{32}, & (16)_{[6,1]} &: c_{62} = c_{51}, \\ (16)_{[2,3]} &: c_{13} = tc_{21}d_{13}, & (16)_{[6,3]} &: c_{53} = tc_{61}d_{13}, \\ (16)_{[3,1]}, (16)_{[4,2]} &: c_{32} = c_{21} = tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32}, & (16)_{[7,1]} &: c_{72} = tc_{61}, \\ (16)_{[3,3]} &: c_{23} = tc_{31}d_{13}, & (16)_{[8,1]} &: c_{82} = tc_{71}. \\ (16)_{[4,1]}, (16)_{[5,2]} &: c_{42} = c_{31} = tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32}, \\ (16)_{[4,3]} &: c_{33} = tc_{41}d_{13}, \\ (16)_{[5,1]}, (16)_{[6,2]} &: c_{52} = c_{41} = tc_{61}d_{12} + tc_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32}, \end{aligned}$$

З цих рівностей, зокрема, $\overline{c_{12}} = \overline{c_{22}} = \overline{c_{32}} = \overline{c_{42}} = \overline{c_{52}} = \overline{c_{72}} = \overline{c_{82}} = 0$. З оборотності C випливає, що $\overline{c_{62}} \neq 0$. Тобто $c_{51} = c_{62} \in K^*$. Вилучаючи невідомі за тими ж рівностями з (16) отримуємо систему із 7 рівнянь:

$$\begin{cases} tc_{51} &= tc_{71}d_{12} + t^2c_{61}d_{22} + tc_{73}d_{32}, \\ t^2c_{61} &= tc_{81}d_{12} + t^2c_{71}d_{22} + tc_{83}d_{32}, \\ tc_{63} &= tc_{71}d_{13}, \\ t^2c_{71} &= t^2c_{81}d_{22}, \\ tc_{73} &= tc_{81}d_{13}, \\ tc_{81} &= 0, \\ tc_{83} &= 0. \end{cases}$$

З 1-го рівняння випливає, що $c_{51} = c_{71}d_{12} + tc_{61}d_{22} + c_{73}d_{32} + t^2c'_{51}$,
з 4-го: $c_{71} = c_{81}d_{22} + tc'_{71}$, з 5-го: $c_{73} = c_{81}d_{13} + t^2c'_{73}$,
з 6-го: $c_{81} = t^2c'_{81}$, з 7-го: $c_{83} = t^2c'_{83}$ для деяких $c'_{51}, c'_{71}, c'_{73}, c'_{81}, c'_{83} \in K$. Тоді $c_{51} = tc_{61}d_{22} + t^2c'_{51} + d_{32}\,(t^2c'_{73} + t^2d_{13}c'_{81}) + d_{12}\,(tc'_{71} + t^2d_{22}c'_{81}) \in tK$, що неможливо. Лема доведена.

Лема 3. *Для жодного $d_{13} \in K^*$ матриця $M(t,5,8)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ \textit{де } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & td_{13} \\ 1 & 0 & td_{23} \\ 0 & 1 & td_{33} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Припустимо, подібність матриць $M(t,5,8) \sim \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Тоді існує така матриця $C \in GL(8,K)$, що

$$C=(c_{i,j}),\ (i,j=1,\ldots,8),\ C'=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\\ c_{41} & c_{42} & c_{43}\\ c_{51} & c_{52} & c_{53}\\ c_{61} & c_{62} & c_{63}\\ c_{71} & c_{72} & c_{73}\\ c_{81} & c_{82} & c_{83}\end{pmatrix} \text{ і } M(t,5,8)C'=C'D.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} tc_{81} & tc_{82} & tc_{83}\\ c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\\ c_{41} & c_{42} & c_{43}\\ c_{51} & c_{52} & c_{53}\\ tc_{61} & tc_{62} & tc_{63}\\ tc_{71} & tc_{72} & tc_{73}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{12} & c_{13} & tc_{11}d_{13}+tc_{12}d_{23}+tc_{13}d_{33}\\ c_{22} & c_{23} & tc_{21}d_{13}+tc_{22}d_{23}+tc_{23}d_{33}\\ c_{32} & c_{33} & tc_{31}d_{13}+tc_{32}d_{23}+tc_{33}d_{33}\\ c_{42} & c_{43} & tc_{41}d_{13}+tc_{42}d_{23}+tc_{43}d_{33}\\ c_{52} & c_{53} & tc_{51}d_{13}+tc_{52}d_{23}+tc_{53}d_{33}\\ c_{62} & c_{63} & tc_{61}d_{13}+tc_{62}d_{23}+tc_{63}d_{33}\\ c_{72} & c_{73} & tc_{71}d_{13}+tc_{72}d_{23}+tc_{73}d_{33}\\ c_{82} & c_{83} & tc_{81}d_{13}+tc_{82}d_{23}+tc_{83}d_{33}\end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} &(17)_{[2,2]},(17)_{[1,1]}: c_{23}=c_{12}=tc_{81}, && (17)_{[7,1]}: c_{72}=tc_{61},\\ &(17)_{[1,2]},(17)_{[8,1]}: c_{13}=tc_{82}=t^2c_{71}, && (17)_{[7,2]}: c_{73}=tc_{62},\\ &(17)_{[6,2]},(17)_{[5,1]}: c_{63}=c_{52}=c_{41}, && (17)_{[8,2]}: c_{83}=tc_{72}.\\ &(17)_{[6,1]}: c_{62}=c_{51}, &&\\ &(17)_{[4,1]},(17)_{[5,2]},(17)_{[6,3]}: c_{31}=c_{42}=c_{53}=tc_{61}d_{13}+tc_{51}d_{23}+tc_{41}d_{33}, &&\\ &(17)_{[3,1]},(17)_{[4,2]},(17)_{[5,3]}: c_{21}=c_{32}=c_{43}=tc_{51}d_{13}+tc_{41}d_{23}+tc_{31}d_{33}, &&\\ &(17)_{[2,1]},(17)_{[3,2]},(17)_{[4,3]}: c_{11}=c_{22}=c_{33}=tc_{41}d_{13}+tc_{31}d_{23}+tc_{21}d_{33}, && \end{aligned}$$

З цих рівностей, зокрема, $\overline{c_{13}}=\overline{c_{23}}=\overline{c_{33}}=\overline{c_{43}}=\overline{c_{53}}=\overline{c_{73}}=\overline{c_{83}}=0$. З оборотності C випливає, що $\overline{c_{63}}\neq 0$. Тобто $c_{41}=c_{63}\in K^*$. Вилучаючи невідомі за тими ж рівностями з (17) отримуємо систему із 5 рівнянь:

$$\begin{cases} 0 &= t^2c_{41}d_{13}^2+t^2c_{81}d_{23},\\ tc_{41} &= tc_{71}d_{13}+t^2c_{61}d_{23}+t^2c_{51}d_{33},\\ t^2c_{51} &= tc_{81}d_{13}+t^2c_{71}d_{23},\\ t^2c_{71} &= t^2c_{51}d_{13}^2+2t^2c_{41}d_{13}d_{23}+t^2c_{81}d_{33},\\ tc_{81} &= t^2c_{61}d_{13}^2+2t^2c_{51}d_{13}d_{23}+t^2c_{41}d_{23}^2+2t^2c_{41}d_{13}d_{33}. \end{cases}$$

З 2-го рівняння випливає, що $c_{41}=c_{71}d_{13}+tc_{61}d_{23}+tc_{51}d_{33}+t^2c'_{41}$, а з 5-го: $c_{81}=tc_{61}d_{13}^2+2tc_{51}d_{13}d_{23}+tc_{41}d_{23}^2+2tc_{41}d_{13}d_{33}+t^2c'_{81}$, для деяких $c'_{41},c'_{81}\in K$. Тоді $c_{41}\equiv c_{71}d_{14} \pmod{tK}$ і $c_{71}\in K^*$. А тоді з 1-го рівняння отримуємо, що $0=t^2c_{41}d_{13}^2+t^2c_{81}d_{23}=t^2(c_{71}d_{13}+tc_{61}d_{23}+tc_{51}d_{33}+t^2c'_{41})d_{13}^2+t^2(tc_{61}d_{13}^2+2tc_{51}d_{13}d_{23}+tc_{41}d_{23}^2+2tc_{41}d_{13}d_{33}+t^2c'_{81})d_{23}=t^2c_{71}d_{13}^3$, що неможливо, бо $c_{71},\ d_{13}\in K^*$. Лема доведена.

Лема 4. *Для жодного $d_{14},d_{32},d_{43}\in K^*$ матриця $M(t,5,8)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} D & B\\ 0 & A\end{pmatrix},\ \text{де } D=\begin{pmatrix} 0 & td_{12} & 0 & td_{14}\\ 1 & td_{22} & 0 & 0\\ 0 & td_{32} & 0 & 0\\ 0 & td_{42} & td_{43} & 0\end{pmatrix}.$$

Доведення. Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Припустимо, подібність матриць $M(t,5,8) \sim \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Тоді існує така матриця $C \in GL(8,K)$, що

$$C = (c_{i,j}),\ (i,j = 1,\dots,8),\ C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} \end{pmatrix} \text{ і } M(t,5,8)C' = C'D.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} tc_{81}tc_{82}tc_{83}tc_{84} \\ c_{11}\ c_{12}\ c_{13}\ c_{14} \\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}\ c_{24} \\ c_{31}\ c_{32}\ c_{33}\ c_{34} \\ c_{41}\ c_{42}\ c_{43}\ c_{44} \\ c_{51}\ c_{52}\ c_{53}\ c_{54} \\ tc_{61}tc_{62}tc_{63}tc_{64} \\ tc_{71}tc_{72}tc_{73}tc_{74} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & tc_{11}d_{12} + tc_{12}d_{22} + tc_{13}d_{32} + tc_{14}d_{42} & tc_{14}d_{43} & tc_{11}d_{14} \\ c_{22} & tc_{21}d_{12} + tc_{22}d_{22} + tc_{23}d_{32} + tc_{24}d_{42} & tc_{24}d_{43} & tc_{21}d_{14} \\ c_{32} & tc_{31}d_{12} + tc_{32}d_{22} + tc_{33}d_{32} + tc_{34}d_{42} & tc_{34}d_{43} & tc_{31}d_{14} \\ c_{42} & tc_{41}d_{12} + tc_{42}d_{22} + tc_{43}d_{32} + tc_{44}d_{42} & tc_{44}d_{43} & tc_{41}d_{14} \\ c_{52} & tc_{51}d_{12} + tc_{52}d_{22} + tc_{53}d_{32} + tc_{54}d_{42} & tc_{54}d_{43} & tc_{51}d_{14} \\ c_{62} & tc_{61}d_{12} + tc_{62}d_{22} + tc_{63}d_{32} + tc_{64}d_{42} & tc_{64}d_{43} & tc_{61}d_{14} \\ c_{72} & tc_{71}d_{12} + tc_{72}d_{22} + tc_{73}d_{32} + tc_{74}d_{42} & tc_{74}d_{43} & tc_{71}d_{14} \\ c_{82} & tc_{81}d_{12} + tc_{82}d_{22} + tc_{83}d_{32} + tc_{84}d_{42} & tc_{84}d_{43} & tc_{81}d_{14} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} (18)_{[1,1]} &: c_{12} = tc_{81}, \\ (18)_{[8,1]} &: c_{82} = tc_{71}, \\ (18)_{[7,1]} &: c_{72} = tc_{61}, \\ (18)_{[6,3]} &: c_{54} = tc_{61}d_{14}, \\ (18)_{[6,3]} &: c_{53} = tc_{64}d_{43}, \\ (18)_{[6,1]} &: c_{62} = c_{51}, \\ (18)_{[5,4]} &: c_{44} = tc_{51}d_{14}, \\ (18)_{[5,3]} &: c_{43} = tc_{54}d_{43}, \\ (18)_{[5,1]}, (18)_{[6,2]} &: c_{41} = c_{52} = tc_{61}d_{12} + tc_{51}d_{22} + tc_{63}d_{32} + tc_{64}d_{42}, \\ (18)_{[4,1]}, (18)_{[5,2]} &: c_{31} = c_{42} = tc_{51}d_{12} + tc_{41}d_{22} + tc_{53}d_{32} + tc_{54}d_{42}, \\ (18)_{[3,1]}, (18)_{[4,2]} &: c_{21} = c_{32} = tc_{41}d_{12} + tc_{31}d_{22} + tc_{43}d_{32} + tc_{44}d_{42}, \\ (18)_{[2,1]}, (18)_{[3,2]} &: c_{11} = c_{22} = tc_{31}d_{12} + tc_{21}d_{22} + tc_{33}d_{32} + tc_{34}d_{42}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (18)_{[4,4]} &: c_{34} = tc_{41}d_{14}, \\ (18)_{[4,3]} &: c_{33} = tc_{44}d_{43}, \\ (18)_{[3,4]} &: c_{24} = tc_{31}d_{14}, \\ (18)_{[3,3]} &: c_{23} = tc_{34}d_{43}, \\ (18)_{[2,4]} &: c_{14} = tc_{21}d_{14}, \\ (18)_{[2,3]} &: c_{13} = tc_{24}d_{14}. \end{aligned}$$

З цих рівностей, зокрема, $\overline{c_{12}} = \overline{c_{22}} = \overline{c_{32}} = \overline{c_{42}} = \overline{c_{52}} = \overline{c_{72}} = \overline{c_{82}} = 0$. З оборотності C випливає, що $\overline{c_{62}} \neq 0$. Тобто $c_{51} = c_{62} \in K^*$. Вилучаючи невідомі за тими ж рівностями з (18) отримуємо систему із 10 рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{rcl} tc_{51} & = & tc_{71}d_{12}+t^2c_{61}d_{22}+tc_{73}d_{32}+tc_{74}d_{42}, \\ t^2c_{61} & = & tc_{81}d_{12}+t^2c_{71}d_{22}+tc_{83}d_{32}+tc_{84}d_{42}, \\ tc_{63} & = & tc_{74}d_{43}, \\ tc_{64} & = & tc_{71}d_{14}, \\ t^2c_{71} & = & t^2c_{81}d_{22}, \\ tc_{73} & = & tc_{84}d_{43}, \\ tc_{74} & = & tc_{81}d_{14}, \\ tc_{81} & = & 0, \\ tc_{83} & = & 0, \\ tc_{84} & = & 0. \end{array}\right.$$

З 1-го рівняння випливає, що $c_{51} = c_{71}d_{12} + tc_{61}d_{22} + c_{73}d_{32} + c_{74}d_{42} + t^2c'_{51}$ ($c'_{51} \in K$), з 5-го та 8-го: $c_{71} \equiv c_{81}d_{22} \equiv 0 \pmod{tK}$, з 6-го та 10-го: $c_{73} \equiv c_{84}d_{43} \equiv 0 \pmod{t^2K}$, з 7-го та 8-го: $c_{74} \equiv c_{81}d_{14} \equiv 0 \pmod{t^2K}$. Тоді $c_{51} \in tK$, що неможливо. Лема доведена.

Лема 5. *Для жодного $d_{14}, d_{43} \in K^*$ матриця $M(t,5,8)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \ \text{де } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & td_{13} & td_{14} \\ 1 & 0 & td_{23} & 0 \\ 0 & 1 & td_{33} & 0 \\ 0 & 0 & td_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Припустимо, подібність матриць $M(t,5,8) \sim \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Тоді існує така матриця $C \in GL(8,K)$, що

$$C = (c_{i,j}),\ (i,j = 1,\ldots,8),\ C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} \end{pmatrix} \ \text{і} \ M(t,5,8)C' = C'D.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} tc_{81} & tc_{82} & tc_{83} & tc_{84} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} \\ tc_{61} & tc_{62} & tc_{63} & tc_{64} \\ tc_{71} & tc_{72} & tc_{73} & tc_{74} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & c_{13} & tc_{11}d_{13}+tc_{12}d_{23}+tc_{13}d_{33}+tc_{14}d_{43} & tc_{11}d_{14} \\ c_{22} & c_{23} & tc_{21}d_{13}+tc_{22}d_{23}+tc_{23}d_{33}+tc_{24}d_{43} & tc_{21}d_{14} \\ c_{32} & c_{33} & tc_{31}d_{13}+tc_{32}d_{23}+tc_{33}d_{33}+tc_{34}d_{43} & tc_{31}d_{14} \\ c_{42} & c_{43} & tc_{41}d_{13}+tc_{42}d_{23}+tc_{43}d_{33}+tc_{44}d_{43} & tc_{41}d_{14} \\ c_{52} & c_{53} & tc_{51}d_{13}+tc_{52}d_{23}+tc_{53}d_{33}+tc_{54}d_{43} & tc_{51}d_{14} \\ c_{62} & c_{63} & tc_{61}d_{13}+tc_{62}d_{23}+tc_{63}d_{33}+tc_{64}d_{43} & tc_{61}d_{14} \\ c_{72} & c_{73} & tc_{71}d_{13}+tc_{72}d_{23}+tc_{73}d_{33}+tc_{74}d_{43} & tc_{71}d_{14} \\ c_{82} & c_{83} & tc_{81}d_{13}+tc_{82}d_{23}+tc_{83}d_{33}+tc_{84}d_{43} & tc_{81}d_{14} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Тоді:

$$
\begin{aligned}
&(19)_{[1,1]}, (19)_{[2,2]} : c_{23} = c_{12} = tc_{81}, && (19)_{[2,4]} : c_{14} = tc_{21}d_{14},\\
&(19)_{[1,2]} : c_{13} = tc_{82}, && (19)_{[3,4]} : c_{24} = tc_{31}d_{14},\\
&(19)_{[7,1]} : c_{72} = tc_{61}, && (19)_{[4,4]} : c_{34} = tc_{41}d_{14},\\
&(19)_{[7,2]} : c_{73} = tc_{62}, && (19)_{[5,4]} : c_{44} = tc_{51}d_{14},\\
&(19)_{[8,1]} : c_{82} = tc_{71}, && (19)_{[5,4]} : c_{54} = tc_{61}d_{14}.\\
&(19)_{[8,2]} : c_{83} = tc_{72}, && (19)_{[6,1]} : c_{62} = c_{51}\\
&(19)_{[5,1]}, (19)_{[6,2]} : c_{63} = c_{52} = c_{41}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(19)_{[4,1]}, (19)_{[5,2]}, (19)_{[6,3]} : c_{31} = c_{42} = c_{53} = tc_{61}d_{13} + tc_{51}d_{23} + tc_{41}d_{33} + tc_{64}d_{43},\\
&(19)_{[3,1]}, (19)_{[4,2]}, (19)_{[5,3]} : c_{21} = c_{32} = c_{43} = tc_{51}d_{13} + tc_{41}d_{23} + tc_{31}d_{33} + tc_{54}d_{43},\\
&(19)_{[2,1]}, (19)_{[3,2]}, (19)_{[4,3]} : c_{11} = c_{22} = c_{33} = tc_{41}d_{13} + tc_{31}d_{23} + tc_{21}d_{33} + tc_{44}d_{43},
\end{aligned}
$$

З цих рівностей, зокрема, $\overline{c_{13}} = \overline{c_{23}} = \overline{c_{33}} = \overline{c_{43}} = \overline{c_{53}} = \overline{c_{73}} = \overline{c_{83}} = 0$. З оборотності C випливає, що $\overline{c_{63}} \neq 0$. Тобто $c_{41} = c_{52} = c_{63} \in K^*$. Вилучаючи невідомі за тими ж рівностями з (19) отримуємо систему із 8 рівнянь:

$$
\begin{cases}
0 = t^2c_{41}d_{13}^2 + t^2c_{81}d_{23},\\
tc_{41} = tc_{71}d_{13} + t^2c_{61}d_{23} + t^2c_{51}d_{33} + tc_{74}d_{43},\\
t^2c_{51} = tc_{81}d_{13} + t^2c_{71}d_{23} + tc_{84}d_{43},\\
tc_{64} = tc_{71}d_{14},\\
t^2c_{71} = t^2c_{51}d_{13}^2 + 2t^2c_{41}d_{13}d_{23} + t^2c_{81}d_{33},\\
tc_{74} = tc_{81}d_{14},\\
tc_{81} = t^2c_{61}d_{13}^2 + 2t^2c_{51}d_{13}d_{23} + t^2c_{41}d_{23}^2 + 2t^2c_{41}d_{13}d_{33} + t^2c_{64}d_{13}d_{43} + t^2c_{41}d_{14}d_{43},\\
tc_{84} = t^2c_{41}d_{13}d_{14}.
\end{cases}
$$

З 2-го рівняння випливає, що $c_{41} = c_{71}d_{13} + tc_{61}d_{23} + tc_{51}d_{33} + c_{74}d_{43} + t^2c'_{41}$, з 6-го: $c_{74} = c_{81}d_{14} + t^2c'_{74}$, з 7-го: $c_{81} = tc'_{81}$, де $c'_{41}, c'_{74}, c'_{81} \in K$. Тоді $c_{41} = c_{71}d_{13} + tc_{61}d_{23} + tc_{51}d_{33} + t^2c'_{41} + d_{43}\,(t^2c'_{74} + td_{14}c'_{81}) \in K^*$

Якщо $d_{13} \in tK$ то з останньої рівності $c_{41} \in tK$, що неможливо. Якщо $d_{13} \in K^*$, то з 1-го рівняння останньої системи випливає, що $c_{41} \equiv -c_{81}d_{23}d_{13}^{-2} \pmod{tK}$. Тоді $c_{41} \equiv -tc'_{81}d_{23}d_{13}^{-2} \equiv 0 \pmod{tK}$, що неможливо. Лема доведена.

Лема 6. *Для жодного $d_{14} \in K^*$ матриця $M(t,5,8)$ не є подібна над K до матриці вигляду*

$$
\begin{pmatrix} D & B\\ 0 & A \end{pmatrix}, \text{ де } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & td_{14}\\ 1 & 0 & 0 & td_{24}\\ 0 & 1 & 0 & td_{34}\\ 0 & 0 & 1 & td_{44} \end{pmatrix}.
$$

Доведення. Без втрати загальності, можна вважати, що $t^3 = 0$. Припустимо, подібність матриць $M(t,5,8) \sim \left(\begin{smallmatrix} D & B\\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Тоді існує така матриця $C \in GL(8,K)$, що

$$C=(c_{i,j}),\ \ (i,j=1,\dots,8),\ \ C'=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34}\\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44}\\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54}\\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64}\\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74}\\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} \end{pmatrix}\ \text{ і }\ M(t,5,8)C'=C'D.$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} tc_{81} tc_{82} tc_{83} tc_{84}\\ c_{11}\ c_{12}\ c_{13}\ c_{14}\\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}\ c_{24}\\ c_{31}\ c_{32}\ c_{33}\ c_{34}\\ c_{41}\ c_{42}\ c_{43}\ c_{44}\\ c_{51}\ c_{52}\ c_{53}\ c_{54}\\ tc_{61} tc_{62} tc_{63} tc_{64}\\ tc_{71} tc_{72} tc_{73} tc_{74} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{12} & c_{13} & c_{14} & tc_{11}d_{14}+tc_{12}d_{24}+tc_{13}d_{34}+tc_{14}d_{44}\\ c_{22} & c_{23} & c_{24} & tc_{21}d_{14}+tc_{22}d_{24}+tc_{23}d_{34}+tc_{24}d_{44}\\ c_{32} & c_{33} & c_{34} & tc_{31}d_{14}+tc_{32}d_{24}+tc_{33}d_{34}+tc_{34}d_{44}\\ c_{42} & c_{43} & c_{44} & tc_{41}d_{14}+tc_{42}d_{24}+tc_{43}d_{34}+tc_{44}d_{44}\\ c_{52} & c_{53} & c_{54} & tc_{51}d_{14}+tc_{52}d_{24}+tc_{53}d_{34}+tc_{54}d_{44}\\ c_{62} & c_{63} & c_{64} & tc_{61}d_{14}+tc_{62}d_{24}+tc_{63}d_{34}+tc_{64}d_{44}\\ c_{72} & c_{73} & c_{74} & tc_{71}d_{14}+tc_{72}d_{24}+tc_{73}d_{34}+tc_{74}d_{44}\\ c_{82} & c_{83} & c_{84} & tc_{81}d_{14}+tc_{82}d_{24}+tc_{83}d_{34}+tc_{84}d_{44} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тоді:

$$\begin{aligned}
(20)_{[1,1]},(20)_{[2,2]},(20)_{[3,3]} &: c_{12}=c_{23}=c_{34}=tc_{81},\\
(20)_{[1,2]},(20)_{[2,3]} &: c_{13}=c_{24}=tc_{82},\\
(20)_{[1,3]} &: c_{14}=tc_{83},\\
(20)_{[4,1]},(20)_{[5,2]},(20)_{[6,3]} &: c_{31}=c_{42}=c_{53}=c_{64},\\
(20)_{[5,1]},(20)_{[6,2]} &: c_{41}=c_{52}=c_{63},\\
(20)_{[6,1]} &: c_{51}=c_{62},\\
(20)_{[3,1]},(20)_{[4,2]},(20)_{[5,3]},(20)_{[6,4]} &: c_{21}=c_{32}=c_{43}=c_{54}=tc_{61}d_{14}+tc_{51}d_{24}+tc_{41}d_{34}+tc_{31}d_{41},\\
(20)_{[2,1]},(20)_{[3,2]},(20)_{[4,3]},(20)_{[5,4]} &: c_{11}=c_{22}=c_{33}=c_{44}=tc_{51}d_{14}+tc_{41}d_{24}+tc_{31}d_{34}+tc_{21}d_{41},\\
(20)_{[7,1]} &: c_{72}=tc_{61}, \qquad (20)_{[8,1]}: c_{82}=tc_{71},\\
(20)_{[7,2]} &: c_{73}=tc_{62}, \qquad (20)_{[8,2]}: c_{83}=tc_{72},\\
(20)_{[7,3]} &: c_{74}=tc_{63}, \qquad (20)_{[8,3]}: c_{84}=tc_{73}.
\end{aligned}$$

З цих рівностей, зокрема, $\overline{c_{14}}=\overline{c_{24}}=\overline{c_{34}}=\overline{c_{44}}=\overline{c_{54}}=\overline{c_{74}}=\overline{c_{84}}=0$. З оборотності C випливає, що $\overline{c_{64}}\neq 0$. Тобто $c_{31}=c_{42}=c_{53}=c_{64}\in K^*$. Вилучаючи невідомі за тими ж рівностями з (20) отримуємо систему із 6 рівнянь:

$$\begin{cases}
0 = t^2c_{51}d_{14}^2+t^2c_{81}d_{24}+t^2c_{41}d_{14}d_{24}+t^2c_{31}d_{14}d_{34},\\
0 = t^2c_{61}d_{14}^2+2t^2c_{51}d_{14}d_{24}+t^2c_{41}d_{24}^2+t^2c_{81}d_{34}+t^2c_{41}d_{14}d_{34}+\\
\qquad t^2c_{31}d_{24}d_{34}+t^2c_{31}d_{14}d_{44},\\
tc_{31} = tc_{71}d_{14}+t^2c_{61}d_{24}+t^2c_{51}d_{34}+t^2c_{41}d_{44},\\
t^2c_{41} = tc_{81}d_{14}+t^2c_{71}d_{24},\\
t^2c_{71} = tc_{31}d_{14}+t^2c_{61}d_{14}d_{24}+t^2c_{51}d_{24}^2+t^2c_{51}d_{14}d_{34}+2t^2c_{41}d_{24}d_{34}+\\
\qquad t^2c_{31}d_{34}^2+t^2c_{81}d_{44}+t^2c_{31}d_{24}d_{44},\\
tc_{81} = tc_{41}d_{14}+tc_{31}d_{24}+t^2c_{61}d_{14}d_{34}+t^2c_{51}d_{24}d_{34}+t^2c_{41}d_{34}^2+t^2c_{51}d_{14}d_{44}+\\
\qquad t^2c_{41}d_{24}d_{44}+2t^2c_{31}d_{34}d_{44}.
\end{cases}$$

З 3-го рівняння випливає, що $c_{31}=c_{71}d_{14}+tc_{61}d_{24}+tc_{51}d_{34}+tc_{41}d_{44}+t^2c'_{31}$, з 6-го: $c_{81}=c_{41}d_{14}+c_{31}d_{24}+tc_{61}d_{14}d_{34}+tc_{51}d_{24}d_{34}+tc_{41}d_{34}^2+tc_{51}d_{14}d_{44}+tc_{41}d_{24}d_{44}+$

$2tc_{31}d_{34}d_{44} + t^2c'_{81}$, де $c'_{31}, c'_{81} \in K$. Тоді $c_{31} \equiv c_{71}d_{14} \pmod{tK}$ і $c_{71} \in K^*$. Вилучаючи c_{31} та c_{81} отримаємо нову систему, що містить рівняння

$$t^2c_{71} = tc_{71}d_{14}^2 + 2t^2c_{61}d_{14}d_{24} + t^2c_{51}d_{24}^2 + 2t^2c_{51}d_{14}d_{34} +$$
$$2t^2c_{41}d_{24}d_{34} + t^2c_{71}d_{14}d_{34}^2 + 2t^2c_{41}d_{14}d_{44} + 2t^2c_{71}d_{14}d_{24}d_{44}.$$

Звідси випливає, що $tc_{71}d_{14}^2 \equiv 0 \pmod{t^2K}$, що неможливо, бо c_{71}, $d_{14} \in K^*$. Лема доведена.

Теорема 3. *Нехай K — комутативне локальне кільце, радикал Джекобсона якого tK ($t \in K$, $t^2 \neq 0$). Матриця $M(t,5,8)$ незвідна над K.*

Доведення. Припустимо матриця $M(t,5,8)$ звідна над K. Тоді матриця $M(t,k,n)$ подібна (над K) до матриці $N = \left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, де D — квадратна матриця порядку m ($0 < m < n$). Очевидно, перестановкою рядків і тою ж перестановкою стовпчиків матриця $M(t,5,8)^T$ зводиться до $M(t,5,8)$. Тобто $M(t,5,8)^T$ подібна до $M(t,5,8)$. Але маємо також подібність

$$N^T = \begin{pmatrix} D^T & 0 \\ B^T & A^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ 0 & D^T \end{pmatrix}.$$

Тобто, можна вважати, що $m \leq n - m$, або $m \leq 4$. За теоремою 2, можна вважати, що D матриця вигляду (2) в якому $(k', m) \in \{(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$. В кожному з цих випадків одержуємо протиріччя з лемами 1, 2, 3, 4, 5, 6 відповідно. Теорема доведена.

Автори щиро вдячні професору В. М. Бондаренку за увагу до роботи і цінні поради.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М. О подобии матриц над кольцом классов вычетов. *Математический сборник.* Киев: «Наукова думка». 1976. С. 275–277.
2. Бондаренко В. М., Бортош М. Ю. Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем. *Укр. матем. журнал.* 2017. 69, № 7. С. 889–904.
3. Гудивок П. М., Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Матем.»* 1998. Вип. 3. С. 78–83.
4. Динис Р. Ф. Тилищак О. А. Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Матем. і інформ.».* 2012. Вип. 1(23). С. 57–62.
5. Тилищак О. А. Про незвідність мономіальних матриць 7-го порядку над локальними кільцями. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2018. Вип. № 3. С. 37–44.
6. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Reducibility and Irreducibility of Monomial Matrices over Commutative Rings. *Algebra Discret Math.* 2013. Vol. 16, No. 2. P. 171–187.

Tylyshchak A. A., Tsimbolynec R. F. Irreducibility of the one 8×8-matrix over local rings of greater then 2 length.

We consider a monomial $n \times n$-matrices of form $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{diag}[\overbrace{1, \dots, 1}^{k}, t, \dots, t]$, where k is an integer smaller than the size of the matrix over the commutative local ring with Jacobson's radical which is the principle ideal generated by the element t. It is known that for k which is not coprime to the size of the matrix all matrix are reducible. If the radical is nonzero, then all considered matrices with $k = 1$ or k per unit less than the size of the matrix are irreducible and all considered matrices of size less than 7 are irreducible if and only if k is coprime with the size of the matrix. If the degree of nilpotency of radical is 2, then the matrices $M(t, 3, 7)$, $M(t, 4, 7)$ are reducible. If the radical is not nilpotent, or the degree of nilpotency of the radical is higher than 2, then all considered matrices of order less than 8 are irreducible if and only if k is coprime with the size of matrix. It is known that $M(t, 1, 8)$, $M(t, 7, 8)$ are irreducible and $M(t, 2, 8)$, $M(t, 4, 8)$, $M(t, 6, 8)$ are reducible. The paper shows the irreducibility of the matrix $M(t, 5, 8)$. In addition, for an arbitrary commutative local ring with a non-zero radical generated by t, if the considered matrix of arbitrary size similar to $\left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, (that is, their reducibility) describes the form to which a square matrix D is similar. In this case, the order D is not less than 2 and D is similar to form with all columns contains exactly one non-zero element equal to 1 or the product of invertible element and t except possibly one, which consists of all elements of multiples t. To prove that the matrix $M(t, 5.8)$ is irreducible, it is shown that the similarity to the matrix $\left(\begin{smallmatrix} D & B \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, for 6 cases of the form D are not possible. The cases are classified by the number of units and the matrix order D from 2 to 4. It is also shown that the impossibility of similarity in other cases is reduced to considered.

Keywords: monomial matrix, irreducible matrix, 8×8-matrix, local ring, principle ideal ring, Jacobson radical.

References

1. Bondarenko, V. M. (1976). O podobii matrits nad kol'tsom klassov vychetov [On the similarity of matrices over a ring of residue classes]. *Matematicheskii Sbornik, Kyiv: Naukova Dumka*, 275–277. [in Russian]
2. Bondarenko, V. M. & Bortos, M. Y. (2017). Nerozkladni ta izomorfni ob'yekty v katehoriyi monomial'nykh matryts' nad lokal'nym kil'tsem [Indecomposable and isomorphic objects in the category of monomial matrices over a local ring]. *Ukrainian Mathematical Journal, 69(7)*, 889–904 [in Ukrainian].
3. Gudivok, P. M. & Tylyshchak, A. A. (1998). Pro nezvidni modulyarni zobrazhennya skinchennykh p-hrup nad komutatyvnymy lokal'nymy kil'tsyamy [On irreducible modular representations of finite p-groups over commutative local rings]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematic, 3*, 78–83 [in Ukrainian].
4. Dynys, R. F. & Tylyshchak, A. A. (2012). Pro zvidnist' matryts' deyakoho vyhlyadu nad komutatyvnymy lokal'nymy kil'tsyamy holovnykh idealiv [On reducibility of matrices of some type over commutative local principle ideal rings]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematic and informatic, 1 (23)*, 57–62 [in Ukrainian].
5. Tylyshchak, A. A. (2018). On irreducibility of monomial matrices of some type over commutative local principle ideal rings Pro nezvidnist' monomial'nykh matryts' 7-ho poryadku nad lokal'nymy kil'tsyamy. *Bulletin of Kyiv National University, ser. phis-math sciences, 3.* 37–44 [in Ukrainian].
6. Bondarenko, V. M., Bortos, M. Y., Dinis, R. F. & Tylyshchak, A. A. (2013). Reducibility and Irreducibility of Monomial Matrices over Commutative Rings. *Algebra Discret Math., 16(2)* 171–187.

Одержано 04.11.2019