УДК 519.7
DOI `https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).97-104`

А. Ю. Брила

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
`bryla.andrii@uzhnu.edu.ua`
ORCID: `https://orcid.org/0000-0003-2518-9877`

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ОЦІНКАМИ ТА АЛЬТЕРНАТИВНИМИ СКЛАДОВИМИ

У статті розглядається задача лексикографічно-лексикографічної багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками. Рішення приймається ґрунтуючись на скалярних критеріях, які розбито на групи. В межах кожної із груп критерії проранжовано у субординації строгого ранжування і можуть містити інтервальні оцінки. Групи критеріїв також проранжовано у субординації строгого ранжування. Інтервальні оцінки визначено таким чином, що центр інтервалу представляє очікуване значення параметра, а ширина інтервалу відображає його невизначеність. При порівнянні двох альтернатив використовується правило віддачі переваги, згідно з яким перевагу має та альтернатива, для якої або центр інтервалу (очікуване значення) є більшим, або ж при рівних центрах інтервалу є меншою ширина інтервалу (меншою є невизначеність).

Постановка даної задачі може містити обмеження допустимості на деякі із критеріїв. Ці обмеження виражають мінімальну межу, за якої даний критерій ще становить цінність для особи що приймає рішення. Порушення цієї межі означає, що прийняття рішення за даним критерієм є неприйнятним, а отже, даний критерій повинен бути виключений із подальшого розгляду. Множина допустимих розв'язків задається системою лінійних обмежень, які також можуть містити інтервальні оцінки. Інтервальні оцінки можуть бути присутні як коефіцієнти при невідомих, так і у векторі обмежень. Подібні обмеження допустимості можуть бути накладені і на цілі групи критеріїв.

Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід, який ґрунтується на зведенні її до задачі скалярної оптимізації. На першому кроці розглядувана задача лексикографічно-лексикографічної багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими зводиться до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями без інтервальних оцінок. На другому кроці дана задача може бути зведена до лінійної задачі лексикографічної оптимізації, яка у свою чергу може бути зведена до звичайної задачі лінійного програмування. Перехід від задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями і у подальшому до задачі скалярної оптимізації є можливим завдяки використанню зваженої суми критеріїв з відповідними коефіцієнтами. З використанням зваженої суми і відповідних коефіцієнтів вдається також врахувати і обмеження допустимості.

Ключові слова: задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації, інтервальні коефіцієнти, альтернативні критерії.

1. Вступ. Переважна більшість задач прийняття рішень є багатокритеріальними. До того ж, як правило, існує складна система відношень між самими критеріями, з використанням яких здійснюється вибір. Прийняття рішень також ускладнюється тим, що оцінки альтернатив не можуть бути описані за допомогою засобів чіткої оптимізації у зв'язку з невизначеністю ознак, що впливають на кінцеве рішення. Тому на практиці часто у таких випадках застосовують засоби нечіткої оптимізації. Зокрема, широко поширеними є випадки, коли параметри, що описують досліджувану модель, можуть бути представлені за допомогою інтервальних оцінок. У роботі ми будемо вважати, що центр інтервалу представляє очікуване значення, а ширина інтервалу відображає невизначеність значення параметра [1-5]. При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати правило віддачі переваги, що запропоновано у [6]. Такий підхід дозволяє здійснювати порівняння інтервалів стосовно відношення прийнятності. Це означає, що при рівному очікуваному значенні віддаватимемо перевагу тій альтернативі, для якої значення невизначеності параметра є меншою.

Розглянемо задачу прийняття рішень, у якій множину критеріїв розбито на групи. В межах кожної із груп критерії є строго проранжовано за важливістю, часткові критерії та обмеження є лінійними і можуть містити інтервальні коефіцієнти. Групи ж критеріїв також проранжовано у субординації строгого ранжування. На деякі із часткових критеріїв та деякі групи критеріїв може бути накладено умови допустимості. Дані припущення ускладнюють задачу прийняття рішень, оскільки не дозволяють використовувати для її розв'язання відомі методи чіткої багатокритеріальної оптимізації.

У роботі для розв'язання розглядуваної задачі застосовано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями, аналогічний до [3]. Для врахування обмежень допустимості критеріїв використано підхід, аналогічний до [7-11]. Таким чином, дану задачу можна звести до задачі лексикографічної оптимізації, яка в свою чергу може бути зведена до задачі скалярної оптимізації.

2. Правило порівняння інтервальних оцінок. Інтервальні оцінки розглядуваної задачі прийняття рішень характеризуються за допомогою пари чисел

$$A = \langle a_C, a_W \rangle ,$$

де $a_C \in \mathbf{R}$ є центром інтервалу $a_W \in \mathbf{R}$ є шириною інтервалу. Центр інтервалу характеризує очікуване значення параметру, а ширина інтервалу відображає міру невизначеності параметру [6].

Будемо використовувати звичні операції інтервальної арифметики [1-5].

Нехай $A = \langle a_C, a_W \rangle$, $B = \langle b_C, b_W \rangle$, тоді

$$A + B = \langle a_C, a_W \rangle + \langle b_C, b_W \rangle = \langle a_C + b_C, a_W + b_W \rangle , \tag{1}$$

$$kA = k \langle a_C, a_W \rangle = \langle ka_C, |k|\, a_W \rangle$$

Вважатимемо, що усі змінні є невід'ємними цілими числами, тому попередню операцію можна записати так

$$kA = k \langle a_C, a_W \rangle = \langle ka_C, ka_W \rangle . \tag{2}$$

При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати правило, запропоноване Hu і Wang [6].

Означення 1. *Для будь-яких двох інтервальних оцінок* $A = \langle a_C, a_W \rangle$ *і* $B = \langle b_C, b_W \rangle$

$$A \prec_= B, \quad \textit{якщо} \quad \begin{cases} a_C < b_C \ for \ a_C \neq b_C \\ a_W \geq b_W \ for \ a_C = b_C \end{cases}. \tag{3}$$

$$A = B, \quad \textit{якщо} \quad \begin{cases} a_C = b_C \\ a_W = b_W \end{cases}. \tag{4}$$

$$A \prec B, \quad \textit{якщо} \quad A \prec_= B \quad \textit{і} \quad A \neq B.$$

Відношення $A \prec_= B$ означає, що A є менш прийнятною ніж B. Очевидно, що у випадку, коли центри інтервалів є рівними, то особа, що приймає рішення надасть перевагу інтервалу з меншою мірою невизначеності (меншою шириною інтервалу).

3. Лексикографічно-лексикографічна багатокритеріальна задача оптимізації з інтервальними оцінками. Розглянемо задачу оптимізації, у якій коефіцієнти є інтервальними оцінками:

$$\max{}^{LL} S(x) = (s_1(x), s_2(x), \ldots, s_p(x)), \tag{5}$$

з обмеженнями

$$G_i(x) \prec_= B_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

$$x \in D \subset \mathbf{Z}^n. \tag{8}$$

Де

$$s_i(x) = (f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{iq_i}), \ i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$f_{ij}(x) = F_{ij1}x_1 + F_{ij2}x_2 + \ldots + F_{ijn}x_n, \ j = 1, 2, \ldots, q_i, \ i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$G_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \ldots + A_{in}x_n, \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$F_{ijk} = \langle f_{ijkC}, f_{ijkW} \rangle, \ A_{ij} = \langle a_{ijC}, a_{ijW} \rangle, \ B_i = \langle b_{iC}, b_{iW} \rangle,$$

$D \subset Z^n$ задає множину можливих значень для цілочислових змінних задачі. Позначимо множину допустимих розв'язків, що задається за допомогою обмежень (6)-(8) як X.

У даній задачі оптимізації при попарному порівнянні альтернатив за частковими критеріями використовуватимемо правило віддачі переваги, що задається означенням 1.

Означення 2. Для двох альтернатив $x, y \in X$ виконується співвідношення

$$S(x) \prec_=^{LL} S(y),$$

якщо існує таке k, $1 \leq k \leq q$, що

$$s_k(x) \prec_=^{L} s_k(y)$$

і, якщо $k > 1$, то

$$s_i(x) = s_i(y), \ i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Дамо означення оптимального розв'язку у задачі (5)-(8).

Означення 3. Допустимий розв'язок $x^* \in X$ є *оптимальним (непокращуваним) розв'язком*, якщо

$$S\left(x\right) \prec_{=}^{LL} S\left(x^*\right) \;\; \textit{для всякого } x \in X.$$

Згідно з [7-11] дана задача може бути зведена до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями

$$max^{LL}\ \bar{S}(x) = \left(\bar{f}_{11}\left(x\right), \bar{f}_{12}\left(x\right), \ldots, \bar{f}_{1q_1}(x), \ldots, \bar{f}_{p1}\left(x\right), \bar{f}_{p2}\left(x\right), \ldots, \bar{f}_{pq_p}\ \right) \tag{9}$$

з обмеженнями

$$\overline{G}_i\left(x\right) \leq^L \overline{B}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

$$x \geq 0, x \in D \subset \mathbf{Z}^n. \tag{11}$$

Де

$$\bar{f}_{ij}\left(x\right) = \left(F_{ijC}\left(x\right), -F_{ijW}\left(x\right)\right), i = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2,\ \ldots,\ q_i,$$

$$F_{ijC}\left(x\right) = f_{ij1\mathrm{C}}x_1 + f_{ij2C}x_2 + \ldots + f_{ijnC}x_n,$$

$$F_{ijW}\left(x\right) = f_{ij1W}x_1 + f_{ij2W}x_2 + \ldots + f_{ijnW}x_n,$$

$$\overline{G}_i\left(x\right) = \left(\overline{G}_{iC}\left(x\right), -\overline{G}_{iW}\left(x\right)\right),$$

$$\overline{G}_{iC}\left(x\right) = a_{i1C}x_1 + a_{i2C}x_2 + \ldots + a_{inC}x_n,$$

$$\overline{G}_{iW}\left(x\right) = a_{i1W}x_1 + a_{i2W}x_2 + \ldots + a_{inW}x_n,$$

$$\overline{B}_i = \left(b_{iC}, -b_{iW}\right).$$

Таким чином, при заданому способі задання і порівняння інтервальних оцінок можемо звести лексикографічну задачу багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до цілочислової багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями.

У свою чергу, задача (9)-(11), використовуючи міркування аналогічні до [7], може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації

$$\max^L\ l\left(x\right), \tag{12}$$

з обмеженнями

$$g_i\left(x\right) \leq b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{13}$$

$$x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n. \tag{14}$$

де

$$l\left(x\right) = \Big(F_{11C}, -F_{11W}, F_{12C}, -F_{12W}, \ldots, F_{pq_pC}, -F_{pq_pW}\Big),$$

$$g_i\left(x\right) = \alpha_{i1}\overline{G}_{iC}\left(x\right) - \alpha_{i2}\overline{G}_{iW},$$

$$b_i = \alpha_{i1}b_{iC} - \alpha_{i2}b_{iW},$$

Коефіцієнти α_{i1}, α_{i2} $(1 \leq i \leq m)$ можуть бути знайдені згідно з [11].

Використовуючи міркування аналогічні до [8], задача (12)-(14) може бути зведена до задачі зі скалярним критерієм.

4. Лексикографічно-лексикографічна багатокритеріальна задача оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими. Розглянемо модифікацію задачі (5)-(8), у якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$m_{ik} \prec_{=} f_{ik}\left(x\right), m_{ik} = \left\langle m_{ikC}, m_{ikW} \right\rangle, i \in \left\{1, 2, \ldots, p\right\}, k \in \left\{1, 2, \ldots, q_i\right\}. \tag{15}$$

Такий критерій вважаємо допустимим. А задачу знаходження непокращуваного розв'язку у такій задачі – задачею лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими.

Використовуючи міркування аналогічні до [7], можна знайти відповідні коефіцієнти, що обмеження (15) може бути зведено до обмежень

$$\overline{m}_{ik} \leq \phi_{ik}\left(x\right), i \in \left\{1, 2, \ldots, p\right\},\ k \in \left\{1, 2, \ldots, q_i\right\}, \tag{16}$$

де

$$\phi_{ik}\left(x\right) = \gamma_{ik1} F_{ikC} + \gamma_{ik2}\left(-F_{ikW}\right),$$

$$\overline{m}_{ik} = \zeta_{ik1} m_{ikC} - \zeta_{ik2} m_{ikW}.$$

З врахуванням обмежень (16) задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими може бути зведена до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями (без інтервальних оцінок). Аналогічно до [11] дана задача може бути зведена до задачі скалярної оптимізації.

$$\max R\left(x\right) = \bar{\beta}_{11}\left(\gamma_{111} F_{11C} + \gamma_{112}\left(-F_{11W}\right)\right) + \ldots + \bar{\beta}_{pq_p}\left(\gamma_{pq_p1} F_{pq_p\ C} + \gamma_{pq_p2}\left(-F_{pq_pW}\right)\right), \tag{17}$$

з обмеженнями

$$g_i\left(x\right) \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{18}$$

$$\overline{m}_{ik} y_{ik} \leq \phi_{ik}\left(x\right), i \in \left\{1, 2, \ldots, p\right\},\ k \in \left\{1, 2, \ldots, q_i\right\}, \tag{19}$$

$$\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ik} y_{ik}, i = 1, 2, \ldots, p,\ k = 1, 2, \ldots, q_i, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q_i} y_{ik} = 1, \tag{21}$$

$$y_{ik} \in \left\{0, 1\right\}, i = 1, 2, \ldots, p,\ k = 1, 2, \ldots, q_i. \tag{22}$$

$$x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n. \tag{23}$$

Якщо у задачі лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору d, $d \geq 1$ допустимих критеріїв, то обмеження (21) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q_i} y_{ik} = d.$$

5. Висновки. У роботі розглянуто задачу прийняття рішень, у якій критерії розбито на групи. В межах кожної із груп критерії проранжовано у субординації строгого ранжування, групи також проранжовано у суборидннації строгого ранжування. Критерії та обмеження можуть містити інтервальні оцінки та на деякі із критеріїв може бути накладено умови допустимості. Для сформульованої задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими запропоновано підхід, що дозволяє звести дану задачу до задачі лексикографічної оптимізації без інтервальних оцінок та альтернативних складових, яка у свою чергу може бути зведена до скалярної задачі оптимізації. Перевагою такого підходу є можливість застосування відомих методів лексикографічної оптимізації [11-13].

Список використаної літератури

1. Lodwick W. A. Interval and fuzzy analysis: A unified approach. *Advances in imaging and electron physics.* Elsevier Press, 2007. Vol. 148. P. 75–192. DOI: https://doi.org/10.1016/S1076-5670(07)48002-8
2. Lodwick W. A., Neumaier A., Newman F. Optimization under uncertainty: methods & applications in radiation therapy. *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems.* Melbourne, Australia: IEEE, 2001. Vol. 3. P. 1219-–1222. DOI: https://doi.org/10.1109/FUZZ.2001.1008877
3. Moore R. E. Methods and applications of interval analysis. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979. 190 P. DOI: https://doi.org/10.1137/1.9781611970906
4. Bellman R. E., Zadeh L. A. Decision-making in fuzzy environment. *Management Science.* 1970. Vol. 17, Issue 4. P. 141–160. DOI: https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141
5. Karmakar S., Bhunia A. K. An alternative optimization technique for interval objective constrained optimization problems via multiobjective programming. *Journal of the Egyptian Mathematical Society.* 2014. Vol. 22, Issue 2. P. 292–303. DOI: https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.07.002
6. Hu B. Q., Wang S. A novel approach in uncertain programming Part I: New arithmetic and order relation for interval numbers. *Journal of Industrial & Management Optimization.* 2006. Vol. 2, Issue 4. P. 351–371. DOI: https://doi.org/10.3934/jimo.2006.2.351
7. Bryla A. On Solving an optimization problem with interval coefficients. *Optimization Methods and Applications.* Cham: Springer, 2017. P. 57–74. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_4
8. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* 2011. №4. С. 68–72.
9. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. і інформ.* 2018. Вип. 1(32). С. 54—60.
10. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 5. С. 135–138.
11. Брила А.Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками та альтернативними складовими.*Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. і інформ.* 2019. Вип. 1(34). С. 60—68.
12. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгород. нац. ун т, 2002. 312 с.
13. Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. Радио, 1975. 115 с.
14. Freuder E. C., Heffernan R., Wallace R. J., Wilson N. Lexicographically-ordered constraint satisfaction problems. *Constraints.* 2010. Vol. 15, Issue 1. P. 1–28. DOI: https://doi.org/10.1007/s10601-009-9069-0

Bryla A. Y. On solving a Lexicographic-Lexicographical Optimization Problem with interval coefficients and alternative criteria.

In this paper, a lexicographic-lexicographical multicriteria optimization problem with interval coefficients is considered. Decisions are making based on scalar criteria which are divided into groups. In each group, criteria are ranked in strictly ranked subordination and may contain interval coefficients. Groups of criteria also are ranked in strictly ranked subordination. Interval coefficients are defined so that the center of the interval represents the expected value of the parameter, and the width of the interval reflects its uncertainty. When comparing two alternatives, an advantage rule is used, according to which better is an alternative for which either the center of the interval (the expected value) is greater, or intervals centers are equal and interval width is smaller (is less uncertainty).

In the considered problem, for some of the criteria and groups of criteria may be set admissibility limits. These restrictions represent the minimum threshold for which this criterion is still valuable to the decision-maker. Violation of this limit means that the decision on this criterion is unacceptable, and therefore this criterion should be excluded from further consideration. The feasible set is defined by a system of linear constraints, which may also contain interval coefficients.

To solve this problem an approach of reducing the problem to the scalar optimization problem was proposed. In the first step, the lexicographic-lexicographical multicriteria optimization problem with interval coefficients can be reduced to a lexicographic-lexicographical optimization problem with lexicographic constraints without interval coefficients. In the second step, this problem can be reduced to a linear problem of lexicographic optimization, which in turn can be reduced to the linear programming problem. The reduction from the lexicographic-lexicographical optimization problem with interval coefficients to the lexicographic-lexicographical optimization problem with lexicographic constraints and in the future to the problem of scalar optimization is possible due to using a weighted sum of criteria with the corresponding coefficients. Using the weighted sum and corresponding coefficients it is possible to take into account the limitation of admissibility of criteria.

Keywords: Lexicographic-Lexicographical Optimization Problem, interval coefficients, alternative criteria.

References

1. Lodwick, W. A. (2007). Interval and fuzzy analysis: A unified approach. *Advances in imaging and electron physics, 148*, 75–192. https://doi.org/10.1016/S1076-5670(07)48002-8
2. Lodwick, W., Newman, F., & Neumaier, A. (2001). Optimization under uncertainty: Methods and applications in radiation therapy. In *10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 3*, 1219–1222. IEEE. https://doi.org/10.1109/FUZZ.2001.1008877
3. Moore, R. E. (1979). Methods and applications of interval analysis. *Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1137/1.9781611970906
4. Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science, 17(4)*, 141–160. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141
5. Karmakar, S., & Bhunia, A. K. (2014). An alternative optimization technique for interval objective constrained optimization problems via multiobjective programming. *Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22(2)*, 292–303. https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.07.002
6. Hu, B. Q., & Wang, S. (2006). A novel approach in uncertain programming Part I: New arithmetic and order relation for interval numbers. *Journal of Industrial & Management Optimization, 2(4)*, 351–371. https://doi.org/10.3934/jimo.2006.2.351
7. Bryla, A. Yu. (2017). On Solving an Optimization Problem with Interval Coefficients. In *Optimization Methods and Applications*. 57–74. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_4
8. Bryla, A. (2011). Dostizhimost optimalnyh reshenij linejnoj zadachi mnogokriterialnoj optimizacii s alternativnymi kriteriyami v tranzitivnoj subordinacii [Achievability of optimal solutions of the linear problem of multicriteria optimization with alternative criteria in transitive subordination]. *Problemy upravleniya i informatiki, 4,* 68–72 [in Russian].

9. Bryla, A. Yu. (2018). On lexicographic optimization problem with interval parameters. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1(32)*. 54–60 [in Ukrainian].
10. Bryla, A. Yu. (2019). On lexicographic optimization problem with interval parameters and alternative criteria. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1(34)*. 60–68 [in Ukrainian].
11. Bryla, A. Yu. (2008). Dostizhimost optimalnyh reshenij linejnoj zadachi mnogokriterialnoj optimizacii po vzveshennoj summe kriteriev raznoj vazhnosti v tranzitivnoj subordinacii [Achievement of optimal solutions of the linear problem of multicriteria optimization on a weighted sum of criteria of different importance in transitive subordination]. *Cybernetics and system analysis, 5*, 135–138 [in Russian].
12. Chervak, Yu. Yu. (2002). Optymizaciya. Nepokrashuvanij vybir [Optimization. Unbeatable selection]. Uzhhorod [in Ukrainian].
13. Podinovskij, V. V., & Gavrilov, V. M. (1975). Optimizaciya po posledovatelno primenyaemym kriteriyam [Optimization by successive criteria]. *Moscow, Soviet Radio* [in Russian].
14. Freuder, E. C., Heffernan, R., Wallace, R. J., & Wilson, N. (2010). Lexicographically-ordered constraint satisfaction problems. *Constraints, 15(1)*, 1–28. https://doi.org/10.1007/s10601-009-9069-0

Одержано 26.10.2019