

УДК 519.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).73-84](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).73-84)**Л. Ф. Гуляницький¹, А. А. Коткова²**

¹ Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ,
завідувач відділу,

доктор технічних наук, старший науковий співробітник

leonhul.icyb@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>

² НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ,
магістрант

kotkova.anhelina@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4163-1442>

ДО КЛАСИФІКАЦІЇ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Суть розглянутих задач полягає у розробці маршрутів для групи гетерогенних транспортних засобів, які базуються у певному місці чи місцях (депо) і мають доставити товари клієнтам згідно їх обсягами замовлень. Класична задача маршрутизації транспортних засобів відноситься до задач комбінаторної оптимізації, які можна подати у вигляді графу, у якого множина вершин відображає як депо, так і точки доставки, тобто клієнтів, а множина ребер відповідає шляхам. У цій задачі вважаються заданими: матриця ваг ребер між вершинами, що визначаються вартостями/довжинами шляхів; кількість транспортних засобів, задіяних у доставці товару; обсяги товару, що має постачатися клієнтам у кожному пункту доставки.

Актуальність задачі маршрутизації транспортних засобів спричинила появу багаточисельних її досліджень, які проводилися протягом останніх десятиліть, та відповідних публікацій. При формуванні наведеного в статті переліку наукових публікацій автори не ставили мету подати історичний ракурс дослідження маршрутизації транспортних засобів (він досить повно відображається в більшості робіт), а надавали перевагу публікаціям останніх років, які дають картину актуальних нині досліджень.

У більшості реальних задач маршрутизації транспортних засобів присутні додаткові обмеження, що породжують цілий спектр нових задач. У роботі наведено низку класів задач маршрутизації транспортних засобів. Основним обмеженням є вантажопідйомність, а критерієм – загальна вартість перевезень. У задачах маршрутизації з часовими обмеженнями або «часовими вікнами» мінімізація загальної вартості перевезень поєднується з мінімізацією кількості задіяних транспортних засобів та загального часу очікування клієнтами транспортних засобів. Мінімізація вартості перевезень і розміру парку залучених транспортних засобів може відбуватися і у випадку, коли ці транспортні засоби вирушають із декількох депо, причому як старт, так і завершення маршруту може відбуватися не у фіксованих, а із/в альтернативних, зокрема, динамічних депо. Розглядаються також проблеми маршрутизації за можливості поверненням і доставкою товарів, маршрутизація з двовимірними обмеженнями завантаження транспортних засобів, максимізація заощаджень від перевезення товару, з різними видами транспорту, періодична маршрутизація, з випадковими даними, з можливістю дозавантаження з дотриманням заданого терміну доставляння. Для кожного типу задач наведено додаткові обмеження, що відрізняють їх від класичної задачі.

Ключові слова: оптимізація маршрутів, транспортні засоби, логістика, мультидепо, математична модель, комбінаторна оптимізація.

1. Вступ. Економіка завжди була основним акцентом у плануванні діяльності будь-якої компанії, фірми чи підприємства. Логістика не є винятком із

цього правила, що робить дослідження її проблем одним із найбільш досліджуваних напрямів. Оптимізація в економічних процесах є основою розвитку промисловості та економіки будь-якої країни. Ефективний розподіл і використання транспортних засобів та пов'язаних з цим витрат і експлуатаційних обмежень може забезпечити безпечно й стійке майбутнє країни за рахунок економії матеріальних та людських ресурсів.

Задачі маршрутизації транспорту є ключовими задачами в галузі транспортних перевезень. У багатьох сферах транспортної логістики доставка товару може збільшувати його вартість на величину, порівнювану з вартістю самого товару. Тому використання методів оптимізації доставки товару може суттєво зекономити витрати на обслуговування користувачів і, таким чином, зменшити собівартість товару. Однією з ключових функцій систем підтримки прийняття рішень у галузі транспортної логістики є можливість розрахунку й побудови ефективних маршрутів з точки зору вартості об'їзду замовників транспортних засобів різного призначення з урахуванням потреб споживачів послуги [1].

2. Формулювання проблеми. Суть досліджуваних задач полягає у розробці маршрутів для групи гетерогенних транспортних засобів, які базуються у певному місці чи місцях (депо) і мають доставити товари клієнтам згідно їх обсягами замовлень та з урахуванням ряду обмежень. Задачі маршрутизації транспортних засобів (ЗМТЗ, Vehicle Routing Problem, VRP) – це загальна назва великого класу задач комбінаторної оптимізації [1-3]. Мета: знайти множину маршрутів для обслуговування клієнтів певною кількістю транспортних засобів у заданому середовищі. Класична ЗМТЗ визначається набором клієнтів, яких потрібно обслужити, місця їх розміщення та їх вимоги, а також іншою первинною інформацією, такою як відстань між двома покупцями, відстань між кожним клієнтом та депо, кількість транспортних засобів та їх вантажопідйомність.

Класична задача маршрутизації транспортних засобів відноситься до задач комбінаторної оптимізації [4], які можна подати у вигляді графу $G(V, E)$, де

$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ – множина вершин (v_0 – депо, v_1, \dots, v_n – точки доставки, клієнти);

E – множина ребер $\{(v_i, v_j) | i \neq j\}$, що відповідають шляхам;

C – матриця ваг ребер c_{ij} між вершинами. Ваги ребер – це вартості шляхів;

m – кількість транспортних засобів, задіяних у доставці товару;

R_i – маршрут i -го транспортного засобу ($i = \overline{1, m}$);

$C(R_i)$ – вартість маршруту R_i ;

q_i – обсяг товару, що має постачатися в i -ту точку доставки.

Кожній вершині v_i ставиться у відповідність деяка кількість товарів, які мають бути доставлені клієнтам у відповідну точку доставки. Задача маршрутизації полягає у визначенні такої множини маршрутів мінімальної вартості (відповідно до величини m – кількості транспортних засобів), щоб кожна вершина була відвідана транспортним засобом тільки один раз. Крім того, усі маршрути повинні починатися й закінчуватися в депо v_0 .

Розв'язком задачі є розбиття множини V на підмножини (маршрути) і задавання порядку обходу вершин на кожній підмножині (перестановка вершин маршруту). Розв'язок задачі є допустимим, якщо всі маршрути задовольняють додатковим обмеженням задачі. Цільовою функцією є сумарна вартість пере-

везень:

$$F_{vrrp} = \sum_{i=1}^m \sum C(R_i),$$

де $C(R_i)$ – сума вартостей шляхів (вага ребер) маршруту R_i .

У класичному варіанті потрібно знайти допустимий розв'язок з мінімальною такою вартістю. Зазвичай у реальних ЗМТЗ виникає низка додаткових обмежень, які і породжують цілий спектр таких задач. Розглянемо найбільш поширені ЗМТЗ, доповнюючи наведені, наприклад, у [1,5].

3. Маршрутизація з обмеженням по вантажопідйомності (Saturated VRP, CVRP) [6]. У задачах цього типу вводиться додаткове обмеження: маса товарів на кожному маршруті R_i не повинна перевищувати заданої величини Q_i (по суті, це вантажопідйомність транспортних засобів). Ціль задачі: мінімізувати загальну вартість перевезень.

Поширеною підходом до постановки задачі CVRP у міській логістиці є стратегія багатоешелонного розподілу (2E-CVRP), у якій вантажі доставляються клієнтам через проміжні склади, а не використовують прямі поставки [7]. У такій задачі враховуються типи транспортних засобів, пройдений шлях, швидкість руху транспортних засобів, навантаження.

Для розв'язування задач типу CVRP запропоновано використовувати декілька алгоритмів, серед яких алгоритм інтелектуальних крапель (improved intelligent water drops algorithm, IIWDA); алгоритм зозуль (advanced cuckoo search algorithm, ACSA); гібридний алгоритм локального пошуку (local search hybrid algorithm, LSHA); гібридний алгоритм з постоптимізацією (post-optimization hybrid algorithm, POHA) [8].

4. Маршрутизація з часовими обмеженнями або «часовими вікнами» (VRP with Time Windows, VRPTW) [9]. Ця задача є подібною до VRP з однією додатковою умовою: у точку v_i можна доставити товар тільки в деякий заданий проміжок часу, визначений як інтервал $[e_i, l_i]$.

У задачах даного типу додаються наступні умови та обмеження:

- 1) розв'язок недопустимий, якщо товар був доставлений у точку доставки після верхньої часової границі;
- 2) транспортний засіб, що прибув раніше нижньої часової границі, очікує;
- 3) як варіант, при запізненні транспортного засобу, розв'язок залишається допустимим, але накладаються деякі штрафні санкції.

Ціль задачі: мінімізувати загальну вартість перевезень, розмір парку транспортних засобів, загальний час очікування транспортних засобів.

Отримавши розв'язок VRPTW можна визначити час виїзду транспортних засобів з депо i , таким чином, уникнути їх простоїв.

Подальший розвиток для задачі VRPTW представлено вирішенням задачі маршрутизації транспортного засобу за допомогою зворотних передач та часових вікон (VRP with Backhauls and Time Windows, VRPBW). Ця задача включає в себе вантажопідйомність, повернення товарів, часові вікна та розв'язується за допомогою гібридного метаевристичного алгоритму. Метою є мінімізація загальної відстані перевезень [10].

Ще однією задачею є VRP з м'якими часовими вікнами для декількох типів транспортних засобів з контролем забруднення навколишнього середовища від перевезень. Метою є дослідження взаємозв'язку між вартістю розподілу, задоволеністю споживачів та забрудненістю навколишнього середовища. Для вирішення такої задачі розроблено гібридний генетичний алгоритм, результати якого показують, що швидкість транспортного засобу має сильну кореляцію з експлуатаційними витратами та забрудненням навколишнього середовища, тоді як вантажопідйомність впливає на експлуатаційні витрати, задоволеність споживачів та забруднення навколишнього середовища [11].

5. Маршрутизація з кількома депо (Multiple Depot VRP, MDVRP) . [12-20]. Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: кожен маршрут повинен задовольняти стандартним обмеженням VRP, а також починатись і закінчуватись в одному і тому ж депо. Вартість маршруту, зазвичай, розраховується як і в класичному варіанті VRP.

У деяких випадках може бути кілька депо, які обслуговують клієнтів. Якщо клієнти зосереджені біля кожного депо, то задача може бути розбита на кілька незалежних задач. Проте, якщо клієнти і депо розташовані довільним чином, то потрібно шукати розв'язок задачі маршрутизації транспорту з кількома депо (MDVRP).

Ця задача потребує розподілення клієнтів по різним депо. У кожному депо є свій парк транспортних засобів. Кожен транспортний засіб виїжджає зі свого депо, обслуговує клієнтів, що закріплені за депо, і потім повертається назад [13, 14]. У [21] розглядається варіант задачі з депо різних типів.

Найчастіше для розв'язування задач такого типу використовують генетичні алгоритми [22], гібридні генетичні алгоритми, наприклад, із адаптивним локальним пошуком за допомогою часових вікон [23] та алгоритми пошуку мініливого сусідства [24].

6. Маршрутизація з альтернативними динамічними депо (VRP with Alternative Dynamic Depots, VRPADD) . [25, 26]. Специфіка прикладних задач, які розв'язуються, може вносити корективи до тлумачення як терміну «вартість перевезень», так і «транспортний засіб». Зокрема, окремий напрям подібних проблем, який бурхливо розвивається в останні роки, є розробка моделей та алгоритмів розв'язування задач маршрутизації, де в якості транспортних засобів виступають безпілотні авіаційні чи інші рухомі роботизовані системи. Найновіші розробки сприяють виникненню задач, у яких ці апарати можуть стартувати із рухомих депо та фінішувати в низці рухомих депо [25, 27]. Такі задачі актуальні, наприклад, у військовій сфері та сфері морської діяльності.

При оптимізації маршрутів у цьому випадку вантажопідйомність може не грату ключову роль (наприклад, при аерофотозніманні), але більш суттєве значення мають обмеження на ресурс системи – обсяг пального чи ємність акумулятора.

7. Маршрутизація з поверненням і доставкою товарів (VRP with Pick-Ups and Deliveries, VRPPD) . [28, 29]. Задача маршрутизації з можливістю повернення і доставки товарів розширює стандартну VRP тим, що клієнти в точках доставки можуть повертати деяку кількість товару назад в депо. Таким чином, потрібно бути впевненим, що товари, які хоче повернути клієнт,

не будуть перевантажувати транспортний засіб. Це обмеження робить планування задачі більш складним і може призвести до неефективного використання транспорту, збільшення вартості маршрутів і загальної кількості транспортних засобів в депо.

Для простоти зазвичай розглядають задачі з додатковими обмеженнями. Наприклад, доставка товарів відбувається тільки до точок доставки, а повернення – тільки в депо, тобто немає обміну товарами між точками доставки. Інший спосіб спрощення полягає у відміні обмеження, що всі точки доставки можуть бути відвідані лише один раз. Існує також ще один спосіб – покласти, що транспортний засіб спочатку розвозить усі товари, а лише потім починає забирати товар з точок доставки (VRP with Backhauls, VRPB, що описана нижче).

Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: кількість товару, який потрібно доставити до клієнтів, і товару, який потрібно забрати від клієнтів, не повинна перевищувати вантажопідйомність транспортного засобу в жодній точці маршруту.

Однією зі складних задач VRPPD є задача маршрутизації транспортних засобів з гетерогенним флотом, змішаним поверненням та часовими вікнами (HVRPMBTW) [30]. Ця задача характеризується обмеженою кількістю транспортних засобів, різною місткістю та витратами.

8. Маршрутизація з двовимірними обмеженнями завантаження транспортних засобів (VRP with Simultaneous Pick-ups, Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints, 2L-SPD). 2L-SPD належить до класу складних задач оптимізації маршрутизації та упаковки.

Попит клієнта в такій задачі – це набір двовимірних, прямокутних, завантажених елементів. Мета полягає в розробці маршрутного набору мінімальних витрат для однорідного парку транспортних засобів, починаючи і закінчуючи в центральному депо, щоб обслуговувати всіх замовників. Усі товари, упаковані в один транспортний засіб, повинні задовольняти двовимірним ортогональним обмеженням упаковки [31].

Однією з таких геометричних задач є маршрутизація транспортних засобів із одночасними поверненнями та доставками предметів, що не складаються та мають двовимірні обмеження на завантаження. Основним обмеженням на завантаження є те, що для кожної дуги, пройденої в плані маршруту, повинні бути визначені можливі схеми завантаження. Досліджено, що одночасне обслуговування повернення та доставки може призвести до значних заощаджень [32].

9. Маршрутизація з поверненням товарів (VRP with Backhauls, VRPB) [33, 34]. Задачі маршрутизації з поверненням товарів (VRPB) є розширенням VRP, в якому клієнти можуть як замовити, так і повернути деякі товари. В задачі з доставкою і поверненням (VRPPD) необхідно враховувати, що всі товари, які повернуть клієнти, повинні поміститися в транспортному засобі. Відмінність від VRPPD полягає в тому, що всі товари повинні бути доставлені перш, ніж відбудеться будь-яке повернення товарів. Передумовою виникнення цієї вимоги є факт, що більшість транспортних засобів зазвичай завантажуються ззаду або зверху, утворюючи стек. Тому перестановка вантажу під час кожної доставки не є економічно вигідною та прийнятною. Кількість товару, яку необхідно доставити й прийняти, відома перед початком планування.

Ціль задачі: мінімізувати вартості перевезень. Обмеження: повернення від-

бувається лише після того, як була завершена доставка. Об'єм товарів не повинен перевищувати вантажопідйомності транспортного засобу в жодній точці маршруту.

10. Маршрутизація з різним транспортом (Split Delivery VRP, SDVRP) [35, 36]. Цей вид задачі розширює VRP, дозволяючи обслуговувати одну точку доставки різними транспортними засобами, якщо це зменшує загальну вартість перевезень. Цей випадок є типовим для ситуації, коли об'єм замовленого товару є великим, і порівнюваним з вантажопідйомністю транспортного засобу.

Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: на відміну від класичної VRP, у задачах SDVRP знімається обмеження, що клієнт може обслуговуватись лише одним транспортним засобом.

Розширенням SDVRP може бути задача маршрутизації транспортних засобів з роздвоєною доставкою, орієнтована на клієнта (CMVRPSD). Метою такої задачі є мінімізація загального часу очікування клієнтів при розподілі декількох видів товарів кількома ємнісними транспортними засобами. Передбачається, що вимогу замовника може задовольнити більше, ніж один транспортний засіб. У цій задачі беруть участь два класи рішень: маршрутизація транспортних засобів до клієнтів та кількісна оцінка товару для завантаження та вивантаження [37].

11. Періодична маршрутизація (Periodic VRP, PVRP) [38]. У класичній задачі VRP звичайний період планування – один день. У задачах з періодичною маршрутизацією VRP узагальнюється розширенням періоду планування до кількох днів.

Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: ті ж самі, що і для класичної VRP. Крім того, транспортний засіб може повернутися в депо не в той же день, коли виїхав. За M -денний період кожна точка доставки повинна бути відвідана, як мінімум, один раз.

Запити кожного клієнта повинні бути виконані за один візит одним транспортним засобом. Якщо період планування $M = 1$, то задача зводиться до класичної VRP. Кожна точка доставки в задачі з періодичною маршрутизацією має бути відвідана k раз, причому $1 \leq k \leq M$. У класичному варіанті PVRP, щоденне замовлення клієнта завжди фіксоване. PVRP можна розглядати як задачу компонування групи маршрутів на кожен день, причому маршрути повинні задовольняти обмеженням і загальна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальна.

12. Маршрутизація з випадковими даними (Stochastic VRP, SVRP) [39, 40]. У цьому варіанті VRP один або декілька компонентів задачі можуть мати випадкову поведінку. Стохастичність може проявлятися наступним чином:

- 1) випадкові клієнти – кожна точка доставки існує із заданою імовірністю;
- 2) випадкові запити – кількість товарів, яку треба доставити клієнту, є випадковою величиною;
- 3) відстань між точками доставки є випадковою величиною.

Розв'язання SVRP відбувається за два підходи. Перший етап дає розв'язок без урахування випадкових змінних. На другому етапі, коли стають відомі випадкові значення, відбувається корекція розв'язку, який отриманий раніше.

Ціль задачі: мінімізувати загальну вартість перевезень. Обмеження: коли деякі точки доставки невідомі, стає неможливим виконання всіх обмежень для всіх випадкових змінних. Таким чином, може бути необхідним виконання деяких умов із заданою ймовірністю або побудова моделі корекції, що виконується при порушенні деяких обмежень.

Наприклад, у задачі SVRP з поверненням товарів і обмеженню по вантажо-підйомності транспортних засобів способами корекції будуть:

- 1) повернутися в депо, коли транспортний засіб перевантажений, розвантажитися й повернутися на маршрут;
- 2) повернутися в депо, коли транспортний засіб перевантажений, а потім заново оптимізувати залишок маршруту;
- 3) запланувати дострокове повернення в депо, навіть якщо транспортний засіб завантажений не повністю. У такому випадку, рішення може залежати від кількості зібраного товару й відстані до депо. Транспортний засіб може повернутись до депо, якщо відомо, що забирання товару від наступного клієнта призведе до перевищення вантажопідйомності транспортного засобу.

13. Маршрутизація з можливістю дозавантаження (VRP with Satellite Facilities, VRPSF) [41]. У класичній задачі VRP кожен маршрут починається й закінчується в депо. Однією з причин повернення в депо є обмежена вантажопідйомність. Коли транспортний засіб розвезе всі товари, він повинен повернутися в депо за новою порцією товарів. Але в деяких випадках вигідно організувати дозавантаження на маршруті (без повернення в депо) за допомогою додаткових транспортних засобів. Типовим тут є випадок, коли велика кількість клієнтів очікують регулярних поставок від одного центрального постачальника.

Ціль задачі: мінімізувати витрати на перевезення, уклавшись в певний строк. Можливо, що, враховуючи витрати на додаткові транспортні засоби, загальна вартість розв'язанні задачі в короткостроковій перспективі буде вище, ніж при розв'язанні класичної задачі VRP.

Розширенням класичної задачі маршрутизації є модельований підхід із точним рішенням на основі евристичного відпалу для вирішення зеленої задачі маршрутизації транспортного засобу (G-VRP), де розглядається обмежений діапазон руху транспортних засобів у поєднанні з обмеженою інфраструктурою заправки. Особливо ця проблема виникає в компаній та агентств, які використовують транспортні засоби з альтернативними енергоносіями на транспортних системах для міських територій або для розподілу товарів [42].

14. Висновки. Нині проблема маршрутизації транспортних засобів є важливою і актуальною задачею, оскільки має широке застосування на практиці. У деяких випадках, особливо при плануванні великої кількості перевезень, навіть незначне покращення маршрутів транспортних засобів може дати значну економію ресурсів.

Для реальних ЗМТЗ точні методи практично неможливо застосувати через те, що при тій розмірності задач, що існує, та для таких задач, що зазвичай є на практиці, такі алгоритми будуть працювати надзвичайно довго. Тому провідну роль тут відіграють прикладні алгоритми.

Протягом останнього десятиліття було запропоновано досить велику кількість прикладних алгоритмів для ЗМТЗ з часовими вікнами. Але все ж при цьому більшість методів не в змозі забезпечити прийнятний компроміс між точністю оптимального розв'язку й швидкістю його знаходження. Особливо це стосується задач великої розмірності. Удосконалення прикладних алгоритмів маршрутизації як з точки зору ефективності, так і з точки зору швидкості роботи на даний момент є відкритою проблемою й обумовлює актуальність досліджень у цьому напрямі.

Список використаної літератури

1. Toth, P., & Vigo, D. (Eds.) (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*. (MOS-SIAM Series on Optimization; No. 18). Philadelphia: SIAM. – 462 p.
2. Golden B. L., Raghavan S., Wasil, E. A. (Eds.). (2008). *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.
3. Doerner, K., & Schmid, V. (2010). Survey: Matheuristics for rich vehicle routing problems. In M. Blesa, C. Blum, G. Raidl, A. Roli, & M. Sampels (Eds.) *Hybrid metaheuristics. Lecture notes in computer science*. Vol. 6373 (pp. 206–221). Berlin, Heidelberg: Springer.
4. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. *Прикладні методи комбінаторної оптимізації*. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2016. – 142 с.
5. Braekers K., Ramaekers K., & Nieuwenh I. V. (2016). The Vehicle Routing Problem: State of the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 – 313.
6. Eduardo U., Diego P. (2017). New benchmark instances for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 257, 3, 845 – 858
7. Soysal M., Bloemhof J. M., Bektas T. (2015). The time-dependent two-echelon capacitated vehicle routing problem with environmental considerations. *International Journal of Production Economics*, 164, 366-378
8. Ehsan T., Vahid K. (2016). Enhanced intelligent water drops and cuckoo search algorithms for solving the capacitated vehicle routing problem. *Information Sciences*, 334, 354-378
9. Maurizio B., Ferdinando P. (2015). A Variable Neighborhood Search Branching for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 47, 221-228
10. Ilker K., Nursel O. (2015). An advanced hybrid meta-heuristic algorithm for the vehicle routing problem with backhauls and time windows. *Computers & Industrial Engineering*, 86, 60-68
11. Bin Y., Zhi-Hua Hu (2015). Routing with time-windows for multiple environmental vehicle types. *Computers & Industrial Engineering*, 89, 2015, 150-161
12. Li J., Li Y., & Pardalos, P. M. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31(??), 515 – 532.
13. Montoya-Torres, J. R., Franco, J. L., Isaza, S. N., Jiménez, H. F., & Herazo-Padilla, N. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115–129.
14. De Oliveira, F. B., Enayatifar, R., Sadaei, H. J., Guimarães, F. G., Potvin, J. Y. (2016). A cooperative coevolutionary algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem. *Expert Systems with Applications*, 43, 117-130.
15. Jairo R. M.-T., Julian L. F., Santiago N. I. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115 – 129
16. Jian Li, Yang Li, Panos M. P. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 2, 515–532
17. Tania R.P.R., Maria I.G., Ana B.P. (2019). Multi-depot vehicle routing problem: a comparative study of alternative formulations. *International Journal of Logistics Research and Applications*, Journal homepage: <https://www.tandfonline.com/loi/cjol20>

18. Chávez, J. J. S., J. W. Escobar, and M. G. Echeverri (2016). A Multi-objective Pareto and Colony Algorithm for the Multi-depot Vehicle Routing Problem with Backhauls. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 7, 35–48
19. Zhang, Y., M. Qi, L. Miao, and G. Wu. (2015). A Generalized Multi-depot Vehicle Routing Problem with Replenishment Based on LocalSolver. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 6, 81–98
20. Braekers, K., K. Ramaekers, and I. V. Nieuwenh (2016). The Vehicle Routing Problem: State the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 – 313
21. Baldacci, R., Battarra, M., & Vigo, D. (2008). Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In B. L. Golden, S. Raghavan, & E. Wasil (Eds.), *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (pp. 3–27). Berlin: Springer. Vol. 43
22. Saso K., Vili P. (2015). A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem. *Applied Soft Computing*, 27, 519-532
23. Li J., Y. Li, & P. M. Pardalos (2016). Multi-depot Vehicle Routing Problem with Time Windows Under Shared Depot Resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 515–532
24. Bezerra, S. N., S. R. De Souza, and M. J. F. Souza. (2018). A GVNS Algorithm for Solving the Multi-depot Vehicle Routing Problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 66, 167 – 174
25. Горбулін В.П., Гуляницький Л.Ф., Сергієнко І.В. Постановки та математичні моделі проблем оптимізації маршрутів літальних апаратів із динамічними депо, *Управляющие системы и машины*, №1, 2019, – С. 3 – 10.
26. Гуляницький Л.Ф., Сторчевий В.В. "Одна спеціальна задача маршрутизації БПЛА *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика*, 34, №1, 2019, С. 60 – 78.
27. В.П.Горбулін, Л.Ф. Гуляницький, І.В. Сергієнко. Оптимізація маршрутів групи БПЛА за наявності альтернативних депо, *Кибернетика и системный анализ*, №2, 2020 (прийнято до друку).
28. Mustafa A., Seyda T. (2015). An adaptive local search algorithm for vehicle routing problem with simultaneous and mixed pickups and deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, 83, 15-29
29. Baozhen Y., Bin Y. (2016). An improved particle swarm optimization for carton heterogeneous vehicle routing problem with a collection depot. *Annals of Operations Research*, 242, 2, 303–320
30. Meryem B., Abdelmadjid B. (2016). Quantum Inspired Algorithm for a VRP with Heterogeneous Fleet Mixed Backhauls and Time Windows. *International Journal of Applied Metaheuristic Computing*, 21
31. Lijun W., Zhenzhen Z. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 16, 798-814
32. Emmanouil E., Christos D. (2016). The Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-ups and Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints. *European Journal of Operational Research*, 251, 2, 369 – 386
33. Cagri K., Gilbert L. (2018). Vehicle routing with backhauls: Review and research perspectives. *Computers & Operations Research*, 91, 79 –91
34. Sebastian R., Andreas B. (2018). Heuristics for vehicle routing problems with backhauls, time windows, and 3D loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 266, 3, 877 – 894
35. Joungsung Lee, Byung-In K. (2015). Industrial ship routing problem with split delivery and two types of vessels. *Expert Systems with Applications*, 42, 22, 9012 – 9023
36. James C., Shangyao Y. (2017). A Multi-Trip Split-Delivery Vehicle Routing Problem with Time Windows for Inventory Replenishment Under Stochastic Travel Times. *Networks and Spatial Economics*, 17, 1, 41–68
37. Mohammad M.-J., Seokcheon L. (2016). The customer-centric, multi-commodity vehicle routing problem with split delivery. *Expert Systems with Applications*, 56, 335-348
38. Florent H., Michel G. (2017). Heuristics for tactical time slot management: a periodic vehicle routing problem view. *International Transactions in Operational Research*
39. Ulrike R., Jakob P. (2015). A survey on dynamic and stochastic vehicle routing problems.

International Journal of Production Research, 54, 215-231

40. Briseida S., Karl F. (2016). Variable neighborhood search for the stochastic and dynamic vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*, 236, 2, 425–461
41. Iliya M., Sacha V. (2016). Integrating a heterogeneous fixed fleet and a flexible assignment of destination depots in the waste collection VRP with intermediate facilities. *Transportation Research Part B: Methodological*, 84, 256-273
42. Cagri K., Ismail K. (2016). The green vehicle routing problem: A heuristic based exact solution approach. *Applied Soft Computing*, 39, 154-164

Hulianytskyi L. F., Kotkova A. A. To the classification of vehicles routing problems.

The essence of the problems considered consists in developing routes for a group of heterogeneous vehicles based in a specific place or places (depot) that have to deliver goods to customers according to their volume of orders. The classic vehicle routing problem belongs to combinatorial optimization problems, which can be represented as a graph with the set of vertices representing both the depot and the delivery point, i.e. customers, and the set of edges corresponding to the paths. In this problem, the following data are given: matrix of edges weights between vertices, determined by the value/length of paths; the number of vehicles involved in the delivery of the goods; volumes of goods to be delivered to customers at each delivery point.

The topicality of the vehicle routing problem has led to the emergence of numerous studies conducted over the last decades and relevant publications. While composing the list of scientific publications cited in the article, the authors did not aim to provide a historical perspective on the study of vehicle routing problem (it is quite fully reflected in the majority of works), but preferred the publications of recent years that show the current state of research.

Most real-world vehicle routing problems have additional constraints that give rise to a whole range of new problem formulations. The paper presents a number of classes of vehicle routing problems. The main limitation is the capacity, and the criterion is the total cost of transportation. In routing problems with time constraints or “time windows”, minimizing the total cost of transportation is combined with minimizing the number of vehicles involved and the overall waiting time for vehicle customers. Minimizing the cost of transportation and the size of the park of the involved vehicles can be required even if these vehicles leave from several depots, and both the start and the end of the route may be located not in fixed, but in alternative, in particular, dynamic depots. Beside the above mentioned the following tasks are considered: routing problems for return and delivery of goods, routing with two-dimensional restrictions on vehicle loading, maximization of savings on goods transportation, routing with different modes of transport, periodic routing with random data, routing with the possibility of loading, routing with predefined deadlines. For each problem type additional restrictions that differ from the classical problem are introduced.

Keywords: route optimization, vehicles, logistics, depot, mathematical model, combinatorial optimization..

References

1. Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1), 80–91.
2. Toth, P., & Vigo, D. (Eds.) (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*. (MOS-SIAM Series on Optimization; No. 18). Philadelphia: SIAM.
3. Golden, B. L., Raghavan, S., Wasil, E. A. (Eds.). (2008). *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.
4. Doerner, K., & Schmid, V. (2010). Survey: Matheuristics for rich vehicle routing problems. In M. Blesa, C. Blum, G. Raidl, A. Roli, & M. Sampels (Eds.) *Hybrid metaheuristics. Lecture notes in computer science*. Vol. 6373 (pp. 206–221). Berlin, Heidelberg: Springer.
5. Hulianytskyi, L. F., & Mulesa, O.Y. (2016). *Applied methods of combinatorial optimization*. Kyiv.: Vydavnycho-polihrafichnyi centr "Kyivskiyi universytet"[in Ukrainian].

6. Braekers, K., Ramaekers, K., & Nieuwenh, I. V. (2016). The Vehicle Routing Problem: State of the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300–313.
7. Eduardo, U., Diego, P. (2017). New benchmark instances for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 257, 3, 845–858.
8. Soysal, M., Bloemhof, J. M., & Bektas, T. (2015). The time-dependent two-echelon capacitated vehicle routing problem with environmental considerations. *International Journal of Production Economics*, 164, 366–378.
9. Ehsan, T., & Vahid, K. (2016). Enhanced intelligent water drops and cuckoo search algorithms for solving the capacitated vehicle routing problem. *Information Sciences*, 334, 354–378.
10. Maurizio, B., & Ferdinando, P. (2015). A Variable Neighborhood Search Branching for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 47, 221–228.
11. Ilker, K., & Nursel, O. (2015). An advanced hybrid meta-heuristic algorithm for the vehicle routing problem with backhauls and time windows. *Computers & Industrial Engineering*, 86, 60–68.
12. Bin, Y., & Zhi-Hua H. (2015). Routing with time-windows for multiple environmental vehicle types. *Computers & Industrial Engineering*, 89, 150–161.
13. Li, J., Li, Y., & Pardalos, P. M. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31(2), 515–532.
14. Montoya-Torres, J. R., Franco, J. L., Isaza, S. N., Jiménez, H. F., & Herazo-Padilla, N. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115–129.
15. De Oliveira, F. B., Enayatifar, R., Sadaei, H. J., Guimarães, F. G., & Potvin, J. Y. (2016). A cooperative coevolutionary algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem. *Expert Systems with Applications*, 43, 117–130.
16. Jairo, R. M.-T., Julian, L. F., & Santiago, N. I. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115–129.
17. Li, J., Li, Y., & Panos, M. P. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 2, 515–532.
18. Tania, R.P.R., Maria, I.G., & Ana B.P. (2019). Multi-depot vehicle routing problem: a comparative study of alternative formulations. *International Journal of Logistics Research and Applications*. Retrieved from <https://www.tandfonline.com/loi/cjol20>
19. Chávez, J. J. S., Escobar, J. W. , & Echeverri, M. G. (2016). A Multi-objective Pareto and Colony Algorithm for the Multi-depot Vehicle Routing Problem with Backhauls. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 7, 35–48.
20. Zhang, Y., Qi, M., Miao L., & Wu, G. (2015). A Generalized Multi-depot Vehicle Routing Problem with Replenishment Based on LocalSolver. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 6, 81–98.
21. Braekers, K., Ramaekers, K. , & Nieuwenh, I. V. (2016). The Vehicle Routing Problem: State the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300–313.
22. Baldacci, R., Battarra, M., & Vigo, D. (2008). Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In B. L. Golden, S. Raghavan, & E. Wasil (Eds.), *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (pp. 3–27). Berlin: Springer. Vol. 43.
23. Saso, K., & Vili, P. (2015). A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem. *Applied Soft Computing*, 27, 519–532.
24. Li, J., Li, Y., & Pardalos, P. M. (2016). Multi-depot Vehicle Routing Problem with Time Windows Under Shared Depot Resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 515–532.
25. Bezerra, S. N., De Souza, S. R., & Souza, M. J. F. (2018). A GVNS Algorithm for Solving the Multi-depot Vehicle Routing Problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 66, 167–174.
26. Horbulin, V.P., Hulianytskyi, L.F., & Serhienko, S.V. (2019). Formulations and Mathematical Models of the Optimizing Routes Problems for Aircraft with Dynamic Depots. *Control systems & computers*, 1, 3–10 [in Russian].
27. Hulianytskyi, L. F., & Storchevyi, V. V. (2019). One special problem of UAV routing, *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(34), 60–78 [in Ukrainian].

28. Horbulin, V.P., Hulianytskyi, L.F., & Sergienko, I.V. (2020). Optimization of UAV team routes at the availability of alternative and dynamic depots. *Cybernetics and System analysis*, 2, 31–41 [in Ukrainian].
29. Mustafa, A., & Seyda, T. (2015). An adaptive local search algorithm for vehicle routing problem with simultaneous and mixed pickups and deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, 83, 15–29.
30. Baozhen, Y., & Bin, Y. (2016). An improved particle swarm optimization for carton heterogeneous vehicle routing problem with a collection depot. *Annals of Operations Research*, 242, 2, 303–320.
31. Meryem, B., & Abdelmadjid, B. (2016). Quantum Inspired Algorithm for a VRP with Heterogeneous Fleet Mixed Backhauls and Time Windows. *International Journal of Applied Metaheuristic Computing*, 21.
32. Lijun, W., & Zhenzhen, Z. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 16, 798–814.
33. Emmanouil, E., & Christos, D. (2016). The Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickups and Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints. *European Journal of Operational Research*, 251, 2, 369–386.
34. Cagri, K., & Gilbert, L. (2018). Vehicle routing with backhauls: Review and research perspectives. *Computers & Operations Research*, 91, 79–91.
35. Sebastian, R., & Andreas, B. (2018). Heuristics for vehicle routing problems with backhauls, time windows, and 3D loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 266, 3, 877–894.
36. Joungsung, L., & Byung-In, K. (2015). Industrial ship routing problem with split delivery and two types of vessels. *Expert Systems with Applications*, 42, 22, 9012–9023.
37. James, C., & Shangyao, Y. (2017). A Multi-Trip Split-Delivery Vehicle Routing Problem with Time Windows for Inventory Replenishment Under Stochastic Travel Times. *Networks and Spatial Economics*, 17, 1, 41–68.
38. Mohammad, M.-J., & Seokcheon, L. (2016). The customer-centric, multi-commodity vehicle routing problem with split delivery. *Expert Systems with Applications*, 56, 335–348.
39. Florent, H., & Michel, G. (2017). Heuristics for tactical time slot management: a periodic vehicle routing problem view. *International Transactions in Operational Research*. 6(24), 1233–1252.
40. Ulrike, R., & Jakob, P. (2015). A survey on dynamic and stochastic vehicle routing problems. *International Journal of Production Research*, 54, 215–231
41. Briseida, S., & Karl, F. (2016). Variable neighborhood search for the stochastic and dynamic vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*, 236, 2, 425–461
42. Iliya, M., & Sacha, V. (2016). Integrating a heterogeneous fixed fleet and a flexible assignment of destination depots in the waste collection VRP with intermediate facilities. *Transportation Research Part B: Methodological*, 84, 256–273.
43. Cagri, K., & Ismail, K. (2016). The green vehicle routing problem: A heuristic based exact solution approach. *Applied Soft Computing*, 39, 154–164.

Одержано 10.01.2020