УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).7-15

В. М. Бондаренко[1], О. В. Зубарук[2]

[1] Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
канд. фіз.-мат. наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ НАДНАПІВГРУП НАПІВГРУПИ, ПОРОДЖЕНОЇ ДВОМА ВЗАЄМНО АНУЛЬОВНИМИ ІДЕМПОТЕНТАМИ

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре; зокрема, повністю визначено зображувальний тип для довільного поля. Якщо характеристика p поля K не ділить порядок групи (класичний випадок), група має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень; така група називається групою скінченного зображувального типу над K. Якщо ж характеристика p ділить порядок групи (модулярний випадок), група має скінченний зображувальний тип лише тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. В цьому випадку для більшості скінченних груп задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності. Такі групи називаються дикими, а групи, що допускають явний опис зображень, — ручними. Ручні та дикі групи в модулярному випадку повністю описав перший автор разом з Ю. А. Дроздом.

В теорії зображень напівгруп найбільша кількість робіт присвячена незвідним зображенням. Серед старих результатів є лише окремі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу, а саме для скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський) та деяких напівгруп всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський, К. Рінгель). Щодо випадків, коли число нерозкладних зображень нескінченне, то найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які можна переформулювати в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов і Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко) та алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (В. М. Бондаренко і К. Рінгель).

Якщо ж говорити не про окремі напівгрупи, а про класи напівгруп, то слід відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична), зображення напівгруп Ріса (С. М. Дяченко), напівгруп, породжених потентними елементами (В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук) і зображення прямих добутків симетричної напівгрупи другого степеня (В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин). Такі напівгрупи можуть мати як скіченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

В. М. Бондаренко і Я. В. Заціха описали зображувальні типи напівгруп третього порядку над полем і вказали канонічну форму матричних зображень для довільної напівгрупи скінченного зображувального типу. Ця стаття присвячена дослідженню аналогічних задач для наднапівгруп комутативних напівгруп.

Ключові слова: поле, наднапівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, ручна і дика напівгрупа, напівгрупа скінченного і нескінченного типів, канонічна форма.

1. Вступ. Ця робота присвячена матричним зображенням напівгруп спеціального вигляду, які будуються по заданій напівгрупі.

Найпростішими напівгрупами є напівгрупи порядку $n = 2, 3$. Напівгрупи порядку 2 (а їх чотири) природним чином вкладаються в напівгрупи третього порядку (шляхом зовнішнього приєднання нульового чи одиничного елемента) і тому нами не розглядаються.

Напівгрупи третього порядку вперше описав Т. Тамура в 1953 р. [1]. Г. Е. Форсайт в 1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. В обох статтях опис отримано в термінах таблиць Келі. Пізніше вони вивчалися, зокрема, в [3]– [6]. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку (з точністю до ізоморфізму і дуальності) вказані в роботі [6].

Напівгрупу назвемо майже циклічною, якщо вона отримується із деякої циклічної напівгрупи (тобто, яка задається одним твірним елементом і одним визначальним співвідношенням) шляхом зовнішнього приєднання нульового чи одиничного елемента. Такі напівгрупи, як і циклічні, не цікаві з точки зору теорії зображень (по суті її матричне зображення задається однією матрицею). Згідно роботи [6] комутативні напівгрупи третього порядку, що не є ні циклічними, ні майже циклічними, вичерпуються такими напівгрупами:

a) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

b) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

c) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

d) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = c$, $cb = c$.

Всі виписані системи твірних є мінімальними. В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Згідно [6, Теорема 1] напівгрупи $b)-d)$ є напівгрупами скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень), а напівгрупа *a*) — ручною напівгрупою нескінченного зображувального типу. Нагадаємо, що напівгрупа називається ручною (відповідно дикою), якщо задача про опис її зображень є ручною (відповідно дикою); відносно означення ручних та диких матричних задач див. роботу Ю. А. Дрозда [7].

У цій статті розглядається напівгрупа *c*), породжена двома взаємно анульовними ідемпотентами, яку позначимо через T.

Позначимо визначальні співвідношення $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$ відповідно через (b), (c), (bc), (cb) і введемо наступні напівгрупи:

$T^{(b)} := T \setminus (b) := (0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

$T^{(c)} := T \setminus (c) := (0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $bc = 0$, $cb = 0$;

$T^{(bc)} := T \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = 0$;

$T^{(cb)} := T \setminus (cb) := (0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = 0$.

Покладемо

$T^{(x,y)} := T \setminus \{(x),(y)\}$ для $x, y \in \{(b),(c),(bc),(cb)\}$, $x \neq y$;

$T^{(x,y,z)} := T \setminus \{(x),(y),(z)\}$ для $x, y, z \in \{(b),(c),(bc),(cb)\}$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$;

Очевидно, що при перестановці x, y, z напівгрупи $T^{(x,y)}$ і $T^{(x,y,z)}$ не змінюються. Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі T, тобто є наднапівгрупою напівгрупи T.

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Всі матричні зображення розглядаються над довільним фіксованим полем K.

Теорема 1. *Для довільного поля K мають місце наступні твердження.*

1) $T^{(x)}$ *— напівгрупа скінченного зображувального типу для* $x \in \{(bc),(cb)\}$;
2) $T^{(x)}$ *— ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для* $x \in \{(b),(c)\}$;
3) $T^{(x,y)}$ *— ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для* $x, y \in \{(b),(c)\}$ *або* $x, y \in \{(bc),(cb)\}$;
4) $T^{(x,y)}$ *— дика напівгрупа для* $x \in \{(b),(c)\}$, $y \in \{(bc),(cb)\}$ *або* $x \in \{(bc),(cb)\}$, $y \in \{(b),(c)\}$;
5) $T^{(x,y,z)}$ *— дика напівгрупа для довільних* $x, y, z \in \{(b),(c),(bc),(cb)\}$.

2. Доведення твердження 1) теореми 1. Завжди вважаємо (див. у зв'язку з цим [8]), що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу b, c позначається відповідно через B, C. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ $(n \geq 0)$.

Твердження 1) теореми 1 випливає із наступного твердження.

Теорема 2. *Канонічна форма для матричних зображень напівгруп $T^{(x)}$ при $x \in \{(bc),(cb)\}$ така:*

2.1) $T^{(bc)} := T \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2.2) $T^{(cb)} := T \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок 2.1.

Матриці B, C можна приводити одночасними перетвореннями подібності (саме такі перетворення відповідають еквівалентним зображенням). За допомогою вказаних перетворень приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матрицю C, яка при цьому якимось чином зміниться, будемо знову позначати через C, щоб не нагромаджувати індекси (і цим принципом будемо користуватися завжди). Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці B), вона має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – деякі матриці. Використаємо рівність $CB = 0$ (яка відповідає визначальному співвідношенню $cb = 0$):

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $C^2 = C$, то маємо, що $C_4C_2 = C_2$ і $C_4^2 = C_4$. Перетвореннями подібності можна привести матрицю C_4 до нормальної форми Жордана у вигляді

$$C_4 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(яка переставно подібна прямій сумі відповідних клітин Жордана).

Розіб'ємо матрицю C на нові блоки:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З співвідношення $C^2 = C$ маємо, що $C_{13} = 0$.

Далі з'ясуємо, коли матричне зображення $R = \{B, C\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R} = \{\overline{B}, \overline{C}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{C_{12}} & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{B} = XBX^{-1}$, $\overline{C} = XCX^{-1}$, що еквівалентно $\overline{B}X = XB, \overline{C}X = XC$. Зрозуміло, що з подібності матриць $\overline{B}$ і B випливає їх рівність.

Спочатку використаємо рівність $\overline{B}X = XB$ (де матриця X розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриць B і C):

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ X_{21} & 0 & 0 \\ X_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши блоки обох матриць, маємо: $X_{12} = 0$, $X_{13} = 0$, $X_{21} = 0$, $X_{31} = 0$, а отже,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо рівність $\overline{C}X = XC$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{C_{12}} & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{C_{12}}X_{22} & \overline{C_{12}}X_{23} \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{11}C_{12} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & X_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цієї рівності одержуємо, що $X_{23} = 0$, $X_{32} = 0$,

$$\overline{C_{12}}X_{22} = X_{11}C_{12},$$

тобто (в еквівалентній формі)

$$\overline{C_{12}} = X_{11}C_{12}X_{22}^{-1}.$$

З вище сказаного

$$C_{12} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому треба розбити додатково матрицю B на нові блоки, відповідно до розбиття матриці C.

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Випадок 2.2 випливає із випадку 2.1 в силу симетрії напівгрупи T $(b \leftrightarrow c)$.

Теорема доведена.

3. Доведення тверджень 2) і 3) теореми 1. В силу симетрії напівгрупи T для доведення твердження 2) достатньо розглянути випадок $x = (b)$. Доведення проводимо за тією ж схемою, що і для твердження 1).

Матриці B, C можна приводити одночасними перетвореннями подібності. За допомогою вказаних перетворень приведемо матрицю C до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці B на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці C), вона має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

де B_1, B_2, B_3, B_4 – деякі матриці. Використаємо рівність $BC = 0$ (яка відповідає визначальному співвідношенню $bc = 0$):

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Використаємо рівність $CB = 0$ (яка відповідає визначальному співвідношенню $cb = 0$):

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Далі з'ясуємо, коли матричне зображення $R = \{B, C\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R} = \{\overline{B}, \overline{C}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B_4} \end{pmatrix}, \ \overline{C} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{B} = XBX^{-1}$, $\overline{C} = XCX^{-1}$, що еквівалентно $\overline{B}X = XB, \overline{C}X = XC$. Зрозуміло, що з подібності матриць $\overline{C}$ і C випливає їх рівність.

Спочатку використаємо рівність $\overline{C}X = XC$ (де матриця X розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриць B і C):

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши блоки обох матриць, маємо: $X_{12} = 0$, $X_{21} = 0$, а отже,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо рівність $\overline{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B_4}X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{22}B_4 \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цієї рівності одержуємо, що $\overline{B_4}X_{22} = X_{22}B_4$, тобто (в еквівалентній формі)

$$\overline{B_4} = X_{22}B_4X_{22}^{-1}.$$

Отже, задача про еквівалентність зображень напівгрупи $T^{(b)}$ еквівалентна задачі про подібність однієї матриці (без співвідношень), а значить є ручною нескінченного зображувального типу.

Твердження 3) при $x, y \in \{(b), (c)\}$ випливає із результатів роботи [9], а при $x, y \in \{(bc), (cb)\}$ — із результатів роботи [10] (див. 3.6).

4. Доведення тверджень 4) і 5) теореми 1.

В силу симетрії напівгрупи T для доведення твердження 4) достатньо розглянути випадок $x = (b), y = (bc)$. Доведення таке ж, як і доведення твердження 2 (при $x = (b)$). Якщо в ньому ігнорувати співвідношення $bc = 0$, то матриця B матиме вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

а матриця X не зміниться.

Отже, задача про еквівалентність зображень напівгрупи $T^{(b,bc)}$ еквівалентна задачі про еквівалентність зображень сагайдака, що має вершини $1, 2$ і стрілки $(2, 1), (2, 2)$ (першій стрілці відповідає матриця B_3, а другій — B_4), а цей сагайдак є диким згідно робіт [11], [12].

Твердження 5) випливає із твердження 4).

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі вивчаються матричні зображення наднапівгруп спеціального вигляду напівгрупи третього порядку, яка породжена двома взаємно анульовними ідемпотентами. Описано їх зображувальний тип над довільним полем, а у випадку наднапівгруп скінченного зображувального типу вказана канонічна форма їхніх матричних зображень.

Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

Список використаної літератури

1. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11.
2. *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
5. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.
6. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.
7. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
8. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, № 1. – С. 26–34.
9. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
10. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra Discrete Math. – 2016. – **21**, no. 1. – P. 18–23.
11. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. **37**, №4. – С. 752–791.
12. *Donovan P., FreislichM. R.* The representation theory of finite graphs and assosiated algebras // Carleton Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3–86.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by two mutually annihilating idempotents.

Matrix representations of finite semigroups over fields are studied not so well as for finite groups. Representations of finite groups over fields are studied sufficiently well; in particular, the criterions of representation type are fully defined for an arbitrary field. If the characteristic p of a field K does not divide the order of a group (classical case), then the group has, up to equivalence, finite number of non-decomposable representations; such group is called a group of finite representation type. If the characteristic p divides the order of a group (modular case), then the group has finite representation type only if its Sylow p-subgroup is cyclic. In this case for most finite groups the problems of describing their representations includes the problem on classification, up to similarity, of the pairs of matrices. Such groups are called wild, and groups that allow explicit descriptions of representations are called tame. The tame and wild groups in modular case are fully described by the first author together with Yu. A. Drozd.

In the theory of representations of semigroups, the largest number of works are devoted to irreducible representations. Among the old results, there are only some results on semigroups of finite representation type, namely, for a finite quite simple semigroup (I. S. Ponizovsky) and some semigroups of all transformations of a finite set (I. S. Ponizovsky, C. Ringel). In cases, when the numbers of non-decomposable representations is infinite, the most famous are the results from the theory of representations of algebras that can be reformulated in terms of representations of semigroups: the description of representations of the algebra $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev and L. O. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergeichuk, V. M. Bondarenko) and the algebra $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (V. M. Bondarenko and C. Ringel).

If we are not talking about individual semigroups, but about semigroup classes, then it should be noted works about on representations of the semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna), representations of the Rees semigroups (S. M. Dyachenko), semigroups generated by the potential elements (V. M. Bondarenko, O. V. Zubaruk) and representations of direct products of the symmetric second-order semigroup (V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn). Such semigroups can have both a finite and infinite representation type.

V. M. Bondarenko and Ja. V. Zatsikha described representation types of the third-order semigroups over a field, and indicate the canonical form of the matrix representations for any semigroup of finite representation type. This article is devoted to the study of similar problems for oversemigroups of commutative semigroups.

Keywords: field, oversemigroup, defining relations, matrix representations, tame and wild semigroup, semigroup of finite and infinite types, canonical form.

References

1. Tamura T. (1953) Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ. 3*, 1–11.
2. Forsythe G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc., 6*, 443–447.
3. Bondarenko V. M., & Zaciha Ja. V. (2013). Pro vyznachalni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tretoho poryadku [On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup]. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics, 14*, 62–67. [in Ukrainian]
4. Chotchaisthit S. (2014). Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3. *Appl. Math. Sci. (Ruse), 8*, 1261–1269.
5. Bondarenko V. M., & Zaciha Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math., 20, 1*, 32–39.
6. Bondarenko V. M., & Zaciha Ja. V. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics, 32, 1*, 36–49. [in Ukrainian]
7. Drozd Yu. A. (1977) Pro ruchni ta dyki matrychni problemy [On tame and wild matrix problems]. *Matrix problems – Institute of Math. of AN of Ukrain.SSR*, 104–114. [in Russian]
8. Bondarenko V. M., & Kostyshyn E. M. (2011). Modulyarni zobrazhennya napivhrupy T_2 [Modular representations of the semigroup T_2]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science, 22, 1*, 26–34. [in Ukrainian]
9. Gelfand, I. M., & Ponomarev V. A. (1968) Nerozkladni zobrazhennya hrupy Lorentsa [Indecomposable representations of the Lorentz group]. *Advances in Math. Sciences, 23, 2*, 3–60. [in Russian]
10. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., & Zubaruk O. V. (2016) On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math. 21, 1*, 18–23.
11. Nazarova L. A. (1973) Zobrazhennya kolchaniv neskinchennoho typu [Representations of quivers of infinite type]. *Math. USSR Izvestija, 37, 4*, 752–791. [in Russian]
12. Donovan P., & Freislich M. R. (1973) The representation theory of finite graphs and assosiated algebras. *Carleton Lecture Notes, 5*. 3–86.

Одержано 05.03.2020