УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).30-40

В. Б. Трошкі[1], Н. В. Трошкі[2], П. П. Товт[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін,
кандидат фізико-математичних наук
viktor.troshki@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1309-1151

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін,
кандидат фізико-математичних наук
nataliia.troshki@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8152-5663

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістр 2-го року навчання кафедри фізико-математичних дисциплін
toth.retep.18@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6083-8591

ОЦІНКИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ, КОЛИ ВІДОМІ ЙОГО ЗНАЧЕННЯ У СКІНЧЕННІЙ МНОЖИНІ ТОЧОК

На практиці зазвичай значення процесу спостерігаються в певні моменти часу. І на основі цих даних потрібно робити висновки про поведінку процесу, за яким ведеться спостереження. Саме тому, першочерговою метою роботи є оцінка коваріаційної функції такого процесу. Для цього в даній роботі розглянуто гауссовий стаціонарний випадковий процес X із невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок та поставлено завдання оцінити коваріаційну функцію такого випадкового процесу.

Однією з особливостей оцінки кореляційної функції випадкового процесу при невідомому середньому значенні є те, що використання корелограмм в якості оцінки не є можливим, оскільки корелограмма в цьому випадку є зміщеною оцінкою кореляційної функції. Тому для доведення теорем потрібно було побудувати статистику, яка б була незміщеною оцінкою коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу. Крім цього, як показано в деяких наших попередніх роботах, так і в цій роботі, що при оцінці відхилень кореляційної функції гауссового стаціонарного випадкого процесу від корелограмми в L_p-метриці ми маємо справу вже не з гауссовими випадковими процесами, а з квадратично-гауссовивми. Тому для доведення цієї оцінки використано теорію квадратично-гауссових випадкових процесів. За допомогою цієї теорії отримано оцінки відхилень кореляційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу із невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок цього процесу від її оцінки в L_p-метриці.

В роботі також побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції такого випадкового процесу. Цей критерій вдалося сформулювати завдяки отриманим оцінкам.

Ключові слова: статистика, гіпотеза, критерій, квадратично-гауссовий процес, L_p-метрика.

1. Вступ. Оцінювання спектральних і кореляційних функцій випадкових процесів та побудова критеріїв для ідентифікації цих характеристик є актуальним напрямком в теорії випадкових процесів. Інтерес до вивчення цих проблем зумовлений широким використанням отриманих результатів, зокрема при розв'язанні різноманітних задач геології та метеорології.

Актуальність даної тематики зумовлює наявність багатьох робіт в цьому напрямку. Зокрема, в роботах [1], [3], [4], [5], [6] та книзі [11] були отримані певні оцінки коваріаційних функцій із заданою точністю в рівномірній метриці. В роботах [10] і [12] Ю. В. Козаченко та Т. В. Федорянич побудували критерії для перевірки гіпотез про вигляд коваріаційної функції гауссового стаціонарного процесу із заданою надійністю та точністю у просторі $L_2[0, A]$. У даній роботі для побудови критерію було використано оцінки норми квадратично-гауссових випадкових процесів в просторі $L_p[0, A]$, $p \geq 1$, які були отримані в роботі Ю. В. Козаченка та В. Б. Трошкі [8]. Більш детальну інформацію з теорії квадратично-гауссових випадкових величин можна знайти в книзі [2] та статті [7]. Зокрема, в цих роботах було досліджено властивості простору квадратично-гауссових випадкових величин та встановлено їх зв'язок з іншими просторами випадкових величин.

Основною метою даної статті є побудова критерію для перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції гауссового стаціонарного процесу у випадку, коли відомі його значення у скінченній множині точок. Ми також припускаємо, що середнє значеня цього процесу є невідомим. По суті, це продовження досліджень, розпочатих у статті [8] та [9]. Істотною відмінністю даної роботи від роботи [9] є те, що тут ми розгядаємо гауссовий стаціонарний випадковий процес X з невідомим середнім значенням, коли відомі його значення у скінченній множині точок. За оцінку кореляційної функції цього процесу $\rho(\tau) = E(X(t+\tau) - m)(X(t) - m)$ ми вибираємо статистику

$$\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right) - \hat{a}_\tau \right) \left(X\left(\frac{iT}{n}\right) - \hat{a} \right), \tag{1}$$

де $X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right)$ та $X\left(\frac{iT}{n}\right)$ – незалежні, відомі значення випадкового процесу,

$$\hat{a}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right) \tag{2}$$

та

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X\left(\frac{iT}{n}\right). \tag{3}$$

В роботі також отримано оцінки ймовірності відхиленнь $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$ від $\rho(\tau)$ в нормі простору $L_p[0, A]$, $p \geq 1$.

Робота має таку структуру. Другий розділ присвячений відомостям з теорії квад-ратично-гауссових випадкових процесів. У третьому розділі розглянуто гауссовий стаціонарний процес із невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок та отримано оцінки відхилень кореляційної функції цього процесу від її оцінки в L_p-метриці. На основі побудованих оцінок у розділі 4 побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції такого процесу. В останьому розділі проаналізовано результати роботи та зроблено висновки.

2. Відомості з теорії квадратично-гауссових випадкових величин.

Означення 1. *([2], [7]) Нехай* $\mathbb{T}$*– деяка параметрична множина,* $\Xi = \{\xi_t, t \in \mathrm{T}\}$*– сім'я сумісно гауссових випадкових величин,* $\mathbb{E}\xi_t = 0$ *(напри-*

клад, ξ_t– гауссів випадковий процес). Простір $SG_{\Xi}(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо випадкові величини $\zeta \in SG_{\Xi}(\Omega)$ можна зобразити у вигляді

$$\zeta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi}^T A \bar{\xi},$$

де:

- $\bar{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_N)^T$– *гауссовий випадковий вектор із* $N \geq 1, \mathbb{E}\bar{\xi} = 0$;
- *випадкові величини* $\xi_i, i = 1, ..., N$ *належать* Ξ;
- A– *довільна симетрична матриця,*

або випадкові величини з $SG_{\Xi}(\Omega)$ – це границі в середньому квадратичному послідовностей випадкових величин $\zeta_n = \bar{\xi}_n^T A_n \bar{\xi}_n - \mathbb{E}\bar{\xi}_n^T A_n \bar{\xi}_n, n \geq 1$. Зображення для ζ_n такі ж як і зображення ζ.

Означення 2. *([2]). Випадковий процес Y називається квадратично-гауссовим випадковим процесом, якщо для кожного $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина $Y(t)$ належить простору $SG_{\Xi}(\Omega)$ та $\sup\limits_{t \in \mathbb{T}} Y^2(t) < \infty$.*

Приклади квадратично гауссових випадкових процесів:

1) Нехай $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$, $t \in \mathbb{T}$ – це сім'я сумісно гауссових випадкових процесів, і $\mathbb{E}\xi_i(t) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Нехай для кожного $t \in \mathbb{T}$ матриця $A(t)$ симетрична і позначимо $\overline{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t))$. Тоді випадковий процес $\zeta(t) = \overline{\xi}^T(t) A(t) \overline{\xi}(t) - \mathbf{E}\overline{\xi}^T(t) A(t) \overline{\xi}(t)$ є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

2) Нехай $\overline{\xi}_n(t)$ – центрований гауссовий векторний процес і $A_n(t)$ симетрична матриця для кожного $t \in \mathbb{T}$. Тоді границя в середньому квадратичному послідовності випадкових процесів $\zeta_n(t) = \overline{\xi}_n^T(t) A_n(t) \overline{\xi}_n(t) - \mathbf{E}\overline{\xi}_n^T(t) A_n(t) \overline{\xi}_n(t)$ є квадратично- гауссовим випадковим процесом.

Наступна лема була сформульована та доведена в шостому розділі книги [2].

Лема 1. *Нехай $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{T}\}$ – центрований стаціонарний гауссовий процес і $\rho(\tau) = \mathbf{E}\xi(t+\tau)\xi(t)$. Розглянемо при $T > 0$ корелограму*

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \xi(t+\tau)\xi(t) dt.$$

Тоді $\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом.

Теорема 1. *([8]). Нехай $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{X}\}$ – це квадратично-гауссів процес, де $\{\mathbb{X}, \mathfrak{A}, \mu\}$ – це вимірний простір. Припустимо, що $Y(t)$ вимірний процес на $\mathbb{X}$. Якщо існує інтеграл Лебега $C_p(\mathbb{X}) = \int\limits_{\mathbb{X}} (\mathbf{E}Y^2(t))^{\frac{p}{2}} d\mu(t), p \geq 1$, то з імовірністю 1 існує $\int\limits_{\mathbb{X}} |Y(t)|^p d\mu(t)$ та для $\varepsilon \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\frac{p}{2}+1)p} \right)^p C_p(\mathbb{X})$ справджується нерівність*

$$P\left\{ \int\limits_{\mathbb{X}} |Y(t)|^p \, d\mu(t) > \varepsilon \right\} \leq 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{1/p}\sqrt{2}}{C_p^{\frac{1}{p}}(\mathbb{X})}} \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2} C_p^{\frac{1}{p}}(\mathbb{X})} \right\}.$$

3. Оцінки кореляційної функції гауссового стаціонарного процесу. Розглянемо неперервний дійсний стаціонарний гауссовий випадковий процес X, який визначений на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$,

$$X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T + A], 0 < A < T < \infty\}$$

та $\mathbf{E}X(t) = m$. Припустимо, що значення цього процесу в моменти $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ та $t_i + \tau$ є відомі.

Позначимо через

$$\rho(\tau) = E(X(t+\tau) - m)(X(t) - m), \quad 0 \le \tau \le A \tag{4}$$

кореляційну функцію цього процеса, яку будемо розглядати на $[0; A]$.

Введемо позначення

$$r(\tau) = r(n, \tau) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} X\left(\frac{(i-j)T}{n} - \tau\right). \tag{5}$$

Виберемо за оцінку кореляційної функції $\rho(\tau)$ статистику $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$ визначену у (1)

Зауваження 1. *Оскільки $X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right)$ та $X\left(\frac{iT}{n}\right)$ – незалежні, тому справедливими є наступні перетворення:*

$$\mathbf{E}\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right)X\left(\frac{iT}{n}\right) - \hat{a}X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right) - \hat{a}_\tau X\left(\frac{iT}{n}\right) +\right.$$

$$\left. + \hat{a}\hat{a}_\tau\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathbf{E}X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right)X\left(\frac{iT}{n}\right) - \mathbf{E}\hat{a}X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right) - \mathbf{E}\hat{a}_\tau X\left(\frac{iT}{n}\right) +\right.$$

$$\left. + \mathbf{E}\hat{a}\hat{a}_\tau\right) = \rho(\tau) + m^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}X\left(\frac{jT}{n}\right)X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right) -$$

$$- \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}X\left(\frac{jT}{n}+\tau\right)X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}X\left(\frac{jT}{n}+\tau\right)X\left(\frac{iT}{n}\right) =$$

$$= \rho(\tau) + m^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n} - \tau\right) - m^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n} - \tau\right) - m^2 +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n} - \tau\right) + m^2 = \rho(\tau) - \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n} - \tau\right) =$$

$$= \rho(\tau) - r(\tau).$$

А це означає, що $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$ є зміщеною на величину $r(\tau)$ оцінкою для $\rho(\tau)$. Однак величина $\tilde{\rho}_{T,n}(\tau) = \widehat{\rho}_{T,n}(\tau) + r(\tau)$ буде незміщеною оцінкою. Більше того, дисперсії оцінок $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$ та $\tilde{\rho}_{T,n}(\tau)$ однакові.

Теорема 2. *Нехай $X(t)$ вимірний стаціонарний гауссовий процес із $\mathbf{E}X(t) = m$ та кореляційною функцією $\rho(\tau)$. І нехай при $0 < A < \infty$ виконується, що*

$C(p,n) < \infty$, *де*

$$C(p,n) = \int\limits_0^A \left(\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} + \tau \right) \right]^2 + \right.$$
$$+ \frac{2T}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left[\rho^2\left(\frac{jT}{n}\right) + \rho\left(\frac{jT}{n} + \tau\right) \rho\left(\frac{jT}{n} - \tau\right) \right] -$$
$$- \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\rho\left(\frac{(i-j)T}{n} + \tau \right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) + \right.$$
$$\left. \left. + 2\rho\left(\frac{(i-j)T}{n} \right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} \right) + \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} - \tau \right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) \right] \right)^{\frac{p}{2}} d\tau. \tag{6}$$

Тоді при

$$\varepsilon \geq \left(\int\limits_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} + \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p} \right) C^{1/p}(p,n),$$

де $r(\tau)$ *визначена у (5), справджується нерівність*

$$P\left\{ \left(\int\limits_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq$$
$$\leq 2 \left(1 + \frac{\left(\varepsilon - \left(\int\limits_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \right) \sqrt{2}}{C^{\frac{1}{p}}(p,n)} \right)^{1/2} \exp\left\{ - \frac{\varepsilon - \left(\int\limits_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}}{\sqrt{2} C^{\frac{1}{p}}(p,n)} \right\}. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку обчислимо

$$\mathbf{D}\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) = \mathbf{E}\widehat{\rho}^2_{T,n}(\tau) - (\rho(\tau) - r(\tau))^2. \tag{8}$$

Для цього розглянемо $\mathbf{E}\widehat{\rho}^2_{T,n}(\tau)$:

$$\mathbf{E}\widehat{\rho}^2_{T,n}(\tau) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right) - \hat{a}_\tau \right) \left(X\left(\frac{iT}{n}\right) - \hat{a} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(X\left(\frac{kT}{n} + \tau\right) - \hat{a}_\tau \right) \left(X\left(\frac{kT}{n}\right) - \hat{a} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right) - \hat{a}_\tau \right) \left(X\left(\frac{iT}{n}\right) - \hat{a} \right) \times \right.$$
$$\times \mathbf{E}\left(X\left(\frac{kT}{n} + \tau\right) - \hat{a}_\tau \right) \left(X\left(\frac{kT}{n}\right) - \hat{a} \right) + \mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n} + \tau\right) - \hat{a}_\tau \right) \times$$

$$\times\left(X\left(\frac{kT}{n}+\tau\right)-\hat{a}_\tau\right)\mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n}\right)-\hat{a}\right)\left(X\left(\frac{kT}{n}\right)-\hat{a}\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right)-\hat{a}_\tau\right)\left(X\left(\frac{kT}{n}\right)-\hat{a}\right)\mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n}\right)-\hat{a}\right)\times$$
$$\times\left(X\left(\frac{kT}{n}+\tau\right)-\hat{a}_\tau\right)\Bigg]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[S_1+S_2+S_3\right].$$

Розглнемо кожен із доданків окремо. Тоді для S_1 отримаємо:

$$S_1=\mathbf{E}\left(X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right)-\hat{a}_\tau\right)\left(X\left(\frac{iT}{n}\right)-\hat{a}\right)\mathbf{E}\left(X\left(\frac{kT}{n}+\tau\right)-\hat{a}_\tau\right)\times$$
$$\times\left(X\left(\frac{kT}{n}\right)-\hat{a}\right)=\left(\mathbf{E}X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right)X\left(\frac{iT}{n}\right)-\mathbf{E}\hat{a}X\left(\frac{iT}{n}+\tau\right)-\right.$$
$$-\mathbf{E}\hat{a}_\tau X\left(\frac{iT}{n}\right)+\mathbf{E}\hat{a}\hat{a}_\tau\Bigg)\left(\mathbf{E}X\left(\frac{kT}{n}+\tau\right)X\left(\frac{kT}{n}\right)-\mathbf{E}\hat{a}X\left(\frac{kT}{n}+\tau\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\mathbf{E}\hat{a}_\tau X\left(\frac{kT}{n}\right)+\mathbf{E}\hat{a}\hat{a}_\tau\right)\right)=\left[(\rho(\tau)+r(\tau))-\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)\right)\right]\left[(\rho(\tau)+r(\tau))-\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)\right)\right]=(\rho(\tau)+r(\tau))^2-(\rho(\tau)+r(\tau))\times$$
$$\times\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)\right)+\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)\right).$$

З аналогічних міркувань отримаємо, що

$$S_2=\left(\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}\right)+r(0)\right)^2-2\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}\right)+-\right.$$
$$\left.\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right)\right)-2r(0)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right)\right)+$$

$$+\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}\right)\right)^2+\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right)\right)^2\right].$$

та

$$S_3=\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)-\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)\times$$
$$\times\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)-\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+$$
$$+\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)r(\tau)-\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)\times$$
$$\times\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)-r(\tau)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}-\tau\right)-\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)\times$$
$$\times\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)-r(\tau)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)+$$
$$+r(\tau)\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)-r(\tau)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}+\tau\right)-$$
$$-r(\tau)\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+r^2(\tau).$$

Підставивши отримані значення S_1, S_2, S_3 в $\mathbf{E}\hat{\rho}^2(\tau)$ отримаємо, що

$$\mathbf{E}\hat{\rho}^2(\tau)=(\rho(\tau)-r(\tau))^2+r^2(0)+r^2(\tau)+$$
$$+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\rho^2\left(\frac{(i-k)T}{n}\right)+\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[2\rho\left(\frac{(j-i)T}{n}\right)\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}\right)+\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)\times\right.$$
$$\times\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)+\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)-\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}+\tau\right)\times$$

$$\times\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)+\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)+$$
$$+\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)-\rho\left(\frac{(i-k)T}{n}-\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)\Bigg]=$$
$$=\frac{1}{n^4}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right)\right]^2+\frac{1}{n^4}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}+\tau\right)\right]^2+$$
$$+\frac{T}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)[\rho^2\left(\frac{j}{n}\right)+\rho\left(\frac{j}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{j}{n}-\tau\right)]-$$
$$-\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)+2\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right)+\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}-\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)\right]+\left(\rho(\tau)-r(\tau)\right)^2.$$

Тоді з (8) випливає, що

$$\mathbf{D}\hat{\rho}(\tau)=\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right)\right]^2+\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}+\tau\right)\right]^2+$$
$$+\frac{2T}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\left[\rho^2\left(\frac{jT}{n}\right)+\rho\left(\frac{jT}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{jT}{n}-\tau\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}+\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}+\tau\right)+\right.$$
$$\left.+2\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right)+\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}-\tau\right)\rho\left(\frac{(j-k)T}{n}-\tau\right)\right]\quad(9)$$

З означення 1 та леми 1 випливає, що для кожного $\tau\geq 0$, $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)-\mathbf{E}\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$ є квадратично-гауссовою випадковою величиною. Це означає, що для цієї величини справджуються умови теореми 1, що разом з теоремою 3.2 роботи ([9]) дає справедливість оцінки (7) при $0<A<\infty$. З теореми 1 та формули (9) випливає формула (6) для $C(p,n)$

4. Побудова критерію для перевірки гіпотези.

Нехай $\mathbb{H}$ – гіпотеза, яка полягає в тому, що при $0\leq\tau\leq A$ кореляційна функція дійсного вимірного стаціонарного гауссового процесу X з невідомим математичним сподіваннямі дорівнює $\rho(\tau)$. Припустимо, що значення цього процесу відомі в моменти часу $t_i=\frac{iT}{n}$, $i=0,1,\ldots,n$, $n\in\mathbb{N}$. За оцінку $\rho(\tau)$ виберемо величину $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$.

Позначимо

$$g(\varepsilon)=2\left(1+\frac{\left(\varepsilon-\left(\int\limits_0^A|r(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}\right)\sqrt{2}}{C^{\frac{1}{p}}(p,n)}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{\varepsilon-\left(\int\limits_0^A|r(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}}{\sqrt{2}C^{\frac{1}{p}}(p,T)}\right\}.$$

Тоді з теореми 2 випливає, що якщо

$$\varepsilon \geq z_p := \left(\int\limits_0^A |r(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p} + \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right) C^{1/p}(p,n),$$

то

$$P\left\{\left(\int\limits_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq g\left(\varepsilon\right).$$

Нехай ε_δ – це розв'язок рівняння $g\left(\varepsilon\right) = \delta$, де $0 < \delta < 1$.

Виберемо $S_\delta = \max\{\varepsilon_\delta, z_p\}$. Тоді очевидно, що $g(S_\delta) \leq \delta$ та

$$P\left\{\left(\int\limits_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p} > S_\delta\right\} \leq \delta. \tag{10}$$

А це означає, що для перевірки гіпотези $\mathbb{H}$ можна використати наступний критерій.

Критерій 1. Для заданого рівня довіри δ гіпотеза $\mathbb{H}$ приймається, якщо

$$\left(\int\limits_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p} \leq S_\delta$$

і відкидається в протилежному випадку.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. На практиці зазвичай значення процесу спостерігаються в певні моменти часу. І на основі цих даних потрібно робити висновки про поведінку процесу, за яким ведеться спостереження. Саме тому, у роботі розглянуто гауссовий стаціонарний процес з невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок. Оцінено відхилення кореляційної функції цього процесу від її оцінки та побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції гауссового стаціонарного процесу з невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок. В наступних роботах планується побудувати критерії для перевірки гіпотез про вигляд кореляційної функції гауссового процесу за наявної конкретної альтернативної гіпотези.

Список використаної літератури

1. Buldygin V. *Properties of an empirical correlogram of a Gaussian process with squar-integrable spectral density.* Ukrain. Math. J. **47**, no. 7. 1995, p. 1006-1024.
2. Buldygin V., Kozachenko Yu. *Metric characterization of random variables and random processes.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
3. Buldygin V., Zayats V. *On asymptotic normality of estimates for correlation functions of stationary Gaussian processes in the spaces of continuous functions.* Ukrain. Math.l J. **47**, no.11. 1995, p. 1696-1710.
4. Ivanov A. *A limit theorem for the evaluation of the correlation function.* Theor. Probability and Math. Statist **19**. 1978, p.76-81.
5. Kozachenko Yu., Oleshko T. *Analytic properties of certain classes of pre-Gaussian stochastic processes.* Theor. Probability and Math. Statist. **48**. 1993, p. 37-51.

6. Kozachenko Yu., Stadnik A. *On the convergence of some functionals of Gaussian vectors in Orlicz spaces*. Theor. Probability and Math. Statist. **44**. 1991, p.80-87.
7. Kozachenko Yu., Stus O. *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*. Math. Communications. **3**, no.1. 1998, p. 83-94.
8. Kozachenko Yu., Troshki V. *A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process*. Modern Stochastics: Theory and Applications. **2**. 2015, p. 1-11.
9. Kozachenko Yu., Troshki V. *Construction of a criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean*. vol. 47, Issue 18. 2018, p. 4556-4567.
10. Kozachenko Yu., Fedoryanych T. *A criterion for testing hypotheses about the covarians function of a Gaussian stationary process*. Theor. Probability and Math. Statist. **69**. 2005, p. 85-94.
11. Leonenko N., Ivanov A. *Statistical Analysis of Random Fields*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
12. Fedoryanych T. *One estimate of the correlation function for Gaussian stochastic process*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. **2**. 2004, p. 72-76.

Troshki V. B., Troshki N. V., Tovt P. P. Estimates of the correlation function of a Gaussian stationary process when its values are known in a finite set of points.

In practice, process values are usually observed at certain points in time. And based on this data, we need to draw conclusions about the behavior of the process that is being monitored. That is why the primary purpose of the paper is to evaluate the covariance function of such a process. For this purpose, in this paper, we consider a Gaussian stationary random process X with unknown mean, when its values are known in a finite set of points and the task is to estimate the covariance function of such a random process. One feature of estimating the correlation function of a random process with an unknown mean is that the use of correlograms as an estimator is not possible, since the correlogram in this case is a biased estimation of the correlation function. Therefore, to prove the theorems, it was necessary to construct a statistics that would be an unbiased estimate of the covariance function of a Gaussian stationary random process. In addition, as shown in some of our previous papers and in this work, we are dealing with quadratic-Gaussian processes when estimating the deviations of the correlation function of a Gaussian stationary random process from a correlogram in the L_p-metric. Therefore, to prove this estimate was used the theory of quadratic-Gaussian random processes. Using this theory, we obtain estimates of the deviations of the correlation function of a Gaussian stationary random process with an unknown mean, when its values in the finite set of points of this process from its estimate in L_p-metric are known.
The paper also builds a criterion for testing the hypothesis of the appearance of the correlation function of such a random process. This criterion was formulated using the obtained estimates.

Keywords: statistics, hypothesis, criterion, quadratic-Gaussian process, L_p-metric.

References

1. Buldygin, V. (1995). *Properties of an empirical correlogram of a Gaussian process with squar-integrable spectral density*. Ukrain. Math. J., 47(7), 1006-1024.
2. Buldygin, V., & Kozachenko, Yu. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes*. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
3. Buldygin, V., & Zayats, V. (1995). *On asymptotic normality of estimates for correlation functions of stationary Gaussian processes in the spaces of continuous functions*. Ukrain. Math.l J., 47(11), 1696-1710.
4. Ivanov, A. (1978). *A limit theorem for the evaluation of the correlation function*. Theor. Probability and Math. Statist, 19, 76-81.
5. Kozachenko, Yu., & Oleshko, T. (1993). *Analytic properties of certain classes of pre-Gaussian stochastic processes*. Theor. Probability and Math. Statist, 48, 37-51.
6. Kozachenko, Yu., & Stadnik, A. (1991). *On the convergence of some functionals of Gaussian vectors in Orlicz spaces*. Theor. Probability and Math. Statist, 44, 80-87.

7. Kozachenko, Yu., & Stus, O. (1998) *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*. Math. Communications, 3(1), 83-94.
8. Kozachenko, Yu., & Troshki, V. (2015) *A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process*. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2, 1-11.
9. Kozachenko, Yu., & Troshki, V. (2018). *Construction of a criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean*. 47(18), 4556-4567.
10. Kozachenko, Yu., & Fedoryanych, T. (2005). *A criterion for testing hypotheses about the covarians function of a Gaussian stationary process*. Theor. Probability and Math. Statist, 69, 85-94.
11. Leonenko, N.,& Ivanov, A. (1989). *Statistical Analysis of Random Fields*. Kluwer, Dordrecht.
12. Fedoryanych, T. (2004). *One estimate of the correlation function for Gaussian stochastic process*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. 2, 72-76.

Одержано 04.04.2020