УДК 519.214.4
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).45-53

В. Ю. Богданський[1], О. І. Клесов[2]

[1] Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,
аспірант
myemailaddress4567@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5334-8471

[2] Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук
klesov@matan.kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0365-7716

ДО СТАТТІ БАССА І ПАЙКА

Присвячено світлій пам'яті Юрія Васильовича Козаченка

В 1984 році Р. Пайк та Р. Басс [1] запропонували вивчати рівномірні по класу множин граничні теореми для випадкових величин, які залежать від множин з певного класу. У цій роботі доводиться природне узагальнення теореми Басс-Пайка про рівномірний підсилений закон великих чисел для випадкових процесів, індексованих множинами. Замість сум випадкових величин по множинах, як у Басса–Пайка, ми розглядаємо більш загальну ситуацію випадкових зарядів та мір. Оскільки рівномірний закон великих чисел для випадкових зарядів та мір не може виконуватись для довільного класу множин, то ми використовуємо умову Басса-Пайка про рівномірну малість міри Лебега δ-околів множин класу. У випадку випадкових зарядів ми використовуємо додаткову умову про існування мажорантної міри. Цю умову у випадку випадкових мір можна, звичайно, опустити. Метод доведення основного результату цієї статті в цілому є модифікацією методу Басса-Пайка.

У ряді наслідків основного результату ми наводимо відповідні результати для конкретних ситуацій. Зокрема, у наслідку 2 ми показуємо як можна позбутися додаткової умови для випадкових зарядів. У наслідку 4 розглянуто випадок не обов'язково незалежних або однаково розподілених випадкових величин. Виявляється, що замість цього можна лише припустити, що виконується не рівномірний підсилений закон великих чисел. Більше того, гранична константа у цьому результаті не обов'язково має бути невипадковою. Для такої ж постановки у наслідку 5 показано як можна позбутися додаткової умови, яку ми накладаємо на випадкові заряди. Нарешті у наслідку 6 розглянуто випадок, коли випадкова міра породжується певним випадковим процесом.

Ще один основний результат цієї статті стосується рівномірного підсиленого закону великих чисел для аналога процесу відновлення. Як і у випадку сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, цей результат справджується у припущенні існування першого моменту. Жодного результата стосовно такого узагальненого процесу відновлення раніше відомо не було.

Ключові слова: посилений закон великих чисел, випадковий заряд, процес відновлення, рівномірний посилений закон великих чисел, випадковий процес, індексований множинами.

1. Вступ. Підсилений закон великих чисел для однаково розподілених випадкових величин Бернуллі було доведено у 1909 році Е. Борелем. Загальний випадок незалежних випадкових величин було розглянуто Колмогоровим, який довів, що у випадку існування першого моменту

$$\frac{S_n}{n} \to E[X_1] \qquad \text{майже напевно,}$$

де $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ – кумулятивні суми незалежних однаково розподілених випадкових величин X_k, $k \geq 1$, з скінченим математичним сподіванням. У подальшому цей результат узагальнювали у різних напрямках. Відома теорема Марцинкевича–Зігмунда – це фактично результат про швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел Колмогорова. Особлива увага приділялася сумам залежних випадкових величин, а також сумам випадкових елементів в абстрактних банахових просторах. Новий напрямок з'явився у 80-их роках XX сторіччя, який стосувався кратних сум випадкових величин. Цей випадок відрізнявся від усіх попередніх тим, що множини, за якими здійснюються підсумовування (прямокутники $[1, n_1] \times \cdots \times [1, n_d]$), не утворюють зростаючу послідовність. Наслідком цієї особливості є більш обмежливі моментні умови (див. [2]). Ще більш загальна конструкція сум за множинами з певного класу з'явилася в роботах Басса та Пайка (див., наприклад, [1]). При цьому твердження Басса та Пайка виконувались рівномірно за класом множин, що спричиняло необхідність накладати певні обмеження на класи множин. Аналоги теореми Басса–Пайка про підсилений закон великих чисел для так званих керованих сум доведено в [3], де знайдені достатні умови для

$$\frac{S_{(n)}}{n} \to E[X_1] \qquad \text{майже напевно,}$$

де $S_{(n)}$ – це суми (не обов'язково кумулятивні) незалежних однаково розподілених випадкових величин X_k, $k \geq 1$. Низку результатів, аналогічних теоремі Басса–Пайка, можна знайти в [4] та [5].

В цій роботі ми продовжуємо дослідження, розпочаті в [5]. Основним результатом статті стосовно рівномірного підсиленого закону великих чисел для сум за множинами є теорема 2. Оскільки рівномірний закон великих чисел для випадкових зарядів та мір не може виконуватись для довільного класу множин, то ми використовуємо умову Басса-Пайка про рівномірну малість міри Лебега δ-околів множин класу. У випадку випадкових зарядів ми використовуємо додаткову умову про існування мажорантної міри. Цю умову у випадку випадкових мір можна, звичайно, опустити.

Іншим основним результатом цієї статті є теорема 3 про рівномірний підсилений закон великих чисел для аналога процесу відновлення, а не для сум. Як і у випадку сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, цей результат справджується у припущенні існування першого моменту. Жодного результата стосовно такого узагальненого процесу відновлення раніше відомо не було.

2. Теорема Басса–Пайка. У статті [3] розглядається версія ПЗВЧ для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин з наборів, що не обов'язково містять один одного.

У статті [4] наводиться версія ПЗВЧ для випадкових зарядів.

У статті [1] Р. Басс і Р. Пайк довели наступне твердження (яке є версією рівномірного ПЗВЧ):

Теорема 1. *Позначимо:*
kB – *множина* $\{kx : x \in B\}$, *де* $k \in \mathbb{R}$, $B \subset R^d$;
$\mathbb{R}^d_+$ – *множина точок з додатними координатами в* $\mathbb{R}^d$;
$J = \{1, 2, \ldots\}^d$ – *множина точок з цілими координатами в* $\mathbb{R}^d_+$.

Нехай $\mathcal{A}$ – *деяка сукупність борелевських підмножин* $[0,1]^d \subset R^d$, *така, що*

$$r(\delta) \equiv \sup_{A \in \mathcal{A}} |A(\delta)| \to 0, \ \delta \to 0, \tag{1}$$

де $A(\delta) = \{x : \rho(x, \partial A) < \delta\}$ – δ-*окіл границі множини* A; $|A|$ – *міра Лебега множини* $A \in \mathbb{R}^d$.

Нехай $\{X_j\}, j \in J$, – *сукупність незалежних і однаково розподілених випадкових величин зі скінченним математичним сподіванням* $EX_j = \mu < \infty$. *Позначимо* $S(B) = \sum_{j \in B} X_j$. *Тоді*

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \to 0, n \to \infty, \textit{м.н.}$$

У цій статті наводиться його природне узагальнення і декілька наслідків з цього узагальнення. Також доводиться аналогічне твердження для процесу відновлення.

3. Основний результат.

Теорема 2. *Нехай:*

$\mathcal{A}$ – *деяка сукупність борелевських підмножин* I, *де* $I = (0,1]^d$ - *півінтервал в* R^d;

X – *деякий випадковий заряд. Тут під “випадковим зарядом” розуміємо функцію, задану на* $\overline{\mathbb{B}} \times \Omega$, *де* $\overline{\mathbb{B}}$ – *сукупність обмежених борелевських підмножин* $\mathbb{R}^d_+$, *що є зарядом при фіксованому* $\omega \in \Omega$, *а при фіксованому* $B \in \overline{\mathbb{B}}$ – *випадковою величиною. Аналогічно визначаємо випадкову міру.*

Припустимо, що на $\mathcal{A}$ *та* X *накладені наступні умови:*

1) Для $\mathcal{A}$ *виконується* (1).

2) Існує Y – *випадкова міра, задана на обмежених борелевських підмножинах* $\mathbb{R}^d_+$, *така, що* $Y \geq |X|$, *і майже напевно* $\exists\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, *що* $\forall B \in \mathcal{C}$ *виконується:*

$$\frac{X(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty, \tag{2}$$

$$\frac{Y(nB)}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, n \to \infty. \tag{3}$$

Тут $\mathcal{C}$ – *сукупність множин* $\left(0, \dfrac{j}{m}\right] \subset I$, *де* $j \in J$, $m \in \mathbb{N}$; $(x, y]$ – *півінтервал в* $\mathbb{R}^d$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ *і всі координати* y *більші за відповідні координати* x.

Позначимо через $\mu(\omega)$ *і* $\lambda(\omega)$ *відповідні майже напевно визначені функції* $\Omega \to \mathbb{R}$.

Тоді

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \to 0, n \to \infty, \textit{м.н.} \tag{4}$$

Доведення. Доведення аналогічне до доведення теореми 1 з [1].

Позначимо $C_j^m = \frac{1}{m}(j-1, j]$, де $j \in J, m \in \mathbb{N}$ і $j \in mI$; $\mathcal{B}$ – сукупність всіх можливих множин, які є об'єднаннями деяких C_j^m при фіксованому m.

Спочатку покажемо, що якщо для деякого ω існує таке μ, що $\forall\, B \in \mathcal{C}$ виконується (12), тоді умова (12) виконується також для $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

Дійсно, помітимо, що якщо (12) виконується для двох множин B_1 і B_2, що не перетинаються, тоді умова (12) також виконується для $B_1 \cup B_2$. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_1 \cup B_2))}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_1))}{n^d} + \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_2))}{n^d} =$$

$$= \mu \cdot |B_1| + \mu \cdot |B_2| = \mu \cdot |B_1 \cup B_2|.$$

Аналогічно, якщо (12) виконується для B_1 і B_2, причому $B_1 \subset B_2$, то (12) виконується для $B_2 \backslash B_1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_2 \backslash B_1))}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_2))}{n^d} - \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_1))}{n^d} = \mu \cdot |B_2| - \mu \cdot |B_1| = \mu \cdot |B_2 \backslash B_1|.$$

Покажемо, що кожну множину $B \in \mathcal{B}$ можна отримати за декілька кроків з множин $\mathcal{C}$ шляхом застосування цих двох операцій. Оскільки $B \in \mathcal{B}$ є об'єднанням множин C_j^m, то достатньо довести, що кожну множину вигляду $(x, y] = \left(\frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m}\right] \subset I$, де $j_1, j_2 \in J$, можна отримати з множин $\mathcal{C}$ шляхом застосування другої з цих операцій за скінченну кількість кроків.

Позначимо $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d)$, де $x_i \in \{0, 1, ..., m-1\}$, $y_i \in \{1, 2, ..., m\}$. Скористаємося індукцією за k, де $k \in \{0, 1, ..., d\}$ – найменше число, для якого $x_l = 0, \forall k < l \le d$. При $k = 0$ твердження очевидне. Якщо твердження виконується для $k = s < d$, то воно також виконується для $k = s+1$, оскільки якщо $x = (x_1, ..., x_{s+1}, 0, ..., 0)$, $x' = (x_1, ..., x_s, 0, ..., 0)$, то $(x, y] = (x', y] \backslash (x', (y_1, y_2, ..., y_s, x_{s+1}, y_{s+2}, ..., y_d)]$.

Застосовуючи аналогічні міркування для (3), отримаємо, що майже напевно $\exists\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, що $\forall\, B \in \mathcal{B}$ виконуються (12) і (3).

Позначимо $B'_m = \bigcup_{\mathbf{j}\,:\, C_j^m \subseteq B} C_j^m$, $B''_m = \bigcup_{\mathbf{j}\,:\, C_j^m \cap B \neq \varnothing} C_j^m$, де $B \subset R_+^d$, $m \in \mathbb{N}$.

Помітимо, що для всіх ω, для яких визначено μ і λ, і для всіх $m \in \mathbb{N}$ виконується

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA)}{n^d} - \mu |A| \right| \le X_m + Y_m + Z_m,$$

де

$$X_m = \limsup_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA) - X(nA'_m)}{n^d} \right|,$$

$$Y_m = \limsup_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA'_m)}{n^d} - \mu |A'_m| \right|,$$

$$Z_m = |\mu| \cdot \sup_{A \in \mathcal{A}} |A \backslash A'_m|.$$

Отже, для доведення (4) достатньо показати, що для всіх ω, для яких визначено μ і λ (а μ і λ визначені майже напевно), виконується $X_m, Y_m, Z_m \to 0$, $m \to \infty$.

$Z_m \to 0, m \to \infty$, оскільки $Z_m \le |\mu| \cdot r(\sqrt{d}/m) \to 0, m \to \infty$, внаслідок (1).

Оскільки $A'_m \in \mathcal{B}$, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall m \in \mathbb{N}$, то внаслідок (12) отримаємо, що $\limsup_{n\to\infty}\left|\dfrac{X(nA'_m)}{n^d} - \mu|A'_m|\right| = 0$, і, оскільки $\{A'_m \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ містить скінченну кількість елементів, то $Y_m = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

Помітимо, що $X_m \le \limsup_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\dfrac{Y(n(A''_m\backslash A'_m))}{n^d}\right|$. Оскільки $(A''_m\backslash A'_m) \in \mathcal{B}$, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall m \in \mathbb{N}$, то внаслідок (3) $\limsup_{n\to\infty}\left|\dfrac{Y(n(A''_m\backslash A'_m))}{n^d}\right| = \lambda \cdot |A''_m\backslash A'_m|$, і, оскільки $\{A''_m\backslash A'_m \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ містить скінченну кількість елементів, то $X_m \le \lambda \cdot \sup_{A\in\mathcal{A}} |A''_m\backslash A'_m| \le \lambda \cdot r(\sqrt{d}/m) \to 0, m \to \infty$.

Наслідок 1. *Якщо X – випадкова міра, то додаткова умова на існування Y, звісно, не вимагається.*

Наслідок 2. *Нехай $\{X_j \,|\, j \in J\}$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини з $E[|X_j|] < \infty$ і $E[X_j] = \mu$, $S(B) = \sum_{j\in B} X_j$, $T(B) = \sum_{j\in B} |X_j|$. Тоді якщо $X(B) \equiv S(B)$, то при $Y(B) \equiv T(B)$, $\lambda = E[|X_j|]$ виконується умова теореми* (2).

Доведення. Дійсно, оскільки $\mathcal{C}$ є зліченою множиною, то достатньо довести, що $\forall\, B \in \mathcal{C}$ твердження (12) і (3) виконуються майже напевно. Це є наслідком закона великих чисел: $\dfrac{X(nB)}{n^d} = \dfrac{X(nB)}{W(nB)} \cdot \dfrac{W(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty$, м.н.; для (3) аналогічно. Тут через $W(A)$ ми позначаємо кількість цілих точок, що належать множині $A \subset \mathbb{R}^d_+$.

У статті [5] показується, що твердження теореми 1 залишається еквівалентним при заміні умови «$\mathcal{A}$ – деяка сукупність борелевських підмножин $[0,1]^d \subset R^d$» на умову «$\mathcal{A}$ - деяка сукупність борелевських підмножин $(0,1]^d \subset R^d$». Отже, теорема 1 є наслідком теореми 2.

Наслідок 3. *Якщо $X(B) \equiv \sum_{j\in J} |B \cap C^1_j| \cdot X_j$, де $\{X_j \,|\, j \in J\}$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини з $E[|X_j|] < \infty$ і $E[X_j] = \mu$, то при $Y(B) = \sum_{j\in J} |B \cap C^1_j| \cdot |X_j|$, $\lambda = E[|X_j|]$ виконується умова теореми* (2).

Доведення. Знову ж, для (12) достатньо довести, що $\forall\, B \in \mathcal{C}$ виконується $\dfrac{X(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty$, м.н. Покажемо це.

Скористаємося позначеннями $S(B)$ і $T(B)$ з наслідка (2). Помітимо, що $|X(nB) - S(nB)| \le T(n(0, x + \frac{1}{n}]) - T(nB)$, де $B = (0, x]$. Оскільки $\dfrac{S(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|$, $\dfrac{T(nB)}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, n \to \infty$, м.н., то достатньо довести, що $\dfrac{T(n(0, x + \frac{1}{n}])}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, n \to \infty$, м.н. Нехай $B_m = (0, x + \frac{1}{m}]$, де $m \in \mathbb{N}$, $B_0 = B$. Тоді майже напевно справедливо, що $\forall m \ge 0$ виконується $\dfrac{T(nB_m)}{n^d} \to \lambda \cdot |B_m|, n \to \infty$. Неважко зрозуміти, что для цих ω $\forall m \in \mathbb{N}$ виконується $\lambda \cdot |B| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{T(nB)}{n^d} \le$

$\liminf \dfrac{T(nB_n)}{n^d} \leq \limsup \dfrac{T(nB_n)}{n^d} \leq \limsup \dfrac{T(nB_m)}{n^d} = \lambda \cdot |B_m|$. Оскільки m береться довільно, то отримуємо потрібне твердження. (3) доводиться аналогічно.

Наслідок 4. *Якщо $X(A) = S(A)$, як у наслідку 2, але $\{X_j\}$ не обов'язково незалежні і однаково розподілені, проте на них накладена умова*

$$\frac{S(k)}{|k|} \to \mu(\omega), |k| \to \infty, \textit{м.н.}, \tag{5}$$

де $S(x) \equiv S((0,x])$, $k \in J$, і T також задовольняє аналогічній умові, то умова теореми 2 виконується, оскільки якщо для ω виконується (5), то для нього $\forall\, B = (0,x] \in \mathcal{C}$ виконується $\dfrac{S(nx)}{n^d} = \dfrac{S([nx])}{|[nx]|} \cdot \dfrac{|[nx]|}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty$; тут $[y] = ([y_1],[y_2],...,[y_d])$, якщо $y = (y_1, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$.

Наслідок 5. *Якщо $X(A) = S(A)$, як у наслідку 2, але $\{X_j\}$ не обов'язково незалежні і однаково розподілені, проте $\exists\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, що для будь-якої послідовності $\{X_{j_i}\}$, $i \geq 1$, виконується, що $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{j_i} \to \mu$, $n \to \infty$, м.н. і $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_{j_i}| \to \lambda$, $n \to \infty$, м.н., то умова теореми 2 виконується.*

Доведення цього таке ж саме, як у наслідку 2.

Наслідок 6. *Нехай $f(x)$ – випадкова функція $\mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$, така, що вона породжує випадковий заряд $X((0,x]) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d_+$, який є обмеженим на борелевських підмножинах $\mathbb{R}^d_+$. Якщо покласти $\mathcal{A} = \{(0,x] | x \in I\}$, то, очевидно, умова (1) теореми 2 буде виконуватись. Нехай при цьому заряд, що породжується функцією f, є невід'ємним, і існує така випадкова величина μ, що $\forall x \in I \cap Q$ виконується*

$$\frac{f(nx)}{n^d} \to \mu|x|, n \to \infty, \textit{м.н.},$$

де Q – множина точок $\mathbb{R}^d$ з раціональними координатами.

Тоді

$$\sup_{x \in I} \left| \frac{f(nx)}{n^d} - \mu|x| \right| \to 0, n \to \infty, \textit{м.н.}$$

Теорема 3. *Нехай $X(B)$ і $\mathcal{A}$ задовольняють умову теореми 1. Припустимо додатково, що:*

$$X(nA) \to +\infty, n \to \infty, \forall A \in \mathcal{A}, \textit{м.н.} \tag{6}$$

і

$$X(B) \leq X(C), \forall B, C, B \subset C, \textit{м.н.} \tag{7}$$

Позначимо через $N_t(A)$ найменше натуральне число, починаючи з якого для всіх натуральних чисел виконується $X(nA) > t$ (для кожного $A \in \mathcal{A}$ і $t > 0$ це буде випадкова величина, що згідно з (6) визначена м.н.).

Тоді

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\to 0, t\to\infty, \textit{м.н.}$$

Доведення.

З теореми 2 маємо (4). З (4) і умов (6) і (7) випливає, що майже напевно виконуються всі наступні твердження:

$$X(nA)\to+\infty, n\to\infty, \forall A\in\mathcal{A}, \tag{8}$$

$$X(B)\le X(C), \forall B, C, B\subset C, \tag{9}$$

і

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X(nA)}{n^d}-\mu|A|\right|\to 0, n\to\infty. \tag{10}$$

Покажемо, що для всіх ω, для яких виконуються ці три твердження, виконується також наступне твердження:

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\to 0, t\to\infty. \tag{11}$$

Очевидно, що внаслідок (8) і (9) виконується $X(nI)\to+\infty, n\to\infty$, тобто можна казати про $N_t(I)$. Помітимо, що якщо $t>X(I)$, то внаслідок (9) $\forall A\in\mathcal{A}$ $N_t(A)\ge N_t(I)\ge 2$. Для таких t $\forall A\in\mathcal{A}$ виконується:

$$X(N_t(A)\cdot A)>t\ge X((N_t(A)-1)\cdot A),$$

а тому

$$\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\le\max\left\{\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|,\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\right\}\le$$
$$\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|+\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|=I_1+I_2.$$

$$I_2\le\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A)-1)^d}-\mu|A|\right|\cdot\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d+\mu\cdot|A|\cdot\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|\le$$
$$\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A)-1)^d}-\mu|A|\right|+\mu\cdot|A|\cdot\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|=I_3+I_4.$$

Отже, потрібно довести, що:

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\to 0,\ t\to\infty; \tag{12}$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A)-1)^d}-\mu|A|\right|\to 0,\ t\to\infty; \tag{13}$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}|A|\cdot\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|\to 0,\ t\to\infty. \tag{14}$$

Внаслідок (10) $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \forall\,n\geq N$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X(nA)}{n^d}-\mu|A|\right|\leq\varepsilon,$$

що рівносильно тому, що $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,N\in\mathbb{N}\ \forall\,n\geq N\ \forall\,A\in\mathcal{A}\ \left|\frac{X(nA)}{n^d}-\mu|A|\right|\leq\varepsilon$. Якщо взяти таке K, що $N_K(I)\geq N$, то, так як $\forall t\geq K$, $\forall A\in\mathcal{A}$ виконується $N_t(A)\geq N_t(I)\geq N_K(I)\geq N$, то $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,K>0\ \forall\,t\geq K\ \forall\,A\in\mathcal{A}$ $\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\leq\varepsilon$, що доводить (12). Умова (13) доводиться аналогічно. Умова (14) виконується, оскільки

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}|A|\cdot\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|\leq\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|\leq$$
$$\left|1-\left(\frac{N_t(I)-1}{N_t(I)}\right)^d\right|\to 0,\ t\to\infty.$$

Наслідок 7. *З теореми 3 також випливає, що*

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t^{1/d}}{(N_t(A))}-(\mu|A|)^{1/d}\right|\to 0, t\to\infty, \textit{м.н.} \tag{15}$$

Дійсно, якщо для $\omega\in\Omega$ виконується (11), то для нього виконується і (15):

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t^{1/d}}{N_t(A)}-(\mu|A|)^{1/d}\right|\leq\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|^{1/d}=$$
$$\left(\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\right)^{1/d}\to 0,\ t\to\infty.$$

4. Перспективи подальших досліджень. Від умови (2) теореми 2 відмовитись у загальному випадку неможливо, але можна сподіватись, що її можна замінити на більш просту. Пошук більш простої умови замість умови (2) є одним з напрямків подальших досліджень. Іншим напрямком є розширення сфери застосувань наслідка 4 для залежних випадкових величин.

Список використаної літератури

1. Bass R. F., Pyke R. Strong Law of Large Numbers for Partial-Sum Processes Indexed by Sets. *Ann. Probab.* 1984. Vol. 12, No. 1. P. 268–271.
2. Klesov O. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2014. 501 p.
3. Baum L. E., Katz M., Stratton H. H. Strong laws for ruled sums. *Ann. Math. Statist.* 1971. Vol. 42, No. 2. P. 625–629.

4. Klesov O. I., Molchanov I. Uniform strong law of large numbers for random signed measures, in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky). Switzerland:Springer International Publishing AG, Cham, 2019. 335–350 pp.
5. Bogdanskii V. Y., Klesov O. I., Molchanov I. Uniform Strong Law of Large Numbers. *Methodol Comput. Appl. Probab.* 2019. `https://doi.org/10.1007/s11009-019-09711-x`

Bogdanskii V. Yu., Klesov O. I. To the article of Bass and Pyke.

In 1984, R. Pyke and R. Bass [4] proposed to study the limit theorems uniformly with respect to classes of sets for random variables that depend on sets of a certain class. This paper provides a natural generalization of the Bass–Pike theorem on the uniform law of large numbers for random processes indexed by sets. Instead of the sums of random variables indexed by sets, as in the Bass–Pike setting, we consider in Theorem 2 a more general situation of random charges and measures. Since the uniform law of large numbers for random charges and measures does not hold for an arbitrary class of sets, we use the Bass–Pyke condition imposed on the class. This condition means the uniform smallness of the Lebesgue measure of δ-neighborhoods of the sets. In the case of random charges, we use the additional condition on the existence of a majorant measure. This condition can, of course, be omitted in the case of random measures. The method of the proof of the main results of this article resembles the on in the Bass–Pyke paper.

In a number of corollaries of the main result, we present the corresponding results for special cases. In particular, in Corollary 2 we show how to get rid of the additional condition for random charges. In Corollary 4, the case of not necessarily independent or equally distributed random variables is considered. It turns out that instead we can assume that the non-uniform strong law of large numbers is fulfilled. Moreover, the limit constant in this case is not necessarily random. does not have to be accidental. For the same setting, Corollary 5 shows how we can get rid of the additional condition that we impose on random charges. Finally, Corollary 6 considers the case where a random measure is generated by a certain stochastic process.

Another main result of this paper, Theorem 3, applies to the uniform strong law of large numbers for an analogue of the renewal process. As in the case of sums of independent identically distributed random variables, this result holds under the assumption of the existence of the first moment. No results were previously known for such a generalized renewal process.

Further studies of the uniformly strong law of large numbers will be concentrated in searching a condition simpler than the existence of a majorant measure. Some examples of situations in which this condition can be omitted, are given in the corollaries to Theorem 1. However, in the general case, this condition cannot be omitted.

Keywords: strong law of large numbers, random signed measure, renewal process, uniform strong law of large numbers, random processes indexed by sets.

References

1. Bass, R. F., & Pyke, R. (1984). Strong Law of Large Numbers for Partial-Sum Processes Indexed by Sets. *Ann. Probab., 12, 1*, 268–271.
2. Klesov, O. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. (2014). *Springer, Berlin–Heidelberg–New York.*
3. Baum, L. E., Katz, M., & Stratton, H. H. (1971). Strong laws for ruled sums. *Ann. Math. Statist., 42, 2*, 625–629.
4. Klesov, O. I., & Molchanov, I. (2019). Uniform strong law of large numbers for random signed measures, in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky). *Switzerland:Springer International Publishing AG, Cham.* 335–350.
5. Bogdanskii, V. Y., Klesov, O. I., & Molchanov, I. Uniform Strong Law of Large Numbers. (2019). *Methodol Comput. Appl. Probab.* `https://doi.org/10.1007/s11009-019-09711-x`

Одержано 28.09.2020