УДК 517.9, 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).66-74

І. І. Король[1], Р. М. Блажівська[2]

[1] Ужгородський національний університет,
професор кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики,
доктор фізико-математичних наук
ihor.korol@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7826-0249

[2] Ужгородський національний університет,
аспірантка кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики,
roksolana.blazhivska@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2557-533X

ІНТЕГРУВАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

При математичному описанні різного роду процесів і явищ в електроніці, радіотехніці, економіці, біології часто приходять до необхідності дослідження вироджених систем диференціальних рівнянь, зокрема, систем з виродженою матрицею при похідній. Частина науковців називає такі системи диференціально-алгебраїчними. Вони вирізняються складністю при дослідженнях, оскільки навіть у випадку лінійних систем і неперервних функцій задача Коші може не мати розв'язків. У лінійному випадку для дослідження таких систем розроблено низку методів - за допомогою досконалих пар і трійок матриць, псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць та шляхом зведення до центральної канонічної форми. Суттєво складнішою є проблема встановлення конструктивних достатніх умов існування та розробка і обгрунтування методів побудови розв'язків задачі Коші для нелінійних систем з виродженою матрицею при похідній. Більшість науковців використовують для цього модифікації різного роду числових методів. Суттєво складнішою є задача розробки методів наближеного інтегрування крайових задач для таких систем. Важливою є проблема розробки методів побудови розв'язків задачі Коші для нелінійних систем з виродженою матрицею при похідній. Більшість науковців використовують для цього модифікації різного роду числових методів. Суттєво складнішою є проблема встановлення конструктивних достатніх умов існування та розробка і обгрунтування методів наближеного інтегрування крайових задач для таких систем. Свою ефективність для дослідження надзвичайно широкого класу крайових задач показав чисельно-аналітичний метод А.М.Самойленка. Останнім часом розроблено його модифікації для наближеного інтегрування крайових задач для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній. У даній роботі використовується апарат псевдообернених за Муром-Пенрозуом матриць та ортопроекторів. Запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу з метою розширення його використання на дослідження існування та наближену побудову розв'язків нелінійних диференціальних систем з виродженою матрицею при похідній, які піддаються імпульсному впливу і підпорядковані лінійним нерозділеним двоточковим крайовим обмеженням. Розглянуто критичний випадок - коли відповідна лінійна однорідна вироджена крайова задача має ненульові розв'язки. Встановлено необхідні та конструктивні достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки побудованих наближених розв'язків.

Ключові слова: крайова задача, вироджені диференціальні системи, імпульсна дія.

1. Вступ. При дослідженні різноманітних процесів приводить до необхідності дослідження нелінійних алгебраїчно-диференціальних рівнянь. У лінійному випадку такі системи вивчалися в роботах А.М. Самойленка, О.А.Бойчука, В.П.Яковця, S.L.Campbell [1]- [3] за допомогою зведення до центральної канонічної форми, використання псевдооберненої матриці. При дослідженні розв'язків крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь широко застосовується чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М. Самойленка [4]. Г.Я.Семчишин [5] вивчала можливість застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень до інтегрування крайових задач для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній.

2. Постановка задачі. Розглянемо вироджену нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$J\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i) + b_i, \tag{2}$$

яка задовольняє крайові умови

$$A_1 x(a) + A_2 x(b) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3}$$

де $J - n$-вимірна клітка Жордана, яка відповідає нульовому власному значенню, $A(t)$ – $(n \times n)$-вимірна матриця з неперервними на $[a,b]$ коефіцієнтами, $f(t,x)$ – n- вимірна неперервна на $[a;b]$ вектор-функція; A_1, A_2 – $((n-1)\times n)$- вимірні матриці, d – $(n-1)$- вимірний сталий вектор, $a \le \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p \le b$, B_i – $(n \times n)$- вимірні матриці, $b_i \in \mathbb{R}^n$– сталі вектори, $i = \overline{1,p}$.

Функцію $x \in C^1_{loc}([a,b] \backslash \{\tau_i\}_{i=1}^p, \mathbb{R}^n)$ будемо називати розв'язком крайової задачі (1)–(3) якщо вона задовольняє систему (1), імпульсні умови (2) та крайові умови (3).

Представимо матриці $A(t)$, A_1, A_2 так:

$$A(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ a_{n,1}(t) & D_3(t) \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

де $D_1(t), A_{11}, A_{21}$ – $(n-1)$-вимірні вектор-стовпці, $D_2(t), A_{12}, A_{22})$ – $((n-1) \times (n-1))$-вимірні сталі матриці, $D_3(t)$ – $(n-1)$-вимірний вектор-рядок.

Нехай $x(t) = col\,[x_1(t), v(t)]^{\top}$, де $v(t) = col(x_2(t), \ldots, x_n(t))$ – $(n-1)$-вимірна вектор-функція.

Тоді вироджену систему рівнянь (1) можна записати наступним чином

$$v' = D_1(t)x_1 + D_2(t)v + J_1 f(t,x), \tag{4}$$

$$0 = a_{n,1}(t)x_1 + D_3(t)v + f_n(t,x), \tag{5}$$

а лінійні двоточкові крайові умови (3):

$$A_{11}x_1(0) + A_{12}v(0) + A_{21}x_1(T) + A_{22}v(T) = d. \tag{6}$$

Припустимо, що

$$f_n(t,x) = f_n(t, x_2, \ldots, x_n) = f_n(t,v). \tag{7}$$

Будемо вважати, що $a_{n,1}(t) \neq 0 \ \forall t \in [0,T]$.

Тоді з (5) можемо виразити x_1:

$$x_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(t)} \left(D_3(t)v + f_n(t,v) \right),$$

та підставити його в систему (4) та крайові умови (6).

В результаті цього одержимо наступну нормальну нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v(t) + \widehat{f}(t,v), \tag{8}$$

підпорядковану нелінійним двоточковим крайовим умовам з виділеною лінійною частиною

$$C_1 v(a) + C_2 v(b) = \widehat{d}, \tag{9}$$

де $\widehat{A}(t)$ – $((n-1)\times(n-1))$-вимірна матриця, $\widehat{f}(t,v)$ – $(n-1)$-вимірна вектор-функція вигляду

$$\widehat{A}(t) = D_2(t) - \frac{1}{a_{n,1}(t)} D_1(t) D_3(t),$$

$$\widehat{f}(t,v) = \left(J_1 - \frac{1}{a_{n,1}(t)} D_1(t) J_2 \right) f(t,x),$$

C_1, C_2 – $((n-1)\times(n-1))$-вимірні сталі матриці, $\widehat{d}$ – $(n-1)$-вимірний вектор-стовпець сталих вигляду

$$C_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(a)} A_{11} D_3(a) + A_{12}, \qquad C_2 = -\frac{1}{a_{n,1}(b)} A_{21} D_3(b) + A_{22},$$

$$\widehat{d} = d + \frac{1}{a_{n,1}(a)} A_{11} f_n(a, v(a)) + \frac{1}{a_{n,1}(b)} A_{21} f_n(b, v(b)),$$

J_1 – $((n-1)\times n)$-вимірна матриця, J_2 – n-вимірний вектор-рядок вигляду

$$J_1 = [E_{n-1}, 0_{n-1,1}], \quad J_2 = [0_{1,n-1}, 1],$$

E_k – $(k\times k)$-вимірна одинична матриця, $0_{k,l}$ – $(k\times l)$-вимірна нульова матриця.

Розглянемо імпульсні умови (2). Припустимо, що $\forall i = \overline{1,p}$ матриці B_i мають таку структуру

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \widehat{B}_i \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{b}_i \end{bmatrix}, \quad \widehat{b}_i \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad det\widehat{B}_i \neq 0. \tag{10}$$

Тоді імпульсні умови (2) можемо записати у вигляді:

$$\Delta v|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v(\tau_i) + \widehat{b}_i. \tag{11}$$

Отже першопочаткову вироджену імпульсну систему (1)–(3) можемо записати у вигляді:

$$x_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(t)}\left(D_3(t)v + f_n(t,v)\right),$$

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v(t) + \widehat{f}(t,v), \tag{8}$$

$$C_1v(a) + C_2v(b) = \widehat{d}, \tag{9}$$

$$\Delta v|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v(\tau_i) + \widehat{b}_i. \tag{11}$$

3. Лінійна крайова задача. Розглянемо спочатку лінійну невироджену імпульсну систему

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v(t) + \widehat{h}(t), \quad t \neq \tau_i, \quad v, \widehat{h} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{12}$$

яка підпорядкована крайовим умовам (9). Відомо [6], що її розв'язок $v(t, v_0)$, $v(a, v_0) = v_0$ має вигляд

$$v(t,x_0) = V(t)v_0 + \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds + \sum_{a \le \tau_i < t} V(t,\tau_i+0)\widehat{b}_i, \tag{13}$$

де $V(t)$ – матрицант відповідної лінійної однорідної системи з імпульсною дією

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v, \quad t \neq \tau_i, \quad t, \tau_i \in [a,b], \quad \Delta v|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v, \tag{14}$$

$V(t) = V(t,a)$, $V(a) = \mathbb{E}_n$, $V(t,s) = V(t)V^{-1}(s)$, $V(t,\tau_i+0) = (\mathbb{E}_{n-1} + \widehat{B}_i)^{-1}V(t,\tau_i)$.

Підставляючи (13) в крайові умови (9) бачимо, що необхідною умовою розв'язності крайової задачі (12), (9) є існування розв'язку алгебраїчної системи

$$Gv_0 = \widehat{d} - C_2\left\{\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)b_i\right\}, \tag{15}$$

де

$$G = C_1V(a) + C_2V(b). \tag{16}$$

У некритичному випадку алгебраїчна система (15) має єдиний розв'язок

$$v_0 = G^{-1}\left(\widehat{d} - C_2\left\{\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\}\right),$$

який є початковим значенням єдиного розв'язку задачі (12), (9)

$$v(t) = V(t)G^{-1}\left(\widehat{d} - C_2\left\{\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\}\right) +$$
$$+ \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds + \sum_{a \le \tau_i < t} V(t,\tau_i+0)\widehat{b}_i.$$

У критичному випадку алгебраїчна система (15), і, відповідно, крайова задача (12), (9) може не мати розв'язків. Покажемо, що праву частину лінійної імпульсної диференціальної системи завжди можна змінити так, щоб "збурена"лінійна імпульсна крайова задача мала розв'язки.

Припустимо, що $rank(G)=n-1-k$, $1\leq k\leq n-2$, де G — матриця вигляду (16). Тоді для довільних векторів $\widehat{d},\widehat{b}_i\in\mathbb{R}^n$ і функції $\widehat{h}(t)\in C_{loc}([a,b]\backslash\{\tau_i\}_{i=1}^p,\mathbb{R}^n)$ існує функція $H(t)\in C_{loc}([a,b]\backslash\{\tau_i\}_{i=1}^p,\mathbb{R}^n)$ така, що збурена лінійна неоднорідна диференціальна система з імпульсною дією

$$\frac{dv}{dt}=\widehat{A}(t)v+\widehat{h}(t)+H(t),\quad t\neq\tau_i,\quad t,\tau_i\in[a,b],\quad \Delta x|_{t=\tau_i}=\widehat{B}_iv+\widehat{b}_i \tag{17}$$

матиме k-параметричну сім'ю розв'язків, які задовольняють крайові умови (9).

Безпосередня перевірка показує, що умова (9) буде виконана, якщо функцію $H(t)$ вибрати наступним чином

$$H(t)=V^\top(b,t)C_2^\top P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\left(\widehat{d}-C_2\left\{\int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds-\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\}\right),$$

де G^+ — єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до G матриця, $P_{G_k^\top}$ – $(k\times(n-1))$-вимірна матриця-ортопроектор, P_{G_k} – $((n-1)\times k)$-вимірна матриця-ортопроектор, $\xi\in\mathbb{R}^k$ – вектор довільних сталих,

$$R_1=P_{G_{d,k}^\top}R_2,\qquad R_2=C_2\int_0^b V(b,s)V^\top(b,s)B_2^\top ds. \tag{18}$$

При цьому розв'язок імпульсної системи (17) має вигляд

$$v(t,v_0)=V(t,0)v_0+\int_0^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds+ \tag{19}$$

$$+\int_0^t V(t,s)V^\top(b,s)C_2^\top P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\left(\widehat{d}-C_2\left\{\int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds-\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\}\right)ds$$

Підставляючи (19) в (9) бачимо, що $v(t)$ задовольняє крайові умови (9) тоді і тільки тоді, коли початкове значення v_0 є розв'язком алгебраїчної системи

$$Gv_0=\left(\mathbb{E}_n-R_2R_1^{-1}P_{G_{d,k}^\top}\right)\left(\widehat{d}-C_2\left\{\int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds-\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\}\right). \tag{20}$$

Оскільки $P_{G_{d,k}}\left(\mathbb{E}_n-R_2R_1^{-1}P_{G_{d,k}^\top}\right)=0$, то система (20) сумісна і її загальний розв'язок має вигляд

$$v_0=P_{G_{d,k}}\xi+G^+\left(\mathbb{E}_n-R_2R_1^{-1}P_{G_{d,k}^\top}\right)\left(\widehat{d}-C_2\left\{\int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds-\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\}\right), \tag{21}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^k$ — довільний вектор, $P_{G_{d,k}}$, $P_{G^\top_{d,k}}$ – відповідні ортогональні проектори, G^+ – псевдообернена матриця. Знаходимо початкове значення v_0 таке, при якому розв'язок буде задовольняти крайові умови, і, підставляючи його в загальний розв'язок, після певних перетворень одержуємо k-параметричну сім'ю розв'язків крайової задачі (9),

$$v(t,\xi)=V(t,a)P_{G_k}\xi+\int\limits_a^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds+\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P^\top_{G^\top_k}R_1^{-1}P_{G^\top_k}\Big)+R(t)\Big)\widehat{d}-$$

$$-\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P^\top_{G^\top_k}R_1^{-1}P_{G^\top_k}\Big)+R(t)\Big)C_2\left\{\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds+\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\},$$

де

$$R(t)=\int\limits_0^t V(t,s)V^\top(b,s)C_2^\top ds P^\top_{G^\top_k}R_1^{-1}P_{G^\top_k}.$$

4. Основний результат. Припускаємо, що в замкненій обмеженій області $(t,v)\in[a,b]\times D$, $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ для нелінійної крайової задачі (8), (9), (11) виконуються припущення:

A) лінійна однорідна двоточкова крайова задача з імпульсною дією

$$\frac{dv}{dt}=\widehat{A}(t)v(t),\quad \Delta v|_{t=\tau_i}=\widehat{B}_i x(\tau_i),\quad C_1v(a)+C_2v(b)=0, \tag{22}$$

має k лінійно незалежних розв'язків, тобто $rank G=n-1-k$, $1\le k\le n-2$.

B) матриця $\widehat{A}(t)$ і вектор-функція $\widehat{f}(t,v)$ неперервні по своїм змінним і виконуються покоординатні оцінки:

$$|\widehat{f}(t,v)|\le M(t),\quad |\widehat{f}(t,v')-\widehat{f}(t,v'')|\le K(t)|v'-v''|, \tag{23}$$

де $M(t)$ і $K(t)$ неперервні відповідно вектор-функція і матрична-функція з невід'ємними інтегровними компонентами;

C) область $D_\beta\equiv\left\{v_0\in\mathbb{R}^{n-1},\ \xi\in\mathbb{R}^k\ |B(v_0(t,\xi),\beta)\subseteq D\right\}$ не порожня, де $B(v_0(t,\xi),\beta)$ – β-окіл функції $v_0(t,\xi)=V(t,a)P_{G_k}\xi$,

$$\beta=\max_{t\in[a,b]}\left\{\left|\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P^\top_{G^\top_k}R_1^{-1}P_{G^\top_k}\Big)+R(t)\Big)\widehat{d}\right|+\int\limits_a^t|V(t,s)|M(s)ds+\right.$$

$$\left.+\left|\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P^\top_{G^\top_k}R_1^{-1}P_{G^\top_k}\Big)+R(t)\Big)C_2\right|\left(\int\limits_a^b|V(b,s)M(s)|\,ds+\sum_{i=1}^p\left|V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right|\right)\right\};$$

D) найбільше додатне власне значення матриці Q менше за одиницю:

$$Q=\max_{t\in[a,b]}\left\{\int\limits_a^t|V(t,s)|K(s)v(s)ds+\right.$$

$$\left.+\left|\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P^\top_{G^\top_k}R_1^{-1}P_{G^\top_k}\Big)+R(t)\Big)C_2\right|\int\limits_a^b|V(b,s)|K(s)v(s)ds\right\}.$$

Лема 1. *Нехай лінійна однорідна двоточкова крайова задача (22) має k лінійно незалежних розв'язків, $1 \le k \le n-2$. Вектор-функція $\varphi \in C^1([a,b], \mathbb{R}^{n-1})$ є розв'язком двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) тоді і тільки тоді, коли φ є розв'язком системи рівнянь*

$$v = L_\xi v, \tag{24}$$

$$\mu(v) := P_{G_k^\top}\left(\widehat{d} - C_2 \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s, v(s))ds\right) = 0, \tag{25}$$

де

$$(L_\xi v)(t) = V(t,a)P_{G_k}\xi + \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{f}(s,v(s))ds +$$
$$+\left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)\widehat{d} -$$
$$-\left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right) C_2 \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v(s))ds -$$
$$-\left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right) C_2 \sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i.$$

При цьому початковим значенням розв'язку є

$$\varphi(0) = P_{G_k}\xi + G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) \times \tag{26}$$
$$\times \left(\widehat{d} - C_2 \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v(s))ds - C_2 \sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right).$$

Доведення проводиться аналогічно до [7].

Для дослідження питання існування і наближеної побудови розв'язків двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) побудуємо послідовність функцій вигляду

$$v_0(t,\xi) = V(t,a)P_{G_k}\xi, \quad m = 0,1,2,\ldots,$$
$$v_{m+1}(t,\xi) = v_0(t,\xi) + \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{f}(s, v_m(s,\xi))ds +$$
$$+\left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)\widehat{d} - \tag{27}$$
$$-\left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right) C_2 \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v_m(s,\xi))ds -$$
$$-\left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right) C_2 \sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i.$$

Кожна з цих функцій задовольняє крайові умови (9) при будь-яких ξ.

Аналогічно до [7] можемо довести наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для виродженої двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) виконується умова $a_{n,1}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$ та справедливі припущення **A-D**. Тоді*

1) послідовність функцій $v_m(t,\xi)$ вигляду (27) при $m \to \infty$ рівномірно збігається відносно області $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ до граничної функції $v^*(t,\xi)$.

При всіх $m \in \mathbb{R}$, $(t, v_0, \xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ виконуються оцінки

$$|v^*(t,\xi) - v_m(t,\xi)| \leq (\mathbb{E}_{n-1} - Q)^{-1} Q^m \beta; \tag{28}$$

2) функція $x^*(t) = (x_1^*(t), v^*(t))$, де $v^*(t) = v^*(t,\xi^*)$,

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{a_{n,1}(t)} \left(D_3(t) v^*(t) + f_n(t, v^*(t)) \right),$$

є розв'язком виродженої двоточкової крайової задачі (1)-(3) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком визначального рівняння

$$\widehat{\triangle}(\xi) = 0,$$

де

$$\widehat{\triangle}(\xi) = P_{G_k^\top} \left(\widehat{d} - C_2 \int\limits_a^b V(b,s) \widehat{f}(s, v^*(s,\xi)) ds \right);$$

3) початковим значенням розв'язку $x^*(t) = (x_1^*(t), v^*(t))$ виродженої двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) є

$$\begin{gathered} x_1^*(a,\xi) = -\frac{1}{a_{n,1}(a)} \left(D_3(a) v^*(a,\xi) + f_n(a, v^*(a,\xi)) \right), \\ \varphi(0) = P_{G_k} \xi + G^+ \left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top} \right) \times \\ \times \left(\widehat{d} - C_2 \int\limits_a^b V(b,s) \widehat{f}(s, v(s)) ds - C_2 \sum_{i=1}^{p} V(b, \tau_i + 0) \widehat{b}_i \right). \end{gathered} \tag{29}$$

Список використаної літератури

1. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. К. Ін-т матем. НАН України, 1995. 318 с.
2. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. К.: Вища школа., 2000. 294 с.
3. Campbell S.L. Singular systems of differential equations. SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman, 1982. 188 p.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 279 с.
5. Г. Семчишин *Дослідження розв'язності триточкових крайових задач для алгебро-диференціальних систем рівнянь у критичному випадку* Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, 16-19 вересня 2020 р., Чернівці. С. 187.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Вища школа, 1987. 288 с.
7. Король І.І. Дослідження розв'язків вироджених диференціальних систем з імпульсною дією. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2009 Вип. 18, С. 73–84.

Korol I. I., Blazhivska R. M. Solving of a two-point boundary value problem for singular differential systems with impulse action.

It is often necessary to study degenerate systems of differential equations, in particular, systems with degenerate matrix at the derivative, in the mathematical description of various processes and phenomena in electronics, radio engineering, economics and biology. Some scientists call such systems differential-algebraic. These systems are difficult to study because, even in the case of linear systems and continuous functions, the Cauchy problem may have no solutions. A number of methods have been developed for the analysis of such systems in the linear case such as analysis with the help of pairs and triplets of matrices, by the Moore-Penrose Pseudoinverse matrices and by reduction to the central canonical form. The problem of finding constructive sufficient conditions of the existence and developing of methods for constructing solutions of the Cauchy problem for nonlinear systems with a degenerate matrix at the derivative is much more complicated. Most scientists use modifications of various numerical methods for this purpose. The task of developing methods for the approximate integration of boundary value problems for such systems is much more complex. An important problem is the development of methods for constructing solutions of the Cauchy problem for nonlinear systems with a degenerate matrix at the derivative. Most scientists use modifications of various numerical methods for this purpose. The problem of establishing constructive sufficient conditions of existence and development of methods of approximate solution of boundary value problems for such systems is much more complicated. The numerical-analytical method of A.M. Samoilenko has shown the efficiency for the research of extremely wide class of boundary value problems. Recently, the modifications of this method have been developed for the approximate solution of boundary value problems for nonlinear systems of ordinary differential equations with a degenerate matrix at the derivative. In this paper we use methods of the Moore-Penrose Pseudoinverse matrices and orthoprojectors. A modification of the numerical-analytical method is proposed in order to expand its use to study the existence and approximate construction of solutions of nonlinear differential systems with a degenerate matrix at the derivative, with impulse action and under a linear undivided boundary restriction. A critical case, when the corresponding linear homogeneous degenerate boundary value problem has nonzero solutions, is considered. Necessary and constructive sufficient conditions for the existence of solutions have been established, and the error estimates of the constructed approximate solutions have been found.

Keywords: singular differential system, boundary conditions, impulse action.

References

1. Boichuk, A.A., Zuravlev, V.F., & Samoilenko, A.M. (1995). Generalized inverse operators and Noetherian boundary value problems. Kyiv. Institute of math Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine [in Russian].
2. Samoilenko, A.M., Skil, M.I., & Yakovets, V.P. (2000). Linear systems of differential equations with degenerations. Kyiv. Higher school [in Ukrainian].
3. Campbell, S.L. (1982). Singular systems of differential equations. SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman.
4. Samoilenko, A.M., & Ronto, N.I. (1992). Numerical and analytical methods in the theory of boundary value problems of ordinary differential equations. Kyiv. Scientific thought [in Russian].
5. Semchyshyn, H. (2020). Investigation of solvability of three-point boundary value problems for algebro-differential systems of equations in the critical case. Modern problems of differential equations and their application. Chernivtsi, 187 [in Ukrainian].
6. Samoilenko, A. M., & Perestiuk, N.A. (1987). Differential equations with pulse action.Kyiv. Higher school [in Russian].
7. Korol, I.I. (2009). Investigation of solutions of degenerate differential systems with pulsed action. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and In- formatics, 18, 73–84 [in Ukrainian].

Одержано 23.09.2020