УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).114-122

С. Ю. Бабич[1], Ю. П. Глухов[2], В. Ф. Лазар[3]

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
професор, доктор технічних наук
babich_sy@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2642-9115

[2] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6328-5993

[3] Мукачівський державний університет,
доцент кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій,
кандидат технічних наук
vflazar@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2457-571X

ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ТІЛАХ (МАТЕРІАЛАХ) З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. ЧАСТИНА 2. ПЛОСКІ ДИНАМІЧНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Присвячується 55 річчю математичного факультету УжНУ

В даній статті досліджені динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями на основі введених комплексних потенціалів для плоских динамічних задач у випадку стисливих і нестисливих тіл з початковими напруженнями (окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння) одержані представлення напружень і переміщень через гармонічні функції своїх аргументів. Дані представлення введені коли жорсткий штамп рухається прямолінійно вздовж границі півплощини з рівномірною швидкістю. Останнє дає змогу звести дану динамічну задачу до стаціонарної в рухомій системі координат. В результаті граничних переходів у випадку відсутності початкових напружень одержані комплексні потенціали переходять у відомі комплексні потенціали Галіна Л. А., Мусхелішвілі М. І. і Лехницького Л. Г. Дані динамічні задачі зведені до задачі Рімана - Гільберта. Якщо штамп рухається без тертя, то з врахуванням формули Келдиша-Седова одержали явні формули для обчислення контактного тиску, який залежить від початкових напружень. Крім цього, в роботі розглянуті задачі про розповсюдження поверхневих хвиль вздовж півпростору з початковими напруженнями. Остання задача розв'язується за допомогою комплексних потенціалів. Результати повністю співпадають з тими, які були одержані одним з авторів статті раніше. В роботі встановлені критичні параметри коефіцієнтів подовжень для потенціалів Трелоара і Бортенєва-Хазановича при яких наступають явища "резонансного характеру". Як граничний випадок для "резонансного ефекту" дістаємо, що при досягненні початковими напруженнями значень, які відповідають поверхневій нестійкості, компоненти напружено-деформованого стану прямують до нескінченості. У цьому випадку тіло буде знаходитись у стані "нейтральної рівноваги ". Тому з інженерної точки зору ситуація, коли швидкість поверхневих хвиль Релея у тіла з початковими напруженнями є необмеженою.

Ключові слова: початкові напруження, характеристичні рівняння, пружний потенціал, поверхневі хвилі, контактна задача, жорсткий штамп.

1. Вступ. Підвищення надійності і довговічності інженерних споруд і машин є однією з найбільш актуальних задач сучасного будівництва і машинобудування. Успішному розв'язанню її значною мірою сприяють широкі наукові дослідження в області механіки твердого деформованого тіла, зокрема при вивченні проблеми передачі навантаження в конструкціях і деталях машин. Поява нових матеріалів, необхідність підвищення експлуатаційних властивостей споруд і машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості і досягнення економічної сумісності – все це залежить від методів розрахунку.

По проблемах, які відносяться до контактних задач для пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень на даний час одержані результати з широкого кола питань.

Вагомий вклад у розробку методів розв'язання плоских і просторових контактних задач класичної (лінійної) теорії пружності внесли вітчизняні вчені. Грунтовний огляд результатів у галузі механіки контактної взаємодії тіл без початкових напружень наведено у монографії за редакцією Л.О. Галіна «Развитие теории контактных задач в СССР» (М.:Наука, 1976.– 493 с.), а також в багатьох працях монографічного і навчального характеру, виданих в останні роки.

Число публікацій з механіки контактної взаємодії неперервно зростає, що пояснюється актуальністю розглядуваних проблем для інженерної практики. Проте сучасні потреби інженерної практики висунули поміж дослідниками ряд задач, які вимагають використання більш ускладнених моделей суцільного середовища (відмінних від класичних) із складними фізичними та механічними властивостями із врахуванням, наприклад, таких факторів при контактній взаємодії, як вплив тертя, тепловиділення, при поверхневих властивостей матеріалу, жорсткуватості та зносостійкості поверхні тіла, що у свою чергу, зв'язане з мікромеханікою фрикційної взаємодії тощо.

2. Актуальність. Одним з важливих факторів при контактній взаємодії (разом з перерахованими) є врахування початкових (залишкових) напружень. Однак ці питання до останнього часу майже повністю не розроблені. Актуальність таких досліджень не викликає сумнівів, оскільки початкові (залишкові) напруження практично присутні у всіх елементах конструкцій. Як відомо початкові напруження зумовлені різними причинами, наприклад, технологічними операціями, виконуваними при виготовленні матеріалів або складанням конструкцій. У випадку композиційних матеріалів початкові напруження, як правило, відповідають напруженням уздовж армуючи елементів. У земній корі вони утворюються внаслідок дії гравітаційних сил і тектонічних процесів. Їх необхідно враховувати при розв'язанні задач з деформації грунтів (особливо замерзлих). У пружно-пластичних тілах також можуть бути внутрішні залишкові напруження після зняття навантажень. Початкові напруження завжди присутні у кровоносних судинах живих організмів.

Особливу зацікавленість у зв'язку з запровадженням на практиці нових штучних матеріалів, які можуть витримувати великі початкові деформації, викликає дослідження динамічних контактних задач у тілах з початковими напруженнями. Іноді доцільно створювати початкові напруження (залишкові і технологічні) для компенсації тих напружень, які виникають в елементах конструкцій, а також для підвищення міцності характеристик конструкцій.

При дослідженні контактних задач для тіл з початковими напруженнями на даний час склались два підходи: 1) дослідження тіл з конкретною формою пружного потенціалу (Московська школа механіків); 2) дослідження пружних тіл з початковими напруженнями для довільної структури пружного потенціалу в загальному вигляді для стисливих і нестисливих матеріалів (ці дослідження належать авторам і становлять зміст даної роботи).

Слід зауважити, що усі наведені в даній роботі результати одержані у рамках другого підходу, який на наш погляд має деякі переваги у порівнянні з першим підходом. Так до недавнього часу одна і таж сама контактна задача для попередньо напружених тіл розглядалась одним автором, наприклад, для потенціалу Трелоара, а другим автором для потенціалу Муні тощо, тобто для конкретної форми пружного потенціалу. У даній праці дослідження багаточисленних динамічних задач наведені в єдиній загальній формі для стисливих і нестисливих попередньо напружених тіл для довільної структури пружного потенціалу. І тільки на завершальній стадії досліджень для одержання числових результатів використовувались конкретні пружні потенціали.

Таким чином, механіка матеріалів і елементів конструкцій, геофізика, сейсмологія, механіка гірських порід, механіка композитів, біомеханіка не руйнуючі методи визначення напружень тощо – далеко не повний перелік наукових напрямів фундаментального і прикладного характеру, в яких виникли проблеми, пов'язані з необхідністю дослідження впливу початкових (залишкових) напружень або деформацій. Виходячи із цього, необхідно відзначити важливість дослідження початкових напружень на напружено-деформований стан в області контакта. Врахування початкових напружень при розрахунку відповідальних елементів конструкцій, машин і споруд дозволить більш ефективно враховувати міцносні ресурси матеріалів, правильно оцінювати міцність і суттєво понизити їх матеріалоємність, зберігаючи при цьому потрібні фундаментальні характеристики.

3. Постановка задачі. Розглядається нелінійно-пружне ізотропне тіло з довільною формою пружного потенціалу. Викладені нижче результати відносяться також і до ортотропного тіла, коли пружно-еквівалентні напрями співпадають з напрямками координатних ліній вибраної системи координат. Вводяться такі координати: x_γ – лагранжеві, які в недеформованому стані співпадають з декартовими; η_γ – декартові, які рухаються прямолінійно вздовж осі $0y_1$ з постійною швидкістю v; y_γ – декартові в початковому (деформованому) стані. Між координатами введених систем при умові, що початковий стан тіла визначається переміщеннями $u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1)\, x_i$; $\lambda_i = const$, де λ_i – коефіцієнти подовження, існує така залежність

$$y_\gamma = \lambda_j x_j, \eta_1 = y_1 - vt, \eta_2 = y_2,\ \gamma = 1, 2,\ v = const. \tag{1}$$

Всі величини для збурень віднесено до розмірів тіла в початковому деформованому стані. У зв'язку з цим компоненти збурень $\tilde{Q}_{nm}$ тензора напружень віднесені до розміру площадок, за якими вони діють; при цьому для нерівних коренів характеристичного рівняння використано підхід праць Лехницького С. Г. [1], а для рівних коренів - праці Мусхелішвілі М. І. [2]. В роботі застосовується апарат теорії функцій комплексної змінної.

4. Метод розв'язку. Комплексні потенціали. Введемо комплексні потенціали для плоских динамічних задач у випадку стисливих і нестисливих тіл з початковими напруженнями (окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння), коли дані динамічні задачі можна звести до стаціонарних задач у рухомій системі координат, яка рухається прямолінійно з постійною швидкістю.

В роботах [3-7], [10-12] окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння побудовані представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали. В результаті ряду перетворень для стисливих тіл у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння знайдено вирази для представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали у такому вигляді:

$$\begin{gathered}
\tilde{Q}_{22} = 2Re\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right];\\
\tilde{Q}_{21} = -2Re\left[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];\\
\tilde{Q}_{12} = -2Re\left[\mu_1\gamma_{12}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2\gamma_{12}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];\\
\tilde{Q}_{11} = 2Re\left[\mu_1^2\gamma_{11}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\gamma_{11}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right];\\
u_k = 2Re\left[\gamma_k^{(1)}\Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)}\Phi_2(z_2)\right] \quad (k = 1, 2)\,.
\end{gathered} \tag{2}$$

де $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ – аналітичні функції комплексної змінної.

Аналогічно формулам (2) мають місце вирази для представлень напружень і переміщень через комплексні потенціали у випадку рівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [4]. Якщо в (2) зробити деякі граничні переходи, то для стисливих тіл одержимо наступне. Коли $\nu = 0$, то прийдемо до представлень типу (2) для стисливих плоских задач стисливих тіл з початковими напруженнями. При цьому здійснюється граничний перехід у всіх виразах, в тому числі при визначенні комплексних параметрів, коефіцієнтів і комплексних потенціалів. Без початкових напружень, поклавши $S_{11}^0 \equiv S_{22}^0 \equiv 0$, дістанемо результати, отримані Галіним Л. А. [8]. Якщо до останньої умови додатково приєднати умову $\nu = 0$, то після введення складових тензора ϖ для лінійно-пружного ортотропного тіла дістанемо комплексні потенціали Лехницького С. Г. [1]. Аналогічно вводяться комплексні потенціали для нестисливих попередньо напружених тіл окремо для нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння. Таким чином, напруження і переміщення для стисливих і нестисливих тіл представлені в єдиній загальній формі через комплексні потенціали окремо для нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння. Введені комплексні зображення містять у собі ряд відомих результатів, які є наслідком граничних переходів. Крім цього, введені зображення через комплексні потенціали дають можливість дістати точні розв'язки тих класів задач для тіл з початковими напруженнями, які розв'язані для пружних тіл в рамках класичної теорії пружності (у випадку відсутності початкових напружень).

У роботі для тіл з початковими напруженнями вказано методи побудови точних розв'язків динамічних задач на основі комплексних потенціалів, одержаних для відповідних статичних задач. Насамперед встановлено, що із порівняння відповідних виразів для динамічних задач стисливих тіл і виразів для нестисливих тіл випливає, що зображення напружень і переміщень через комплексні потенціали мають однакову структуру. Відрізняються тільки формули для визначення коефіцієнтів $\gamma_{nm}^{(j)}$, $\gamma_k^{(j)}$. Отже, можна проводити розв'язання у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл. Із встановленого вище порівняння комплексних зображень напружень і переміщень через комплексні потенціали $\Phi_1(z_1), \Phi_2(z_2)$ для нерівних коренів характеристичного рівняння і через потенціали $\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2)$ або $\psi(z_1), \Phi(z_1)$ для рівних коренів однаковими формулами як для статичних, так і для динамічних задач. Відрізняються тільки формули для визначення напружень $\tilde{Q}_{12}$, оскільки для статичних задач $\gamma_{12}^{(j)} = 1$ при нерівних і $\gamma_{12}^{(1)} = 1$ при рівних коренях. При цьому для статичних і динамічних задач відрізняються вирази для знаходження комплексних параметрів μ_j, які входять у комплексні змінні z_j і вирази для знаходження B_j, $B_{(j)}$, B, $\gamma_{nm}^{(j)}$ і $\gamma_k^{(j)}$

Наскільки згаданий вище метод комплексних потенціалів є ефективним і придатним до розв'язання динамічних задач розглядуваного класу, показано спочатку на прикладі задачі про поширення поверхневих хвиль Релея на півплощині $y_2 < 0$ з початковими напруженнями (така задача, уже розв'язана іншим методом). Швидкість поверхневої хвилі v вважаємо невідомою і для її визначення треба мати відповідні рівняння. Дослідження виконано в загальній формі для стисливих и нестисливих тіл окремо при нерівних і рівних коренях характеристичного (основного) рівняння. Рівняння для знаходження швидкості побудовано за умови існування відмінних від нуля у півплощині комплексних потенціалів, які забезпечують виконання умов рівності нулю напружень на границі півплощини при $y_2 = 0$. Для нерівних коренів на границі півплощини дістанемо граничні умови

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{22} &= 2Re\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right] = 0; \\ \tilde{Q}_{21} &= -2Re\left[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Система однорідних рівнянь (3) відносно невідомих Φ_1' і Φ_2' має нетривіальний розв'язок, коли визначник другого порядку дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1\gamma_{21}^{(1)} & \mu_2\gamma_{21}^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Отже, з умови існування ненульових розв'язків системи (3), тобто з (4), одержано рівняння для визначення швидкості хвиль Релея у вигляді

$$\mu_2\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1\gamma_{21}^{(1)} = 0. \tag{5}$$

Зауважимо, що рівняння (5) відповідає поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями. Для рівних коренів одержано аналогічне рівняння у формі

$$\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{21}^{(2)} = 0. \tag{6}$$

Конкретні числові результати в роботі одержані для потенціалу Трелоара (нестисливі тіла). Також як приклад застосування комплексних потенціалів у роботі розглянута плоска задача про жорсткий штамп, який рухається з тертям вздовж границі $\eta_2 \leq 0$ нижньої півплощини $(\eta_2 \leq 0)$ з початковими напруженнями. Розглянуто такі динамічні контактні задачі, які зводяться до стаціонарних задач у рухомій системі координат. Це має місце тільки тоді, коли швидкість руху штампу менша за швидкість поширення у тілі пружних хвиль (поздовжніх і поперечних). Останнє відповідає тому, що вихідне рівняння буде еліптичного типу, і аналогії між явищами, які виникають при дії нерухомого і рухомого штампів у півплощині з початковими напруженнями, матимуть місце тільки у цьому випадку. Також цілком зрозуміло, що рух штампу із надзвуковою швидкістю на практиці зустрічається рідко. При розв'язуванні даної контактної задачі використані побудовані комплексні потенціали. Задача зведена до відомої задачі Рімана-Гільберта. В результаті звичайної процедури дана динамічна контактна задача звелась до знаходження аналітичної функції $w_1(z)$, через яку обчислюється контактний тиск. Таким чином, для визначення функції $w_1(z)$ одержано таку ж змішану задачу, як і у випадку відповідної контактної динамічної задачі для анізотропної півплощини без початкових напружень (Лехницький С.Г.), а також таку крайову задачу (з врахуванням сил тертя), як і у випадку рухомого штампу, який рухається вздовж границі ізотропної півплощини без початкових напружень. Якщо штамп рухається без тертя ($k = 0$), то застосовуючи формулу Келдиша-Седова [9] для аналітичної функції $w_1(z)$ в роботі [10] одержано явну формулу. В роботі для конкретних пружних потенціалів встановлено залежність контактного тиску від величини початкових напружень.

З фізичної точки зору цікавим є випадок, коли швидкість руху штампу (навантажень) збігається з швидкістю хвиль Релея у пружному тілі з початковими напруженнями. У роботі розглянуто деякі питання, які пов'язані з поверхневими явищами для динамічної контактної задачі для півплощини з початковими напруженнями.

З виразів для аналітичних функцій $\Phi_j(z_j)$ випливає, що комплексні потенціали, які є точними розв'язками першої основної динамічної задачі для півплощини з початковими напруженнями, перетворюються у нескінченність, а отже у нескінченність перетворюються компоненти напружено-деформованого стану, обчислені за комплексними потенціалами, коли мають місце рівняння (5) і (6).

Таким чином, рівняння (5) (для нерівних коренів характеристичного рівняння) і рівняння (6) (для рівних коренів) є дисперсійними рівняннями для визначення швидкостей поширення поверхневих хвиль Релея вздовж границі півплощини з початковими напруженнями. Отже, коли швидкість руху штампу наближається до швидкості поверхневих хвиль Релея у тілах з початковими напруженнями вздовж плоскої границі виникають своєрідні явища «резонансного характеру», які пов'язані з необмеженим зростанням напружень у пружному тілі. Слід зауважити, що аналогічні явища виникають і у класичній лінійній теорії пружності, коли швидкість руху штампу наближається до швидкості хвиль Релея у матеріалі без початкових напружень. Необхідно зазначити, що в останньому випадку швидкість хвиль Релея – величина постійна для даного матеріалу, тобто існує тільки одна критична швидкість руху. Оскільки швидкість поверхневих хвиль Релея неперервно залежить від початкових напружень, то для кожного випадку попереднього навантаження необхідно обчислити швидкість поверхневих хвиль; таким чином дістанемо неперервний спектр критичних швидкостей руху. Як граничний випадок для «резонансного ефекту» дістаємо, що при досягненні початковими напруженнями значень, які відповідають поверхневій нестійкості, компоненти напружено-деформованого стану прямують до нескінченності. Одержаний результат не повинен викликати сумнівів, оскільки при досягненні початковим станом значень, які відповідають поверхневій нестійкості, тіло буде знаходитись у стані «нейтральної рівноваги». Тому з інженерної точки зору ситуація, коли швидкість руху штампу наближається до швидкості поверхневих хвиль Релея у тілах з початковими напруженнями, є небажаною. На основі комплексних потенціалів (як і випадку статики) можна знайти точні розв'язки основних динамічних плоских задач (першої, другої і змішаної) для півплощини з початковими напруженнями [11-15].

5. Висновки. Таким чином, в даній роботі побудовані комплексні потенціали плоских динамічних задач для тіл з початковими напруженнями. В результаті напруження і переміщення зображені через гармонічні функції своїх аргументів. Комплексні потенціали введені у єдиній формі для стисливих і нестисливих тіл для потенціалів довільної структури окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння. На основі введених комплексних потенціалів розв'язані конкретні задачі для рухомих штампів у випадку прямолінійного руху з постійною швидкістю. За допомогою формули Келдиша – Седова одержані явні формули для обчислення контактного тиску. Також методом комплексних потенціалів в дослідженні плоских при розповсюдженні поверхневих хвиль Релея вздовж півпростору з початковими напруженнями. На основі чисельних досліджень одержані кількісні і якісні результати впливу початкових напружень на фазову швидкість поверхневої хвилі Релея і на основі характеристики контактної взаємодії [11-17]. У випадку відсутності початкових напружень одержані результати співпадають з класичними. Також важливим в роботі є те, що встановлені явища "резонансного характеру" для конкретних пружних потенціалів.

Список використаної літератури

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропого тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Бабич С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями. *Прикладная механика.* 1981. 17, № 7. С. 75-83.
4. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. К.:Вища школа, 1995. 304 с.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг "Press-line", 2007. 795 с.
6. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
7. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями. *Прикладная математика и механика.* 1982. 46, №2, С. 263-271.
8. Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303с.
9. Келдыш М. В., Седов Л. И., Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. *Докл. АН СССР,* т.16, №1. 1937. с. 7-11.
10. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальніми напряжениями. *Сб. "Развитие идей Л.А. Галина в механике. Ин-т компьютерных технологий.* М: Ижевск, 2013. с. 188-248.
11. Бабич С. Ю.. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы). *Прикладная механика.* 1989. 25, № 8. С. 3-18.
12. Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (обзор). *Прикладная механика.* 1991. 23, № 9. С. 3-26.
13. Бабич С.Ю., Лазар В.Ф. Комплексні потенціали і їх застосування в контактних задачах

для тіл з початковими напруженнями. *X міжн. симпоз."Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій".* Львів, „Каменяр", 2002, с.3-7.
14. Бабич С.Ю., Лазар В.Ф. К вопросу контактной задачи для движущегося штампа вдоль полуплоскости с начальными напряжениями. *VI між. сим поз. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій".*(Ужгород, 2005), Львів, „Каменяр", 2005. с. 607-610.
15. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Корниенко В. Ф. Резонансные явления в динамических контактных задачах для упругих тел с начальными напряжениями. *Материалы $\overline{V}$ межн. научно практ. конф. "Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов".* Белорусский государственный университет транспорта, Гомель. 2019. с.187-189.
16. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В. Ф. Построение точных решений динамаческих задач для тел с начальными напряжениями на основе комплексных потенциалов. *Материалы $\overline{V}I$ межн. научно практ. конф. "Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов".* Белорусский государственный университет транспорта, Гомель. 2020. с.162-165.
17. Babich S. Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Appl. Mech. Rew,* 51, №5. 1998. p.343-371.

Babych S. Yu., Hlukhov Yu. P., Lazar V. F. Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 2. Flat dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses.

The dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses on the basis of introduced complex potentials for plane dynamic problems in the case of compressible and incompressible bodies with initial stresses (separately for equal and unequal roots of a characteristic equation), the obtained representations of stresses and displacements through the harmonic functions of their arguments have been investigated in the article. These representations are introduced when the load is applied through a rigid stamp and moves rectilinearly along the boundary of the half-plane at a uniform velocity. The latter makes it possible to reduce this dynamic problem to a stationary one in a moving coordinate system. As a result of boundary transitions in the absence of initial stresses, the obtained complex potentials pass into the known complex potentials Galin L.A, Muskhelishvili M.I. and Lekhnytsky L.G. These dynamic problems are reduced to the Riemann-Hilbert problem. If the stamp moves without friction, then taking into account the Keldysh-Sedov formula we obtain explicit formulas for calculating the contact pressure, which depends on the initial stresses. Additionally, the problems of propagation of surface waves along a half-plane with initial stresses have also been considered in the article. The latter problem is solved with the help of complex potentials. The results are exactly the same as those obtained earlier by one of the authors of the article. The critical parameters of elongation coefficients for Treloir and Bortnev-Khazanovich potentials at which "resonant nature" phenomena occur have been established in the article.

As a limiting case for the "resonance effect", we get that when the initial stresses reach values corresponding to the surface instability, the components of the stress-strain state go to infinity. In this case, the body will be in a state of "neutral equilibrium". Thus, the Rayleigh surface waves in bodies with initial stresses are unlimited.

Keywords: Initial stresses, characteristic equations, elastic potential, surface waves, contact problem, rigid stamp.

References

1. Lehnickij, S. G. (1977). Teorija uprugosti anizotropogo tela. Moscow: Nauka.
2. Mushelishvili, N. I. (1966). Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti. Moscow: Nauka.
3. Babich, S. Ju., & Guz, A. N. (1981). Kompleksnye potencialy ploskoj dinamicheskoj zadachi

dlja szhimaemyh uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami *Prikladnaja mehanika, 17 (7)*, 75-83.

4. Guz, A. N., Babich, S. Ju., & Rudnickij, V. B. (2013). Kontaktnoe vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nimi naprjazhenijami. Kyiv: Vushcha shkola.
5. Guz, A. N., Babich, S. Ju., & Gluhov, Ju.P. (2007). Statika i dinamika uprugih osnovanij s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami. Kremenchug: "Press-line".
6. Guz, A. N., Babich S. Ju., & Gluhov Ju. P. (2015). Smeshannye zadachi dlja uprugogo osnovanija s nachal'nymi naprjazhenijami. LAP LAMBERT Academic Publishing.
7. Guz, A. N., & Babich, S. Ju. (1982). Ploskie dinamicheskie zadachi dlja uprugih neszhimaemyh tel s nachal'nymi naprjazhenijami. *Prikladnaja matematika i mehanika, 46(2),* 263-271.
8. Galin, L. A. (1980). Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vjazkouprugosti. Moscow: Nauka.
9. Keldysh, M. V., & Sedov, L. I. (1937). Effektivnoe reshenie nekotoryh kraevyh zadach dlja garmonicheskih funkcij. Doklad AN SSSR, 16(1), 7-11.
10. Guz, A. N., Babich, S. Ju.,& Rudnickij, V. B. (2013). Kontaktnoe vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nimi naprjazhenijami. *Sb. "Razvitie idej L.A. Galina v mehanike". In-t komp'juternyh tehnologij.* Moscow-Izhevsk. 188-248.
11. Babich, S. Ju., Guz, A. N., & Rudnickij, V. B. (1989). Kontaktnye zadachi dlja uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami (zhestkie shtampy). *Prikladnaja mehanika, 25(8),* 3-18.
12. Babich, S. Ju., Guz, A. N., & Rudnickij, V. B. (1991). Kontaktnye zadachi dlja uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami (obzor). *Prikladnaja mehanika, 23(9),* 3-26.
13. Babich, S. Ju., & Lazar, V. F. (2002). Kompleksni potenciali i ïh zastosuvannja v kontaktnih zadachah dlja til z pochatkovimi napruzhennjami. *X mizhn. simpoz."Mehanika i fizika rujnuvannja budivel'nih materialiv ta konstrukcij"*. L'viv: „Kamenjar", 3-7.
14. Babich, S. Ju., & Lazar, V. F. (2005). K voprosu kontaktnoj zadachi dlja dvizhushhegosja shtampa vdol' poluploskosti s nachal'nymi naprjazhenijami. *VI mizh. sim poz. "Mehanika i fizika rujnuvannja budivel'nih materialiv ta konstrukcij"*. Uzhgorod, Lviv:„Kamenjar", 607-610.
15. Babich, S. Ju., Gluhov, Ju. P., & Kornienko, V. F. (2019). Rezonansnye javlenija v dinamicheskih kontaktnyh zadachah dlja uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami. *Materialy mezhn. nauchno prakt. konf. "Aktual'nye voprosy i perspektivy razvitija transportnogo i stroitel'nogo kompleksov". Belorusskij gosudarstvennyj universitet transporta, CityplaceGomel'*, 187-189.
16. Babich, S. Ju., Gluhov, Ju. P., & Lazar, V. F. (2020). Postroenie tochnyh reshenij dinamacheskih zadach dlja tel s nachal'nymi naprjazhenijami na osnove kompleksnyh potencialov *Materialy mezhn. nauchno prakt. konf. "Aktual'nye voprosy i perspektivy razvitija transportnogo i stroitel'nogo kompleksov". Belorusskij gosudarstvennyj universitet transporta, CityplaceGomel'*. 162-165.
17. Babich, S. Yu., Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (1988). Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research *Appl. Mech. Rew* 51(5), 343-37.

Одержано 02.04.2021