УДК 519.86
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75

В. М. Петечук[1], Ю. В. Петечук[2]

[1] Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
vasil.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5663-8789

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,
доцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
yuliia.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3670-9671

ГОМОМОРФІЗМИ МАТРИЧНИХ ГРУП ТА КІЛЕЦЬ НАД АСОЦІАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

У статті з єдиних позицій описані групові гомоморфізми матричних груп і кільцеві гомоморфізми матричних кілець над асоціативними кільцями з 1.

Показано, що опис гомоморфізмів матричних груп $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 2$ у групу автоморфізмів $GL\,(W)$ лівого (необов'язково вільного) K-модуля W над довільним асоціативним кільцем K з 1 зводиться до випадків, коли 2 або 3 – оборотні елементи в кільці K. Доведено, що вони допускають стандартний опис гомоморфізмів групи елементарних трансвекцій $E\,(n, R)$, якщо такий опис допускають гомоморфізми матричних груп над кільцями K, в яких 2 або 3 є оборотними елементами.

Також описано кільцеві гомоморфізми $\Lambda : R_n \to EndW$, $n \geq 2$ лівого (необов'язково вільного) K-модуля W над довільним асоціативним кільцем K з 1. Показано, що гомоморфізми Λ допускають стандартний опис на кільці R_n.

Ключові слова: асоціативні кільця з 1, групові гомоморфізми матричних груп, кільцеві гомоморфізми кілець матриць, формальні матриці, стандартний опис.

1. Вступ. Стаття присвячена вивченню гомоморфізмів матричних груп та кілець над асоціативними кільцями з 1.

Вводиться поняття стандартного опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Розглядається гомоморфізм Λ_0 групи $GL\,(n, R)$ у групу автоморфізмів $GL\,(W)$ лівого (необов'язково вільного) K-модуля W над довільними асоціативними кільцями R і K з 1, який визначається за правилом

$$\Lambda_0\,(x) = g^{-1} \left[\, \overline{\delta}\,(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}\,(1 - e) + e_1\right] g, \quad x \in GL\,(n, R)\,,$$

де L і P – ліві K-модулі, $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ – ізоморфізм K-модулів, $\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n, індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$.

За означенням гомоморфізм $\Lambda : G \to GL\,(W)$ групи $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$ допускає стандартний опис на групі $E\,(n, R)$, якщо Λ збігається з Λ_0 на цій групі.

У статті показано, що опис гомоморфізмів матричних груп $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$ у групу автоморфізмів $GL(W)$ над асоціативним кільцем K зводиться до випадків, коли 2 або 3 – оборотні елементи в кільці K. Доведено, що вони допускають стандартний опис на групі елементарних трансвекцій $E(n,R)$, якщо такий опис допускають гомоморфізми матричних груп над кільцями K, в яких 2 або 3 є оборотними елементами.

В роботі також описуються кільцеві гомоморфізми $\Lambda : R_n \to EndW$, $n \geq 2$ у кільце $EndW$ лівого (необов'язково вільного) K-модуля W над довільним асоціативним кільцем K з 1. Показано, що гомоморфізми Λ допускають стандартний опис на кільці R_n. Це означає, що гомоморфізм Λ на кільці R_n співпадає з гомоморфізмом Λ_0, який визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1}\left[\,\overline{\delta}(x)\,e + e_1\right] g, \quad x \in R_n,$$

де L і P ліві K-модулі, $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ – ізоморфізм K-модулів, $\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм кільця R_n, індукований кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – нуль кільця $EndP$, який ортогональний з елементами кільця $EndL$.

Опис групових і кільцевих гомоморфізмів на одиничних трансвекціях спирається на співвідношення, які існують між елементами

$$(t_{ij}(1) - E)(E - t_{ji}(-1)\,),\, t_{ij}(1)\,t_{ji}(-1)\,t_{ij}(1)\,,\, t_{ij}(r)\,,$$

$r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$ в кільці R_n і переносяться груповими і кільцевими гомоморфізмами на співвідношення між формальними матрицями, якими вони зображаються у кільці $EndW$.

2. Загальні поняття. Нехай R – асоціативне кільце з 1, R^* – група оборотних елементів кільця R, R_n– кільце матриць $n \times n$ над R, $n \geq 2$, $GL(n,R) = R_n^*$ – повна лінійна (матрична) група оборотних $n \times n$ матриць над кільцем R, E – одинична матриця кільця R_n.

Позначимо через e_{ij} матрицю кільця R_n, у якої на місці $(i;j)$ стоїть одиниця, а на інших місцях нулі.

Виконуються матричні формули

$$e_{ik}e_{lj} = \delta_{kl}e_{ij},$$

де $1 \leq i,k,l,j \leq n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера.

Одиницю кільця R і одиничну матрицю кільця R_n будемо позначати 1 і E відповідно.

Означення 1. *Елементи $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, де $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$, e_{ij} – стандартна матрична одиниця, будемо називати елементарними трансвекціями. Трансвекції $t_{ij}(1)$ будемо називати одиничними елементарними трансвекціями.*

Нехай $E(n,R)$ – підгрупа групи $GL(n,R)$, яка породжена всіма елементарними трансвекціями $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Означення 2. *У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1 g_2 {g_1}^{-1} {g_2}^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2, а елемент $[g_1, \ldots, g_t] = \left[\left[g_1, \ldots, g_{t-1}\right], g_t\right]$ – комутатором довжини t елементів $g_1, \ldots, g_t$ групи G, де $t > 2$.*

Виконуються матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де $1 \le k \ne i, i \ne j, l \ne j \le n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R. Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, *де* $1 \le i, j, k \le n$ – попарно різні довільні числа, $r \in R$.

Позначимо

$$t_{ij} = t_{ij}(-1)\, t_{ji}(1)\, t_{ij}(-1), \qquad t_i = (t_{ii+1}(1) - E)(E - t_{i+1i}(-1)),$$
$$t(r) = (t_{12}(r) - E)\, t_{12},$$

де $r \in R$, $1 \le i \le n$, $n+1$ ототожнюється з 1.

Неважко бачити, що

$$t_i = diag\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0\right) = e_{ii}, t(r) = diag(r,\ 0, \ldots, 0) = re_{11}, t(1) = t_1,$$

$$t(r)\, t_{21} + t_{21} t(r) + E = diag\left(\begin{pmatrix} 1 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right).$$

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що має місце

Лема 1. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Тоді $t_{ij}^{-1} = t_{ji}$,*

$$t_{ij} e_{kl} t_{ij}^{-1} = \begin{cases} -e_{il} & k = j \ne l \\ -e_{li} & l = j \ne k \\ e_{jk} & k = i \ne l \\ e_{kj} \quad , \text{якщо} & l = i \ne k \\ e_{ii} & k = l = j \\ e_{jj} & k = l = i \\ e_{kl} & k, l \notin \{i, j\} \end{cases}, \ t_{ij} t_{kl}(r)\, t_{ij}^{-1} = \begin{cases} t_{il}(-r) & k = j \ne l \\ t_{li}(-r) & l = j \ne k \\ t_{jk}(r) \quad , \text{якщо} & k = i \ne l \\ t_{kj}(r) & l = i \ne k \\ t_{kl}(r) & k, l \notin \{i, j\} \end{cases},$$

а також

$$t_i t_j = \delta_{ij} t_i, \quad t_1 + \cdots + t_n = E, \quad t_{ii+1}^2 = E - 2t_i - 2t_{i+1},$$
$$t_k(t_{ii+1} - E) = 0, \text{якщо } k \ne i, i+1,$$
$$t_{ii+1} t_k t_{ii+1}^{-1} = \begin{cases} t_{k+1} & k = i \\ t_{k-1} \quad , \text{якщо} & k = i+1 \\ t_k & k \ne i, i+1 \end{cases},$$

матриці $t(r)$ комутують з елементами $t_1, \ldots, t_n$,

$$t(r_1 + r_2) = t(r_1) + t(r_2), \quad t(r_1 r_2) = t(r_1)\, t(r_2),$$

для всіх $r, r_1, r_2 \in R$.

3. Означення стандартного опису групових і кільцевих гомоморфізмів.

Означення 3. *Відображення δ кільця R в асоціативне кільце R_1 з 1 називається кільцевим гомоморфізмом, якщо $\delta(0) = 0$,*

$$\delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \quad \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1)\,\delta(r_2)$$

для довільних елементів r_1 і r_2 кільця R.

Означення 4. *Відображення ν кільця R в асоціативне кільце R_1 з 1 називається кільцевим антигомоморфізмом, якщо $\nu(0) = 0$,*

$$\nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \quad \nu(r_1 r_2) = \nu(r_2)\,\nu(r_1)$$

для довільних елементів r_1 і r_2 кільця R.

Зрозуміло, що відображення кільця R в нульовий елемент кільця R_1 є кільцевим і антикільцевим гомоморфізмами одночасно. Такий гомоморфізм прийнято називати нульовим гомоморфізмом.

Якщо $\delta : R \to R_1$ – кільцевий гомоморфізм і $\nu : R_1 \to R_2$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu\delta : R \to R_2$ є кільцевим антигомоморфізмом. Аналогічно, якщо $\nu : R \to R_1$ – кільцевий антигомоморфізм і $\delta : R_1 \to R_2$ – кільцевий гомоморфізм, то $\delta\nu : R \to R_2$ є кільцевим антигомоморфізмом.

Означення 5. *Нехай R^0 означає кільце R у якому задана операція множення за правилом $x \circ y = yx$, де x, y – довільні елементи кільця R. Кільце R^0 називається опозитом кільця R.*

Відображення $\nu_0 : R \to R^0$, задане за правилом $\nu_0(r) = r$, $r \in R$, є кільцевим антигомоморфізмом R в R^0.

Якщо $\delta : R \to R_1$ – кільцевий гомоморфізм, $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu_0\delta : R \to R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм. І, навпаки. Якщо $\delta : R \to R_1$ – кільцевий антигомоморфізм, $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu_0\delta : R \to R_1^0$ – кільцевий гомоморфізм.

Кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує кільцевий гомоморфізм $\overline{\delta} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\delta}(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$, де $r_{ij} \in R$, $1 \le i, j \le n$.

Кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ індукує кільцевий антигомоморфізм $\overline{\nu} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\nu}(r_{ij}) = (\nu r_{ji}) = \mathrm{т}(\nu r_{ij})$, де т – означає класичне транспонування.

Зрозуміло, що нульовий гомоморфізм кільця R індукує нульовий гомоморфізм кільця R_n.

Гомоморфізм групи, який відображає всі елементи групи в одиничний елемент, прийнято називати одиничним.

Звуження кільцевого гомоморфізму і кільцевого антигомоморфізму, які відображають одиничний елемент у одиничний елемент, на мультиплікативну групу кільця породжують груповий гомоморфізм і груповий антигомоморфізм відповідно.

Груповий антигомоморфізм кільця R також породжує груповий гомоморфізм мультипликативної групи кільця, якщо кожному елементу поставити у відповідність елемент обернений до його антигомоморфного образу.

Зокрема, кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує груповий гомоморфізм $\overline{\delta} : GL(n,R) \to GL(n,R_1)$ (який прийнято називати кільцевим) за правилом $\overline{\delta} g = \left(\overline{\delta g}\right)$, $g \in GL(n,R)$, а кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ груповий гомоморфізм $\overline{\nu} : GL(n,R) \to GL(n,R_1)$ (який прийнято називати котраградієнтним) за правилом $\overline{\nu} g = (\overline{\nu} g)^{-1}$, $g \in GL(n,R)$.

Нехай 1 – одиниця, e – ідемпотент кільця R_1 і e_1 – деякий ідемпотент, який ортогональний з елементами кілець δR, νR. Відображення Λ_e групи $GL(n,R)$ у групу $diag(GL(n,R_1),1)$ визначається за правилом

$$\Lambda_e(x) = \overline{\delta} x e + \overline{\nu} x^{-1}(1-e) + e_1, \ x \in GL(n,R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n,R)$ у групу $diag(GL(n,R_1),1)$, якщо ідемпотент e комутує з елементами кілець δR, νR.

Без обмеження загальності можна вважати, що відображення $\Lambda_e : E(n,R) \to diag(E(n,R_1),1)$ визначається на елементарних трансвекціях $t_{ij}(r)$, $r \in R$ за правилом

$$\Lambda_e(t_{ij}(r)) = t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\delta r)(1-e) + e_1,$$

де $1 \le i \ne j \le n$, $\delta : R \to R_1$ – кільцевий гомоморфізм, $\delta(1) = 1$, 1 – одиниця кільця δR, e_1 – деякий ідемпотент кільця R_1, який ортогональний з елементами δR.

Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) K-модуль, L та P – ліві K-модулі,

$$g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$$

– ізоморфізм K-модулів, $\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n, індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$.

Відображення $\Lambda_0 : GL(n,R) \to EndW$ визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1}\left[\ \overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right] g, \ x \in GL(n,R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n,R)$ у групу $g^{-1} diag(GL(n, EndL),1)\, g \subseteq GL(W)$, якщо e комутує з елементами кілець δR і νR.

Одиничний елемент і центральний ідемпотент e кільця $EndL$ породжують одиничний елемент і центральний ідемпотент $e \cdot 1$ кільця $(EndL)_n$, які також будемо позначати 1 і буквою e відповідно.

Якщо $P = 0$, то ідемпотент e_1 відсутній.

Відображення Λ_0 на елементарних трансвекціях має вигляд

$$\Lambda_0 t_{ij}(r) = g^{-1}\left[t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\delta r)(1-e) + e_1\right] g,$$

де $1 \le i \ne j \le n$, δ – кільцевий гомоморфізм, $\delta(1) = 1$.

Означення 6. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$, якщо Λ збігається з Λ_0 на цій групі і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$.*

Аналогічно означується відображення Λ_e кільця R_n у кільце $diag\left((R_1)_n, 0\right)$ за правилом

$$\Lambda_e\left(x\right) = \overline{\delta}\left(x\right)e + e_1, \quad x \in R_n,$$

яке є гомоморфізмом кільця R_n у кільце $diag\left((R_1)_n, 0\right)$, якщо ідемпотент e комутує з елементами кільця δR.

Без обмеження загальності можна вважати, що відображення Λ_e визначається на матричних одиницях за правилом

$$\Lambda_e\left(re_{ij}\right) = \delta\left(r\right)e_{ij} + e_1, \quad r \in R,$$

де $1 \leq i, j \leq n$, $\delta : R \to R_1$ – кільцевий гомоморфізм, e_1 – деякий ідемпотент кільця R_1, який ортогональний з елементами δR.

Аналогічно означується відображення $\Lambda_0 : R_n \to diag\left((EndL)_n, 0\right)$ за правилом

$$\Lambda_0\left(x\right) = g^{-1}\left[\,\overline{\delta}\left(x\right)e + e_1\right]g, \quad x \in R_n,$$

яке є гомоморфізмом кільця R_n у кільце $g^{-1}diag\left((EndL)_n, 0\right)g \subseteq EndW$, якщо e комутує з елементами кільця δR.

Означення 7. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що кільцевий гомоморфізм $\Lambda : R_n \to EndW$, $n \geq 2$ допускає стандартний опис на кільці R_n, якщо Λ на R_n збігається з Λ_0 і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$.*

Якщо в групових і кільцевих означеннях гомоморфізма Λ_e кільце R_1 є кільцем $EndL$, то $\Lambda_0\left(x\right) = g^{-1}\Lambda_e\left(x\right)g$, де $x \in GL\left(n, R\right)$ або $x \in R_n$ відповідно.

Неважко бачити, що $\Lambda_0 t_{ij}\left(r\right)$, $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$ задовольняють комутаторні формули, а $\Lambda_0 t_{ij}\left(1\right) -$ $\Lambda_0 E$ матричні формули.

4. Локалізація. Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, S – мультиплікативно замкнута підмножина центра кільця K, яка містить 1 і не містить 0, K_S – локалізація K по S, $\Lambda_S : K \to K_S$ – канонічний кільцевий гомоморфізм, визначений за правилом $\Lambda_S\left(k\right) = \frac{ks}{s}$ для довільних $k \in K$ і $s \in S$. Очевидно, що $\Lambda_S\left(S\right) \subseteq K_S^*$.

Нехай W – ненульовий лівий K-модуль (не обов'язково вільний), W_S – його локалізація по S, $\Lambda_S : EndW \to EndW_S$ – канонічний гомоморфізм, визначений за правилом $\Lambda_S\left(\sigma\right)\left(\frac{w}{s}\right) = \frac{\sigma(w)}{s}$ для довільних $\sigma \in EndW$, $s \in S$, $w \in W$. Зрозуміло, що Λ_S – кільцевий гомоморфізм.

Означення 8. *Елемент m деякого кільця називається нільпотентним, якщо існує натуральне число k таке, що $m^k = 0$. Найменше з таких k називається ступенем нільпотентності елемента m. Сума одиничного і нільпотентного елемента називається уніпотентним елементом відповідного ступеня.*

У довільному асоціативному кільці K з 1 з нільпотентності елемента 2 випливає умова оборотності елемента 3, а з нільпотентності елемента 3 умова оборотності елемента 2.

Це слідує з рівностей

$$2^n = (3-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 3^i (-1)^{n-i} \quad i \quad 3^n = (2+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^i, \textit{де } n \geq 1.$$

З умови $2 \notin K^*$ випливає, що множина $S_1 = \{3^i \mid i \geq 0\}$ не містить нульових елементів, а з умови $3 \notin K^*$ випливає, що множина $S_2 = \{2^i \mid i \geq 0\}$ не містить нульових елементів.

Елементи 2 і 3 – оборотні в кільцях K_{S_1} і K_{S_2} відповідно і оскільки вони взаємно-прості, то $ker\ \Lambda_{S_1} \cap ker\ \Lambda_{S_2} = 0$.

5. Нерухомі та лишкові модулі.

Означення 9. *Нехай V – довільний R-модуль над асоціативним кільцем R з 1, σ –довільний ендоморфізм модуля V. Нерухомими та лишковими підмодулями модуля V ендоморфізма $\sigma : V \to V$ будемо називати підмодулі $R(\sigma) = (\sigma - 1)V$ і $P(\sigma) = ker(\sigma - 1)$ відповідно.*

Очевидно, що $R(\sigma) = \{(\sigma - 1)v \mid v \in V\}$ і $P(\sigma) = \{v \in V \mid \sigma v = v\}$, а також $R(\sigma - 1) = \sigma V$ і $P(\sigma - 1) = ker\ \sigma$.

Якщо σ – автоморфізм модуля V, то із рівності $\sigma^{-1} - 1 = (\sigma - 1)(-\sigma^{-1})$ випливає, що

$$R\left(\sigma^{-1}\right) = R(\sigma) \ \ i \ P\left(\sigma^{-1}\right) = P(\sigma).$$

Безпосередньою перервіркою встановлюється, що якщо g – довільний ендоморфізм модуля V, $g\sigma = \sigma g$, то

$$gR(\sigma) \subseteq R(\sigma) \ \ i \ gP(\sigma) \subseteq P(\sigma).$$

Зокрема, якщо g – автоморфізм модуля V, який комутує з σ, то

$$gR(\sigma) = R(\sigma) \ \ i \ gP(\sigma) = P(\sigma).$$

Цей же результат також слідує із загальних формул

$$gR(\sigma) = R\left(g\sigma g^{-1}\right) \ \ i \ gP(\sigma) = P\left(g\sigma g^{-1}\right),$$

які із-за рівності $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1)g^{-1}$ мають місце для будь-якого ендоморфізма σ і будь-якого автоморфізма g модуля V.

Якщо $e^2 = e$ – ідемпотент кільця $EndV$, то має місце пірсовий розклад

$$V = eV \oplus (1 - e)V, \ \ de \ v = ev + (1 - e)v, \ \ v \in V.$$

З цього розкладу випливає, що

$$P(e) = eV = \ker(1 - e) = \{v \in V \mid ev = v\},$$

$$R(e) = (1 - e)V = \ker e = \{v \in V \mid ev = 0\}.$$

Зокрема, $eR(e) = 0, \ \ (1 - e)P(e) = 0$.

6. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями.

Лема 2. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) K-модуль, $e_1, \dots, e_{n+1}$ – елементи кільця $EndW$, які задовольняють рівності $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, $1 \leq i, j \leq n + 1$, $e = e_1 + \cdots + e_{n+1}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – оборотні елементи кільця $EndP(e)$ такі, що*

$$\alpha_i e_k \alpha_i^{-1} = \left\{ \begin{array}{ccc} e_{k+1} & & k = i \\ e_{k-1} & , \ \textit{якщо} & k = i + 1 \\ e_k & & k \neq i, i + 1 \end{array} \right. ,$$

$$\alpha_i^2 = e - 2e_i - 2e_{i+1}, e_k(\alpha_i - e) = 0, \text{якщо } k \neq i, i+1, k \leq n$$

елементи $e\,(r)$ *кільця* $EndP\,(e)$ *комутують з елементами* $e_1, \ldots, e_{n+1}$,

$$e\,(r_1 + r_2) = \; e\,(r_1) + e\,(r_2)\,, e\,(r_1 r_2) = \; e\,(r_1)\,e\,(r_2)\,, e\,(1) = e_1$$

для будь-яких елементів r, r_1, r_2 *кільця* R.

Тоді існують ліві K*-модулі* L *і* P *модуля* $P(e)$ *і ізоморфізм* $g : P(e) \to P(e)_g$, $P(e)_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, *який індукує внутрішній ізоморфізм* $\Lambda_g : EndP(e) \to EndP(e)_g$ *за правилом* $\Lambda_g\,(x) = gxg^{-1}$, *такий, що елементи* $\Lambda_g e_i$, $\Lambda_g \alpha_i$ *можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g e_i = diag\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right),$$

$$\Lambda_g \alpha_i = diag\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1, *\right),$$

$$\Lambda_g e\,(r) = diag\,(\delta\,(r)\,, 0, \ldots, 0)\,,$$

де $\delta : R \to EndL$ *кільцевий гомоморфізм,* $1 \leq i \leq n$.

Доведення. Оскільки $e, e_1, e_2, \ldots, e_n$ ідемпотенти, то

$$P\,(e) = eW = e_1 W \oplus \cdots \oplus e_{n+1} W = P\,(e_1) \oplus \cdots \oplus P\,(e_{n+1})\,.$$

З рівностей

$$\begin{cases} \alpha_2 e_1 \alpha_2^{-1} = e_2 \\ \alpha_3 \alpha_2 e_1 (\alpha_3 \alpha_2)^{-1} = e_3 \\ \cdots \\ (\alpha_n \ldots \alpha_2)\, e_1 (\alpha_n \ldots \alpha_2)^{-1} = e_n \end{cases}$$

випливає, що

$$P\,(e) = P\,(e_1) \oplus P\left(\alpha_2 e_1 \alpha_2^{-1}\right) \oplus \cdots \oplus P\left((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e_1 (\alpha_n \ldots \alpha_2)^{-1}\right) \oplus P\,(e_{n+1})\,.$$

Позначимо $L = P\,(e_1)$, $P = P\,(e_{n+1})$.Тоді

$$P\,(e) = L \oplus \alpha_2 L \oplus \alpha_3 \alpha_2 L \oplus \cdots \oplus \alpha_n \ldots \alpha_2 L \oplus P.$$

Розглянемо ізоморфізм модулів $g : P\,(e) \to P\,(e)_g$, $P\,(e)_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, який визначений за правилом

$$g\,(l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_2)\, l_n + p) = l_1 + \cdots + l_n + p$$

для всіх $l_1, \ldots, l_n \in L$, $p \in P$ і індукований ним внутрішній ізоморфізм Λ_g : $EndP\,(e) \to EndP\,(e)_g$, де $\Lambda_g \sigma = g\sigma g^{-1}$ для всіх $\sigma \in EndP\,(e)$.

Будемо зображати елементи кільця $EndP\,(e)$ формальними $(n+1)\times(n+1)$ матрицями, записуючи дію елементів кільця $EndP\,(e)_g$ на модулі $P\,(e)_g$ у стовпчики. Як показано в [1] $\Lambda_g e_i$, $\Lambda_g \alpha_i$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g e_i = diag\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},0,\ldots,0\right), \Lambda_g\alpha_i = diag\left(\underbrace{*,\ldots,*}_{i-1},\begin{pmatrix}0&*\\1&*\end{pmatrix},*,\ldots,*\right).$$

де 0 і 1 – нуль і одиниця кілець $EndL$ і $EndP$ відповідно.

З рівностей $\alpha_i^2 = e - 2e_i - 2e_{i+1}, e_k(\alpha_i - e) = 0$, якщо $k \neq i, i+1, k \leq n$ випливає, що

$$\Lambda_g e_i = diag\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},0,\ldots,0\right),$$

$$\Lambda_g\alpha_i = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},1,\ldots,1,*\right).$$

Оскільки елементи $e\,(r)$ кільця $EndP\,(e)$ комутують з $e_1,\ldots,e_{n+1}$, то

$$\Lambda_g e\,(r) = diag\,(\delta\,(r)\,,*,\ldots,*)\,,$$

де $\delta : R \to EndL$ кільцевий гомоморфізм, $1 \leq i \leq n$.

З рівності $e\,(r) = e\,(r)\,e\,(1) = e\,(r)\,e_1$ випливає, що

$$\Lambda_g e\,(r) = diag\,(\delta\,(r)\,,0,\ldots,0)\,,\delta\,(1) = 1.$$

7. Зведення загального випадку до випадків, коли 2 або 3 – оборотні елементи.

Теорема 1. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $E\,(n,R) \subseteq G \subseteq GL\,(n,R)$, $n \geq 2$, W – лівий K-модуль, $\Lambda : G \to GL\,(W)$ – груповий гомоморфізм. Гомоморфізм Λ допускає стандартний опис на групі $E\,(n,R)$, якщо стандартний опис на групі $E\,(n,R)$ допускають будь-які гомоморфізми над асоціативними кільцями K з 1 в яких 2 або 3 є оборотними елементами.*

Доведення. Якщо елементи 2 або 3 – оборотні в кільці K, то все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що елементи 2 і 3 не належать K^* і, як наслідок, не є нільпотентними в кільці K.

Нехай $\Lambda : G \to GL\,(W)$ – довільний груповий гомоморфізм і гомоморфізми $\overline{\Lambda} = \Lambda_S\Lambda : G \to GL\,(W_S)$ допускають стандартний опис на групі $E\,(n,R)$.

Нехай $\Lambda E = e$. Неважко бачити, що $e^2 = e$ і має місце розклад $W = P\,(e) \oplus R\,(e)$, де $eR\,(e) = 0$, $R\,(e) = 0$, $P\,(e) = W$.

В кільці R_n матриці

$$t_i = (t_{ii+1}\,(1) - E)\,(E - t_{i+1i}\,(-1))\,, t_{ii+1},$$

$$t\,(r) = (t_{12}\,(r) - E)\,t_{12},$$

де $r \in R$, $1 \leq i \leq n$, ($n+1$ ототожнюється з 1), задовольняють співвідношення леми 1.

Розглянемо в кільці $EndW$ елементи

$$e_i = (\varLambda t_{ii+1}(1) - e)(e - \varLambda t_{i+1i}(-1)), \alpha_i = \varLambda t_{ii+1},$$

$$e(r) = (\varLambda t_{12}(r) - e)\alpha_1,$$

де $r \in R$, $1 \leq i \leq n$, ($n+1$ ототожнюється з 1).

Оскільки в R_n між матрицями e_i, α_i, $e(r)$ виконуються співвідношення леми 1, а $\varLambda_S : EndW \to EndW_S$ кільцевий гомоморфізм такий, що гомоморфізм $\overline{\varLambda_S} = \varLambda_S \varLambda : G \to GL(W) \to GL(W_S)$ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$, то аналогічні співвідношення до співвідношень леми 1 мають місце і для елементів $\varLambda_S e_i$, $\varLambda_S \alpha_i$, $\varLambda_S e(r)$.

Враховуючи, що $ker\ \varLambda_{S_1} \cap ker\ \varLambda_{S_2} = 0$, отримуємо, що елементи e_i, α_i, $e(r)$ задовольняють умови леми 2.

Згідно з лемою 2 існують ліві K-модулі L і P модуля W і ізоморфізм $g : W \to W_g$, $W_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, який індукує внутрішній ізоморфізм $\varLambda_g : EndW \to EndW_g$ такий, що елементи $\varLambda_g e_i$, $\varLambda_g \alpha_i$ можна зобразити формальними матрицями

$$\varLambda_g e_i = diag\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right),$$

$$\varLambda_g \alpha_i = diag\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1, *\right),$$

$$\varLambda_g e(r) = diag(\delta(r), 0, \ldots, 0).$$

За умовою гомоморфізм $\varLambda_s \varLambda$ допускає стандартний опис. Це означає, що

$$\varLambda_g(\varLambda_s \varLambda)(t_{12}(r)) = \varLambda_s(e(\delta r)\alpha_2 + \alpha_2 e(\delta r) + e_1),$$

де $\delta : R \to EndL_s$ кільцевий гомоморфізм.

Оскільки $ker\varLambda_{s_1} \cap ker\varLambda_{s_2} = 0$, то

$$\varLambda_g \varLambda(t_{12}(r)) = e(\delta r)\alpha_2 + \alpha_2 e(\delta r) + e_1.$$

Тому

$$\varLambda(t_{12}(r)) = g^{-1}[t_{12}(\delta r) e + t_{21}(-\delta r)(1 - e) + e_1] g.$$

де $1 \leq i \neq j \leq n$, δ – кільцевий гомоморфізм, $\delta(1) = 1$.

Спряженням елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ доводимо, що

$$\varLambda(t_{ij}(r)) = g^{-1}[t_{ij}(\delta r) e + t_{ji}(-\delta r)(1 - e) + e_1] g$$

для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$.

Тим самим доведено, що гомоморфізм $\varLambda = \varLambda_0$ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$.

Теорема 1 допускає узагальнення. Виявляється гомоморфізм $\varLambda$ допускає стандартний опис на групі $GL(n, R)$, якщо стандартний опис допускають гомоморфізми групи $GL(n, R)$ над кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

Адже, як і в теоремі 1, якщо елементи 2 або 3 – оборотні в кільці K, то все доведено. Якщо $2 \notin K^*$ і $3 \notin K^*$ одночасно, то елементи 2 і 3 не є нільпотентними в кільці K. У цьому випадку елементи 2 і 3 – оборотні в кільцях K_{s_1} і K_{s_2} відповідно, де $S_1 = \{2^i \mid i \geq 0\}$ або $S_2 = \{3^i \mid i \geq 0\}$. Оскільки елементи 2 і 3 є взаємнопростими числами, то гомоморфізми $\Lambda_i : G \to GL\,(W) \to GL\,(W_{s_i})$, $W \to W_{s_i}$, $(i = 1, 2)$ індукують вкладення $W \to W_{s_1} \oplus W_{s_2}$, $GL\,(W) \to GL\,(W_{s_1}) \otimes GL\,(W_{s_2})$.

Гомоморфізми Λ_i за припущенням допускають стандартний опис на групі $GL\,(n, R)$. Тому існують ізоморфізми $g_i : W_{s_i} \to \underbrace{L_i \oplus \cdots \oplus L_i}_{n} \oplus P_i$ такі, що

$$\Lambda_i\,(x) = g_i^{-1} \left[\overline{\delta_l}\,(x)\, e_i + \overline{\nu_l}(x)^{-1}\,(1 - e_i) + e_i^{'}\right] g_i,$$

де $x \in GL\,(n, R)$, $\overline{\delta_l}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu_l}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta_i : R \to EndL_i$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu_i : R \to EndL_i$ відповідно в кільце $(EndL_i)_n$, *1* – одиниця і e_i – центральний ідемпотент кільця $EndL_i$, а $e_i^{'}$ – одиниця кільця $EndP_i$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL_i$.

Позначимо $L = L_1 \oplus L_2$, $P = P_1 \oplus P_2$, $e = e_1 + e_2$, $e^{'} = e_1^{'} + e_2^{'}$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $g = g_1 + g_2$. Можна вважати, що g – ізоморфізм $W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, e – центральний ідемпотент кільця $EndL$, δ – кільцевий гомоморфізм $R \to EndL$, ν – кільцевий антигомоморфізм $R \to EndL$ такі, що

$$\Lambda\,(x) = g^{-1} \left[\overline{\delta}\,(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}\,(1 - e) + e^{'}\right] g$$

для всіх $x \in GL\,(n, R)$, 1 – одиниця кільця $EndL$, $e^{'}$ – одиниця кільця $EndP$.

Таким чином гомоморфізм Λ допускає стандартний опис на групі $GL\,(n, R)$, якщо стандартний опис допускають гомоморфізми групи $GL\,(n, R)$ над кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

8. Гомоморфізми з умовою (*). З теореми 1 випливає, що, якщо гомоморфізм $\Lambda : G \to GL\,(W)$ групи G, $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$ з деякою умовою, яка зберігається при локалізаціях по степенях елементів 2 і 3, а всі гомоморфізми з заданою умовою над кільцями, в яких елементи 2 або 3 є оборотними, допускають стандартний опис на групі $E\,(n, R)$, то Λ допускає стандартний опис на групі $E\,(n, R)$.

Однією з таких умов на гомоморфізм Λ може бути умова (*).

Означення 10. *Будемо казати, що гомоморфізм Λ задовольняє умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ існують натуральні числа s_1 і s_2, які оборотні в K і $A \in G$ такі, що $\Lambda A = 1 + s_1 m$ і з рівності $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A$, $B \in G$ випливає, що $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.*

Зауважимо, що коли мова йде про нільпотентний елемент m, то передбачається, що він існує. Тому гомоморфізми з умовою (*) є неодиничними.

Ізоморфізми задовольняють умову (*), якщо покласти $s_1 = s_2 = 1$ і скористатися тим, що $1 + m$ є оборотним елементом.

Якщо в означенні гомоморфізма з умовою (*) ΛA комутує із скінченною кількістю елементів ΛB_i, $B_i \in G$, $1 \leq i \leq t$, то існує натуральне число s_2, яке оборотне в K таке, що A^{s_2} комутує з $B_1, \ldots, B_t$. Аналогічно доводиться, що замість одного елемента $A \in G$ можна розглядати скінченну кількість елементів групи G.

Відмітимо, що якщо гомоморфізм Λ_0 задовольняє умову (*), то кільця δR і νR співпадають з кільцем $EndL$.

Означення 11. *Будемо казати, що гомоморфізм Λ задовольняє розширену умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ існують натуральні числа s_1 і s_2, які оборотні в K і $A \in G$ такі, що $\Lambda A = 1 + s_1 m$ і з рівності $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A^k$, $B \in G$, $k \in Z$ випливає, що $A^{s_2} B = B A^{s_2 k}$.*

Гомоморфізм, який задовольняє розширену умову (*), при умові, що серед цілих чисел k міститься 1, задовольняє умову (*). Для цього досить покласти $k = 1$.

Виявляється, що розширена умова (*) і умова (*) зберігаються при локалізаціях.

Лема 3. *Якщо $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє розширену умову (*), то гомоморфізм $\overline{\Lambda} : G \to GL(W_S)$ також задовольняє розширену умову (*). Зокрема гомоморфізм $\overline{\Lambda}$ зберігає умову (*).*

Доведення. Нехай $\overline{m}$ – довільний ненульовий нільпотентний елемент кільця $EndW_S$, $\overline{m^2} = \overline{0}$. Це означає, що $m \neq 0$ і $s_0 \in EndW$ для деякого $s_0 \in S$ і існує $s_0' \in S$ такий що $s_0'(s_0 m)^2 = 0$. Тоді $\left(s_0 s_0' m\right)^2 = 0$. За умовою існує матриця $A \in G$ така, що $\Lambda A = 1 + s_1 m_1$, де $m_1 = s_0 s_0' m$, $s_1 \in S$, $\overline{m_1} = \overline{m}$, $\overline{\Lambda A} = \overline{1} + \overline{s_1 m_1}$.

Якщо $g \in G$ і $\overline{\Lambda g}\ \overline{\Lambda A} = \overline{\Lambda} A^k \overline{\Lambda} g$, де k – ціле число, то існує $s' \in S$, що $\left(\Lambda g \cdot \Lambda A - \Lambda A^k \Lambda g\right) s' = 0$. Тому $\left(\Lambda g m_1 - k m_1 \Lambda g\right) s_1 s' = 0$ і, як наслідок, $\Lambda g \Lambda A^{s_1 s'} = \Lambda A^{k s_1 s'} \Lambda g$. Згідно розширеній умові (*) існує $s_2 \in S$ такий, що $g A^{s_2} = A^{k s_2} g$.

Тим самим доведено, що $\overline{\Lambda}$ задовольняє розширену умову (*).

В [2 – 4] доведено, що гомоморфізми з умовою (*) при $n \geq 3$ допускають стандартний опис на групі $E(n, R)$, якщо 2 оборотний елемент в кільці K і при $n \geq 4$, якщо 3 оборотний елемент в кільці K.

Тому довільний гомоморфізм з умовою (*) при $n \geq 4$ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$ над довільними асоціативними кільцями R і K з одиницями.

Це означає, що має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$.*

Зауважимо, що якщо $n = 3$ і 2 необоротний елемент в кільці K, то можуть існувати нестандартні гомоморфізми [5].

Відмітимо також, що результат І.З. Голубчика [9] про ізоморфізми матричних груп $GL(n, R)$, $n \geq 4$ і $GL(m, K)$, $m \geq 2$ над асоціативними кільцями R і K з одиницями випливає із теореми 2.

Підкреслимо, що у випадку, коли гомоморфізм з умовою (*) Λ є ізоморфізмом, то в його стандартному описі $e_1 = 0$ і δ – ізоморфізм кільця R на кільце $EndL$. Зрозуміло, що не всі гомоморфізми з умовою (*) є ізоморфізмами.

Можливо умову (*) можна ослабити або запропонувати іншу умову на гомоморфізм як це, наприклад, зроблено в [8].

9. Кільцеві гомоморфізми. Має місце

Теорема 3. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий K-модуль, $\Lambda : R_n \to EndW$ – кільцевий гомоморфізм, $n \geq 2$. Тоді Λ допускає стандартний опис на кільці R_n.*

Доведення. Нехай $\Lambda : R_n \to EndW$ – довільний кільцевий гомоморфізм.

Нехай $\Lambda E = e$. Неважко бачити, що $e^2 = e$ і має місце розклад $W = P\left(e\right) \oplus R\left(e\right)$, де $eR\left(e\right) = 0$ і $\left(1 - e\right) P\left(e\right) = 0$.

Оскільки елементи кільця R_n комутують з E, то елементи $\Lambda\left(R_n\right)$ комутують з e. Нехай x – довільний елемент кільця R_n. Очевидно, що $\Lambda\left(x\right) e = \Lambda\left(x\right)$. Тому $\Lambda\left(x\right) R\left(e\right) \subseteq \Lambda\left(x\right) eR\left(e\right) = 0$, $\Lambda\left(x\right) P\left(e\right) \subseteq P\left(e\right)$ для всіх $x \in R_n$.

В кільці R_n матриці

$$t_i = \left(t_{ii+1}\left(1\right) - E\right)\left(E - t_{i+1i}\left(-1\right)\right), t_{ii+1},$$

$$t\left(r\right) = \left(t_{12}\left(r\right) - E\right) t_{12},$$

де $r \in R$, $1 \leq i \leq n$, ($n + 1$ ототожнюється з 1), задовольняють співвідношення леми 1.

Оскільки $\Lambda : R_n \to EndW$ кільцевий гомоморфізм, то співвідношення леми 1 в кільці $EndP\left(e\right)$ задовольняють елементи

$$e_i = \Lambda t_i = \left(\Lambda t_{ii+1}\left(1\right) - e\right)\left(e - \Lambda t_{i+1i}\left(-1\right)\right), \quad \alpha_i = \Lambda t_{ii+1},$$

$$e\left(r\right) = \Lambda t\left(r\right) = \left(\Lambda t_{12}\left(r\right) - e\right) \alpha_1,$$

де $r \in R$, $1 \leq i \leq n$, ($n + 1$ ототожнюється з 1).

Це означає, що елементи e_i, α_i, $e\left(r\right)$ задовольняють умову леми 2.

Згідно з лемою 2 існують ліві K-модулі L і P модуля $P(e)$ і ізоморфізм $g : P(e) \to P(e)_g$, $P(e)_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, який індукує внутрішній ізоморфізм $\Lambda_g : EndP(e) \to EndP(e)_g$ такий, що елементи $\Lambda_g e_i$, $\Lambda_g \alpha_i$, $\Lambda_g e\left(r\right)$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g e_i = diag\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right),$$

$$\Lambda_g \alpha_i = diag\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1, *\right),$$

$$\Lambda_g e\left(r\right) = diag\left(\delta\left(r\right), 0, \ldots, 0\right),$$

де $1 \leq i < n$, $\delta : R \to EndL$ кільцевий гомоморфізм, 1 – одиниця кільця $EndL$.

Оскільки $\Lambda_g e = diag\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0\right)$ то $P\left(e_{n+1}\right) = 0$.

З отриманого випливає, що $\Lambda\,(e_{12}) = e(1)\alpha_2$

$$\Lambda_g \Lambda\,(re_{12}) = \Lambda_g \Lambda\,(re_{11}e_{12}) = \Lambda_g \Lambda\,(t\,(r)\,\Lambda(e_{12})) = \Lambda_g\,(e\,(r)\,\alpha_2) =$$

$$= diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \delta\,(r) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right).$$

Тому

$$\Lambda\,(re_{12}) = g^{-1} diag\,(\delta\,(r)\,e_{12},\ 0)\,g.$$

Спряженням елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ доводимо, що

$$\Lambda\,(re_{ij}) = g^{-1} diag\,(\delta\,(r)\,e_{ij},\ 0)\,g$$

для всіх $1 \le i, j \le n$, $r \in R$.

Це означає, що гомоморфізм Λ допускає стандартний опис на кільці R_n.

10. Висновки та перспективи подальших досліджень. Задача опису гомоморфізмів матричних груп та кілець над асоціативними кільцями є актуальною, активно розвивається, має застосування в алгебраїчній K-теорії, теорії кілець і модулів, теорії зображень груп над кільцями.

У даній роботі розроблений метод зведення опису групових гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями до опису гомоморфізмів матричних груп над кільцями з умовою, яка зберігається при локалізаціях за степенями елементів 2 і 3.

Показано, що для цього достатньо вміти знаходити образи елементів, які є інваріантними відносно кільцевих і контраградієнтних гомоморфізмів одночасно. Це дає можливість з єдиних позицій описувати як групові гомоморфізми матричних груп так і кільцеві гомоморфізми матричних кілець над асоціативними кільцями з 1.

Незважаючи на досягнення в описі гомоморфізмів матричних груп над кільцями, залишається чимало актуальних задач, які потребують вирішення. Однією з них є задача знаходження умов на гомоморфізми, які зберігаються при локалізаціях.

Список використаної літератури

1. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 1 (36). С. 16–29. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29.
2. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфізми з умовою (*), якщо 2 – оборотний елемент *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 2 (37), С. 101–113. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113.
3. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2 С. 152–171.
4. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). – С. 99–114.
5. Петечук В.М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. *Матем. сб.* 1982. №.4. С. 539–547.
6. Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами. *Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1983. Т. 3 (38). С. 73–85.
7. Зельманов Е.И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами. *Сиб. мат. журн.* 1985. Т.4. С.49–67.

8. Петечук В.М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки.* 1989. Т.45, вып 2. С. 83–94.
9. Golubchik I.Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics.* 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.
10. Hahn A.J., O'Meara O.T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer, 1989. 578 p.

Petechuk V. M., Petechuk Y. V. Homomorphisms of matrix groups and rings over associative rings.

In the article from the same positions group homomorphisms of matrix groups and ring homomorphisms of matrix rings over associative rings with 1 are described.

It is shown that the description of homomorphisms of matrix groups $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$ into the group of automorphisms $GL(W)$ of the left (optionally free) K-module W over an arbitrary associative ring K with 1 is reduced to cases where 2 or 3 are reversible elements in the ring K. It is proved that they allow a standard description of homomorphisms of the group of elementary transvections $E(n,R)$, if such a description allows homomorphisms of matrix groups over rings K, in which 2 or 3 are reversible elements.

The ring homomorphisms are also described $\Lambda : R_n \to EndW$, $n \geq 2$ of the left (optionally free) K-module W over an arbitrary associative ring K with 1. It is shown that homomorphisms Λ allow a standard description on the ring R_n.

Keywords: associative rings with 1, group homomorphisms of matrix groups, ring homomorphisms of matrix rings, formal matrices, standard description.

References

1. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2020). Images by formal matrices of elements of matrix groups over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1 (36),* 16 – 29. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29 [in Ukrainian].
2. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2020). Homomorphisms with condition (*) if 2 is a reversible element. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2 (37)*, 101 – 113. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113 [in Ukrainian].
3. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2 (25)*, 152 – 171 [in Russian].
4. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1 (25)*, 99 – 114 [in Russian].
5. Petechuk, V.M. (1982). Automorphisms of matrix groups over commutative rings. it Mathematical Notes, 4, P. 539–547.
6. Golubchik, I.Z., & Mikhalev, A.V. (1983). Isomorphism of general linear groups over associative rings. *Moscow University Mathematics Bulletin, 38(3)*, 73 – 85.
7. Zelmanov, E.I. (1985). Isomorphism of linear groups over on associative rings. *Siberian Mathematical Journal, 4 (26)*, 49 – 67.
8. Petechuk, V.M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. *Mathematical Notes, 2 (45)*, P. 83–94.
9. Golubchik, I.Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics, 131(1)*, P. 123–136.
10. Hahn, A.J., & O'Meara, O.T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer, 578 p.

Одержано 10.04.2021