УДК 512.643.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).16-21

М. Ю. Бортош

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри алгебри,
канд. фіз.-мат. наук
maria.bortos@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1648-1350

2-СПАДКОВА ЗВІДНІСТЬ ЦИКЛІЧНИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ІЗ ФІКСОВАНИМИ ВИЗНАЧАЛЬНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ НАД КОМУТАТИВНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

Властивості канонічно циклічних та ланцюгових мономіальних матриць над комутативними кільцями вивчалися в багатьох роботах, зокрема їх звідність та незвідність, розкладність і нерозкладність. Відомі критерії незвідності канонічно циклічних матриць малого порядку n над комутативним локальним кільцем K з радикалом $R = tK \neq 0$ ($n < 7$ для $R \neq 0$ і $n < 5$ для $R^2 \neq 0$), а також необхідна умова незвідності канонічно циклічних матриць довільної ваги, в якій основну роль відіграє зв'язок між порядком та вагою матриці. При дослідженні канонічно циклічних мономіальних матриць порядку n розглядалися різні типи звідності: $(*, 2)$-звідність, $(*, 3)$-звідність та 2-спадкова звідність. В роботі розглядається комутативне локальне кільце K з ненульовим радикалом $R = RadK$ і ненульовий нільпотентний елемент $t \in R$ такий, що $t^m = 0$, де m – степінь нільпотентності елемента t. Для канонічно циклічних матриць визначені визначальні та вагові послідовності. Вивчаються достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем K. Доведена 2-спадкова звідність канонічно $(t, *)$-циклічних мономіальних матриць великої ваги порядку n над комутативним локальним кільцем у випадку, коли їх визначальні послідовності містять в собі підпослідовності фіксованого вигляду. Під підпослідовністю послідовності завжди розуміється зв'язна (з точністю до циклічної перестановки послідовності) підпослідовність. Основними методами дослідження є методи теорії зображень та матричних задач, метод елементарних перетворень матриць з комбінаторними аспектами.

Ключові слова: мономіальна матриця, канонічно циклічна матриця, комутативне кільце, визначальна послідовність, звідність, спадкова звідність.

1. Вступ. Матриці малих розмірів та канонічно циклічні матриці над локальними кільцями вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [1]– [6]).

Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Під *мономіальною матрицею* $A = (a_{ij})$ *над* K будемо розуміти матрицю порядку n (тобто, розміру $n \times n$), в кожному рядку і в кожному стовпці якої стоїть не більше одного ненульового елемента.

Будь-яка циклічна мономіальна матриця порядку n над кільцем K переставно подібна матриці вигляду

$$A = M_t(\overline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\overline{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Така матриця A називається *канонічно циклічною*, а послідовність $\overline{a}$ — її *визначальною послідовністю.*

Відносно вищеприведених означень і позначень див., напр., [5].

Нехай K позначає комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем. Групу оборотних елементів кільця K (відносно множення) позначатимемо через K^*. Тоді єдиний максимальний ідеал (радикал) R кільця K дорівнює $tK \neq 0$, де t визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який елемент $x \in K$ має вигляд εt^s, де $\varepsilon \in K^*$ і $s \geq 0$. Число s (яке не залежить від вибору t) називаємо *вагою елемента* x. Якщо K — комутативне локальне кільце (не обов'язково головних ідеалів) і t — елемент радикала кільця, то канонічно циклічну матрицю M з визначальною послідовністю $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$ будемо називати *канонічно* $(t,*)$*-циклічною.*

2. Теореми про 2-спадкову звідність. Канонічно циклічна матриця A називається 2-*спадково звідною*, якщо подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

де діагональні блоки A_{11} і A_{22} є також канонічно циклічними [6].

Далі вважатимемо, що K — комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$ і t — ненульовий елемент із R такий, що $t^m = 0$, $t^{m-1} \neq 0$.

Під підпослідовністю послідовності завжди розуміємо зв'язну (з точністю до циклічної перестановки послідовності) підпослідовність.

Введемо позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем K. $P_{ij}(a)$ позначає додавання i-го рядка, помноженого на елемент $a \in K$, до j-го рядка. $Q_{ij}(a)$ позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через $[m \overset{a}{\to} s]^+$ позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $P_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $Q_{sm}(-a)$, а через $[m \overset{a}{\to} s]^-$ — перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $Q_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $P_{sm}(-a)$.

Теорема 1. *Канонічно* $(t,*)$*-циклічна матриця* 2*-спадково звідна над кільцем* K*, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності* (t^i, t^{p+q}, t^j) *і* (1)*, де* $i+q \geq m$, $j+p \geq m$.

Доведення. Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|ccccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -t^q & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_s \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{s-1} & 0
\end{array}\right)$$

перетворення $[r+3 \xrightarrow{t^q} r+2]^-$, маємо матрицю

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccc|ccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^{p+q} & t^p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0
\end{array}\right).$$

Застосувавши до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-t^p} r+4]^+$, маємо матрицю

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccc|ccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^{p+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0
\end{array}\right),$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду $M(1,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,t^i,t^{p+q},t^j,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s)$.

Теорема 2. *Канонічно $(t,*)$-циклічна матриця 2-спадково звідна над кільцем K, якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності $(t^i,t^u,t^j,1,t^v)$ і $(1,1,1)$, де $i+u \geq m$, $j+v \geq m$.*

Доведення. Якщо $u=p+q$ і $i+q \geq m$, $j+p \geq m$, то звідність матриці випливає з попередньої теореми. В іншому випадку доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1.

Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$
N=\left(\begin{array}{cccccccc|ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0
\end{array}\right)
$$

послідовно перетворення $[r+5 \xrightarrow{t^u} r+4]^-$, $[1 \xrightarrow{-1} r+6]^+$, $[2 \xrightarrow{-t^j} r+7]^+$, $[3 \xrightarrow{-t^j} r+8]^-$, маємо матрицю

$$
N_1=\left(\begin{array}{cccccccc|ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0
\end{array}\right),
$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду $M(1,1,1,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,t^i,t^u,t^j,1,t^v,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s)$.

3. Висновки. У статті розглядається комутативне локальне кільце K з ненульовим радикалом $R = RadK$ і ненульовий нільпотентний елемент $t \in R$ такий, що $t^m = 0$, де m – степінь нільпотентності елемента t. Вивчаються достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем K. Доведена 2-спадкова звідність канонічно $(t,*)$-циклічних мономіальних матриць великої ваги порядку n над комутативним локальним кільцем у випадку, коли їх визначальні послідовності містять в собі підпослідовності фіксованого вигляду.

Список використаної літератури

1. Pizarro A. Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring. *Linear Algebra and Its Applications.* 1983. 54. P. 29–51.
2. Avni N., Onn U., Prasad A., Vaserstein L. Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Local Principle Ideal Ring. *Comm. Algebra.* 2009. 37, no 8. P. 2601–2615.
3. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math.* 2013. 16, no 2. P. 171–187.
4. Бондаренко В. М., Бортош М. Ю. Про $(*, 2)$-звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2016. Вип. 29, №2. С. 22–30.
5. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math.* 2016. Вип. 22, № 1, 11–20.
6. Бондаренко В. М., Бортош М. Ю. Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2017. Вип. 30, № 1. С. 11 – 24.

Bortos M. Yu. 2-Hereditary reducibility of cyclic monomial matrices with fixed determining sequences over a commutative local ring.

Properties of canonically cyclic monomial matrices over commutative rings were studied in many works, in particular, their reducibility and irreducibility, properties of decomposable and indecomposable matrices. The criterion of the irreducibility of canonically cyclic small-order matrices over a commutative local ring K with the radical $R = tK \neq 0$ ($n < 7$ for $R \neq 0$ and $n < 5$ for $R^2 \neq 0$) is known, as well as the necessary condition for the irreducibility of canonically cyclic matrices of arbitrary weight in which a relation between the order and weight of the matrix plays a major role. In the study of canonically cyclic matrices we considered various types of the reducibilities: $(*, 2)$-reducibility, $(*, 3)$-reducibility and 2-hereditary reducibility. In the paper we consider a commutative local ring with the radical $R = tK \neq 0$ and nilpotent element $t \in R$ such that $t^m = 0$, where m is the degree of nilpotency of the element t. For the canonically cyclic matrices the determining and weight sequences are defined. We study sufficient conditions for the reducibility of canonically cyclic matrices of larger weight over a commutative local ring K. It is proved the 2-hereditary reducibility of canonically $(t, *)$-cyclic monomial matrices of order n over a commutative local ring in the case when their defining sequences contain subsequences of a fixed form. The subsequence of the determining sequence is a connected (according to cyclic rearrangement of the sequences) subsequence. The main methods of research are methods of the theory of images and the method of elementary transformations of matrices with combinatorial aspects.

Keywords: monomial matrix, canonically cyclic matrix, commutative ring, determining sequence, reducibility, hereditary reducibility.

Список використаної літератури

1. Pizarro, A. (1983). Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring. *Linear Algebra and Its Applications, 54*, 29–51.
2. Avni, N., Onn, U., Prasad, A., & Vaserstein, L. (2009). Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Local Principle Ideal Ring. *Comm. Algebra, 37 (8)*, 2601–2615.
3. Bondarenko, V. M., Bortos, M. Yu., Dinis, R. F., & Tylyshchak, A. A. (2013). Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math., 16 (2)*, 171–187.
4. Bondarenko, V. M., & Bortosh, M. Yu. (2016). Pro $(*, 2)$-zvidni monomialni matrytsi nad komutatyvnymy kilciamy [On $(*, 2)$-reducible monomial matrices over commutative rings].

Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 29 (2), 22–30. [in Ukrainian].

5. Bondarenko, V. M., Bortos, M. Yu., Dinis, R. F., & Tylyshchak, A. A. (2016). Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math., 22 (1)*, 11–20.
6. Bondarenko, V. M., & Bortosh, M. Yu. (2017). Dostatni umovy zvidnosti v katehorii monomialnykh matryts nad komutatyvnym lokalnym kilcem [Sufficient conditions in the category of monomial matrices over a commutative local ring]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 30 (1)*, 11 – 24. [in Ukrainian].

Одержано 13.03.2021