УДК 517.946
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).55-60

О. І. Когутич

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант
oksana.kohutych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3094-2467

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ А.М. НАХУШЕВА ДЛЯ ДИФРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ

У роботі узагальнюються результати раніше відомих наукових публікацій по дослідженню та наближеному інтегруванню нелінійного ДРЧП поширення вологи у пористих середовищах.

У статті досліджується крайова задача з нелокальною умовою А.М. Нахушева для диференціального рівняння поширення вологи. Побудовано одну модифікацію двостороннього методу для наближеного розв'язання еквівалентного до крайової задачі інтегро-диференціального рівняння. Визначено функції порівняння до крайової задачі. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі.

Доведено рівномірну збіжність побудованих послідовностей до єдиного роз'язку розглядуваної задачі та виконання диференціальних нерівностей.

Ключові слова: умова А.М. Нахушева, диференціальні рівняння в частиних похідних, інтегро-диференціальні рівняння, функції порівняння, модифікація двостороннього методу.

1. Вступ. Як показано у роботах [1, 2] процеси фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерогенному середовищі, переносу вологи в грунтах описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних (ДРЧП) вигляду

$$\begin{aligned} &m(t,x)D^{(1.2)}U(t,x)+\alpha(t,x)D^{(1.1)}U(t,x)+d(t,x)D^{(1.0)}U(t,x)+\\ &+\eta(t,x)D^{(0.2)}U(t,x)+a(t,x)D^{(0.1)}U(t,x)+b(t,x)U(t,x)=g(t,x). \end{aligned} \tag{1}$$

Питанням існування та єдиності розв'язку рівняння (1) при різних вихідних даних присвячені роботи [3, 4].

У випадку нелінійного ДРЧП третього порядку з нелокальними крайовими умовами у роботі [5, 6] будується одна модифікація двосторонього методу дослідження та наближеного розв'язання розглядуваної задачі.

У даній статті узагальнюються результати, одержані у роботах [3–6].

2. Постановка задачі та допоміжні твердження і означення. Нехай у просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.2)}(D)\cap C(\overline{D})$, $D=\{(t,x)\mid t\in(0,b),\ x\in(0,a)\}$ потрібно знайти розв'язок нелінійного ДРЧП вигляду

$$\begin{aligned} &D^{(1.2)}U(t,x)+a_1(t,x)D^{(0.2)}U(t,x)+a_2(t,x)D^{(1.1)}U(t,x)=\\ &=f(t,x,U(t,x)D^{(0.1)}U(t,x)):=f[U(t,x)], \end{aligned} \tag{2}$$

який задовольняє крайові умови

$$
\begin{gathered}
U(a,x)=T(x), x\in[0,a], D^{(0.1)}U(t,a)=\psi(t), t\geq 0,\\
\int\limits_{x_0}^{a} D^{(1.0)}U(t,\xi)d\xi=\omega(t), t\in[0,b], 0\leq x_0\leq x\leq a,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

де $D^{(\kappa)}U(t,x):D\to D_\kappa\subset\mathbb{R}, \kappa=(\kappa_1,\kappa_2),\ f:B\to\mathbb{R},\ B=D\times\prod\limits_{\kappa_1,\kappa_2}D_\kappa\subset\mathbb{R}^4$, $\kappa_1=0,\kappa_2=0,1$.

Надалі будемо вважати, що $T(x)\in C^2[0,a],\psi(t)\in C^1[0,b],a_1(t,x)\in C^{(0.1)}(\overline{D})$, $\omega(t)\in C[0,b]$ і виконується умова узгодженності

$$
T'(a)=\psi(0), \tag{4}
$$

а права частина рівняння (2) $f[U(t,x)]\in C(\overline{B})$.

Справедлива наступна

Лема 1. *Якщо функція $f[U(t,x)]\in C(\overline{B})$, $T(x)\in C^2[0,a]$, $\psi(x)\in C^1[0,b]$, $a_1(t,x)\in C^{(0.1)}(\overline{D})$, $\omega(t)\in C[0,b]$, то крайова задача (2)-(4) та інтегро-диференціальне рівняння вигляду*

$$
U(t,x)=\int\limits_0^t\left\{\mathcal{L}F[U(\eta,\zeta)]-\frac{1}{a-x_0}\int\limits_{x_0}^{a}\mathcal{L}F[U(\eta,\zeta)]dx\right\}d\eta+\mathit{\Omega}(t,x), \tag{5}
$$

де

$$
\begin{gathered}
\mathit{\Omega}(t,x):=\frac{1}{a-x_0}\left\{\int\limits_0^t\omega(\eta)d\eta+\int\limits_{x_0}^{a}[T(x)-\mathit{\Phi}(t,x)]dx\right\}+\mathit{\Phi}(t,x),\\
\mathit{\Phi}(t,x):=\int\limits_0^x T'(\xi)exp\left(\int\limits_0^t a_1(\eta,\xi)d\eta\right)d\xi+\\
+\int\limits_a^x\int\limits_0^t[a_1(\eta,a)\psi(\eta)+\psi'(\eta)]K(\xi,t;a,\eta)d\eta d\xi,\\
K(x,t;\xi,\eta):=exp\left(\int\limits_x^{\xi}a_2(\eta,\tau)d\tau+\int\limits_t^{\eta}a_1(\tau,x)d\tau\right),\\
F[U(t,x)]:=f[U(t,x)]+[D^{(0.1)}a_1(t,x)+a_1(t,x)a_2(t,x)]D^{(0.1)}U(t,x),\\
\mathcal{L}F[U(\eta,\zeta)]:=\int\limits_x^a\int\limits_{\xi}^a K(\xi,t;\zeta,\eta)F[U(\eta,\zeta)]d\zeta d\xi
\end{gathered}
$$

є еквівалентними.

Неважко переконатись, що функція $\mathit{\Omega}(t,x)$ задовільняє усі крайові умови (3) і $\mathit{\Omega}(t,x)\in C^{(2.1)}(D)\cap C^{(1.1)}(\overline{D})$, а отже поклавши $U(t,x):=U(t,x)-\mathit{\Omega}(t,x)$ ми зводимо крайові умови (3) до однорідних, тому не зменшуючи загальності подальших міркувань будемо вважати, що $T(x)=\psi(t)=\omega(t)=0$.

Означення 1. *Будемо говорити, що функція $F[U(t,x)] \in C_3(\overline{B})$, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1) $F\left[U(t,x)\right] \in C(\overline{B})$;
2) *у просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \in \mathbb{R}^6$, $\Pi p_{xOt}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існуює така функція* $H\left(t,x,U(t,x),D^{(0.1)}U(t,x);V(t,x),D^{(0.1)}V(t,x)\right) :=$ $= H[U(t,x);V(t,x)]$, *що*
   (а) *для довільної з простору $C_1^{(1.2)}(\overline{D}) := C^{(1.2)}(D) \cap C^{(0,1)}(\overline{D})$ пари функцій $U(t,x), V(t,x) \in \overline{B}_1$ які задовольняють умови*

$$D^{(0.\kappa_2)}[U(t,x) - V(t,x)] \geq (\leq) 0, \kappa_2 = 0 (\kappa_2 = 1), (t,x) \in \overline{D},$$

   в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівність

$$H[U(t,x);V(t,x)] \geq H[V(t,x);U(t,x)], \tag{6}$$

   (б) $H[U(t,x);U(t,x)] \equiv F[U(t,x)]$;
3) *функція $H[U(t,x);V(t,x)]$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто для всяких з простору $C_1^{(1.2)}(\overline{D})$ функцій $U_r(t,x), V_r(t,x) \in \overline{B}_1, r = 1,2$, виконується умова*

$$|H[U_1(t,x);U_2(t,x)] - H[V_1(t,x);V_2(t,x)]| \leq$$
$$\leq L \sum_{r=1}^{2} \left(|W_r(t,x)| + \left|D^{(0.1)}W_r(t,x)\right|\right),$$

   де $W_r(t,x) = U_r(t,x) - V_r(t,x), r = 1,2$, L—стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція $F[U(t,x)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи із третього, то $F[U(t,x)] \in C_3(\overline{B})$. Зворотнє твердження не справедливе.

3. Побудова методу наближеного розв'язання інтегро-диференціального рівняння (5). Введемо позначення:

$$T_1 F[U(\eta,\zeta)] := \int_0^t \mathcal{L}F[U(\eta,\zeta)]d\eta,$$

$$T_2 F[U(\eta,\zeta)] := \frac{-1}{a - x_0} \int_0^t \int_{x_0}^a \mathcal{L}F[U(\eta,\zeta)]dxd\eta,$$

$$\begin{gathered} H[Z_p(t,x);V_p(t,x)] := f^p(t,x), H[V_p(t,x);Z_p(t,x)] := f_p(t,x), \\ \alpha_p(t,x) := Z_p(t,x) - T_1 f^p(\eta,\zeta) - T_2 f_p(\eta,\zeta), \\ \beta_p(t,x) := V_p(t,x) - T_1 f_p(\eta,\zeta) - T_2 f^p(\eta,\zeta), \\ R^p(t,x) := T_1 f^p(\eta,\zeta) + T_2 f_p(\eta,\zeta), \\ R_p(t,x) := T_1 f_p(\eta,\zeta) + T_2 f^p(\eta,\zeta). \end{gathered} \tag{7}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(t,x)\}$, $\{V_p(t,x)\}$ згідно формул

$$Z_{p+1}(t,x) = R^p(t,x), \quad V_{p+1}(t,x) = R_p(t,x), \tag{8}$$

де за нульове наближення $Z_0(t,x), V_0(t,x) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні з простору $C^{(1.1)}(\overline{D})$ функції, які задовольняють умови

$$\begin{gathered} D^{(0,\kappa_2)}W_0(t,x) \geq (\leq)0,\ D^{(0,\kappa_2)}\alpha_0(t,x) \geq (\leq)0, \\ D^{(0,\kappa_2)}\beta_0(t,x) \leq (\geq)0,\ \kappa_2 = 0(\kappa_2 = 1), (t,x) \in \overline{D}. \end{gathered} \tag{9}$$

Означення 2. *Довільні із простору $C^{(1.1)}(\overline{D})$ функції $Z_0(t,x), V_0(t,x)$, які в області $\overline{B}_1$ задовольняють нерівності (9), називаються функціями порівняння крайової задачі (2), (3).*

Із (7), (8) маємо:

$$W_{p+1}(t,x) = R^p(t,x) - R_p(t,x) = (T_1 - T_2)(f^p(\eta,\zeta) - f_p(\eta,\zeta)), \tag{10}$$

$$\begin{gathered} Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x) = \alpha_p(t,x), \\ V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x) = \beta_p(t,x), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{p+1}(t,x) = T_1[f^p(\eta,\zeta) - f^{p+1}(\eta,\zeta)] + T_2[f_p(\eta,\zeta) - f_{p+1}(\eta,\zeta)], \\ \beta_{p+1}(t,x) = T_1[f_p(\eta,\zeta) - f_{p+1}(\eta,\zeta)] + T_2[f^p(\eta,\zeta) - f^{p+1}(\eta,\zeta)]. \end{gathered} \tag{12}$$

Із (10)—(12), враховуючи нерівності (6), (9), при $p = 0$ маємо

$$\begin{gathered} D^{(0.\kappa_2)}W_1(t,x) \geq (\leq)0,\ D^{(0,\kappa_2)}[Z_0(t,x) - Z_1(t,x)] \geq (\leq)0, \\ D^{(0.\kappa_2)}[V_0(t,x) - V_1(t,x)] \leq (\geq)0,\ D^{(0,\kappa_2)}\alpha_1(t,x) \geq (\leq)0, \\ D^{(0,\kappa_2)}\beta_1(t,x) \leq (\geq)0,\ \kappa_2 = 0(\kappa_2 = 1), (t,x) \in \overline{D}, \end{gathered}$$

тобто мають місце нерівності

$$D^{(0.\kappa_2)}V_0(t,x) \leq (\geq)D^{(0.\kappa_2)}V_1(t,x) \leq (\geq)D^{(0.\kappa_2)}Z_1(t,x) \leq (\geq)D^{(0.\kappa_2)}Z_0(t,x),$$

а отже, якщо $D^{(0.\kappa_2)}Z_0(t,x), D^{(0.\kappa_2)}V_0(t,x) \in \overline{B}_1$, то і $D^{(0.\kappa_2)}Z_1(t,x)$,$D^{(0.\kappa_2)}V_1(t,x) \in \overline{B}_1$. Методом математичної індукції переконуємось у справедливості в області $\overline{B}_1$ наступних нерівностей

$$\begin{gathered} D^{(0.\kappa_2)}V_p(t,x) \leq (\geq)D^{(0.\kappa_2)}V_{p+1}(t,x) \leq (\geq) \\ \leq (\geq)D^{(0.\kappa_2)}Z_{p+1}(t,x) \leq (\geq)D^{(0.\kappa_2)}Z_p(t,x) \end{gathered} \tag{13}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}, \kappa_2 = 0\ (\kappa_2 = 1), (t,x) \in \overline{D}$.

Покажемо, що послідовності функцій $\left\{D^{(0.\kappa_2)}Z_p(t,x)\right\}$, $\left\{D^{(0.\kappa_2)}V_p(t,x)\right\}$ побудовані згідно алгоритму (8), (9) збігаються рівномірно при $(t,x) \in \overline{D}$ до єдиного розв'язку рівняння (5).

Дійсно, нехай

$$\begin{gathered} \max_{\overline{D}\times\overline{D}} K(x,t;\xi,\eta) \leq 0,25K, \\ \max\{\sup_{\overline{D}} |W_0(t,x)|, \sup_{\overline{D}} \left|D^{(0.1)}W_0(t,x)\right|\} \leq d. \end{gathered}$$

Тоді методом математичної індукції із (10) одержимо оцінки

$$\left|D^{(0,\kappa_2)}W_p(t,x)\right| \leq \frac{(KLqt)^p}{p!}d, \tag{14}$$

де $q = \max\left\{a, \frac{2}{3}(a-x_0)^2\right\}$, $\kappa_2 = 0, 1$, $(t,x) \in \overline{D}$.

Але тоді на підставі оцінок (14) маємо

$$\lim_{p\to\infty} D^{(0,\kappa_2)}W_p(t,x) = 0,$$

тобто

$$\lim_{p\to\infty} D^{(0,\kappa_2)}Z_p(t,x) = \lim_{p\to\infty} D^{(0,\kappa_2)}V_p(t,x) := D^{(0,\kappa_2)}U(t,x).$$

Щоб показати, що гранична функція $U(t,x)$ є розв'язком інтегро-диференціального рівняння (5), достатньо у (8) перейти до границі, коли $p \to \infty$.

Має місце наступна

Теорема 1. *Нехай права частина ДРЧП (2) $f[U(t,x)] \in C_3(\overline{B})$ та існують функції порівняння задачі (2)-(4).*

Тоді послідовності функцій $\{Z_p(t,x)\}$, $\{V_p(t,x)\}$, побудовані згідно (8), (9):

1) *збігаються рівномірно до єдиного регулярного розв'язку $U(t,x) \in C^*(\overline{D})$ крайової задачі (2)—(4),*
2) *мають місце оцінки (14),*
3) *при $(t,x) \in \overline{D}$ справедливі нерівності*

$$\begin{aligned} D^{(0.\kappa_2)}V_p(t,x) \leq (\geq) D^{(0.\kappa_2)}V_{p+1}(t,x) \leq (\geq) D^{(0.\kappa_2)}U(t,x) \leq (\geq) \\ \leq (\geq) D^{(0.\kappa_2)}Z_{p+1}(t,x) \leq (\geq) D^{(0.\kappa_2)}Z_p(t,x), \end{aligned} \tag{15}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}, \kappa_2 = 0$ $(\kappa_2 = 1)$.

Доведення. Для повного доведення теореми залишилося довести справедливість нерівностей (15). Припустимо супротивне, нехай у деякій точці $(t_1, x_1) \in D$ для деякого $p \in \mathbb{N}$ наприклад $U(t_1,x_1) > Z_p(t_1,x_1)$. Тоді згідно (13) для всякого $n \in \mathbb{N}$ $Z_{p+n}(t_1,x_1) \leq Z_p(t_1,x_1) < U(t_1,x_1)$. Але тоді послідовність $Z_{p+n}(t_1,x_1)$ при $n \to \infty$ не збігається у даній точці до розв'язку рівняння (5), що суперечить доведеному вище. Аналогічно доводиться всі інші нерівності в (15).

Єдиність розв'язку рівняння (5) доводиться методом від супротивного.

Зауваження 1. *Функції $Z_p(t,x)$, та $V_p(t,x)$, задовольняють перші дві крайові умови в (3), а*

$$\int_{x_0}^{a} D^{(1.0)}Z_p(t,\xi)d\xi = -\int_{x_0}^{a} D^{(1.0)}V_p(t,\xi)d\xi,$$

а тому за p-ве наближення береться функція $U_p(t,x) = \frac{1}{2}[Z_p(t,x) + V_p(t,x)]$.

4. Висновки. Побудовано модифікацію двостороннього методу дослідження задачі з нелокальною умовою А.М. Нахушева для дифренціального рівняння поширення вологи. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі (2)-(4). Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу.

Список використаної літератури

1. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. *Дифференц. уравнения.* 1979. Вип. 15, №1. С. 96–105.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М:Наука, 1976. 352 с.
3. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса. *Дифференц. уравнения.* 1982. Вип. 19, №1. С. 280–285.
4. Шхануков Б.А. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений. *Дифференц. уравнения.* 1983. Вип. 18, №2. С. 145–152.
5. Маринец В.В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнении в частных производных с нелокальными краевыми условиями. *Дифференц. уравнения.* 1988. Вип. 24, №8. С. 1393–1397.
6. Маринець В.В., Маринець К.В., Питьовка О.Ю. Аналітичні методи дослідження крайових задач. Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла 2019. 288 с.

Kohutych O. I. Investigation of the problem with the non-local condition A.M. Nakhushev for the differential equation of moisture distribution.

The paper summarizes the results of previously known scientific publications on the study and approximate integration of nonlinear PDE for moisture distribution in a porous environment.

In the article researching the boundary value problem with non-local condition A.M. Nakhusheva for the differential equation of moisture distribution.

One modification of the two-side method is constructed for the approximate solution equivalent to the boundary value problem of the integral-differential equation. The comparison functions for the boundary value problem are determined. The conditions of existence and uniqueness of the solution to the investigated problem are established.

The uniform convergence of the constructed sequences to a single solution of the considered problem and fulfillment of differential inequalities is proved.

Keywords: condition's A.M. Nakhusheva, differential equations in parts of derivatives, integrodifferential equations, comparison functions, modification of the two-way method.

References

1. Nahushev, A.M. (1979). Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture]. *Differenc. uravneniya., 15, 1*, 96–105. [in Russian]
2. Chudnovskij, A.F. (1976). Teplofizika pochv [Thermal physics of soils]. *M: Nauka* [in Russian]
3. Vodahova, V.A. (1982). Kraevaya zadacha s nelokal'nym usloviem A.M. Nahusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa [A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer]. *Differenc. uravneniya., 19, 1*, 280–285. [in Russian]
4. Shkhanukov, B.A. (1983). O nekotoryh kraevyh zadachah dlya uravneniya tret'ego poryadka i ekstremal'nyh svojstvah ego reshenij [On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions]. *Differenc. uravneniya., 18, 2*, 145–152. [in Russian]
5. Marynets, V.V. (1988). O nekotoryh zadachah dlya sistem nelinejnyh differencial'nyh uravnenii v chastnyh proizvodnyh s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions]. *Differenc. uravneniya., 24, 8*, 1393–1397. [in Russian]
6. Marynets, V.V., Marynets, K.V., & Pytovka, O.Yu. (2019). Analitichni metodi doslidzhennya krajovih zadach [Analytical methods of research of boundary value problems]. *Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla".* [in Ukrainian]

Одержано 15.04.2021