УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

СТРУКТУРА СИГНАТУРНОГО КУБУ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих в [1], у яких теорія булевих функцій розглядається з точки зору універсальних алгебр. У цій роботі описано клас функціонально неповних алгебр, проведено дослідження основних типів алгебр і розташування їх по ярусах сигнатурного кубу. У даних дослідженнях універсальні булеві алгебри утворюють 11-мірний сигнатурний куб, до складу якого входять 2048 алгебр. Запропоновано нумерацію (кодифікацію) цих алгебр. Вводиться поняття суміжних, граничних, внутрішніх класів функціонально повних і функціонально неповних алгебр.

Булеві алгебри досліджуваного класу M поділяють на чотири підкласи: клас внутрішніх функціонально неповних алгебр, клас граничних функціонально неповних алгебр, клас граничних функціонально повних алгебр, клас внутрішніх функціонально повних алгебр. У даній роботі пропонується алгоритм знаходження граничних функціонально повних алгебр на основі розширення сигнатури функціонально неповних алгебр булевими операціями. Побудовані підкласи граничних алгебр для кожної з одинадцяти операцій. Вказано ізоморфізм графів деяких класів граничних алгебр. На основі об'єднання графів отримали Ω-граф граничних функціонально повних алгебр.

Ключові слова: сигнатурний куб, граничні алгебри.

1. Вступ. У роботі продовжується дослідження структури булевих алгебр, описаних в [1]. Клас булевих алгебр M включає в себе всі алгебри, у сигнатури яких входять операції з множини $Q = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \uparrow, |\}$. Оскільки $|M| = 2^{11}$, то виникає проблема нумерації (кодифікації) булевих алгебр. Для того, щоб задати булеву алгебру $U = \langle A, \Omega \rangle$ досить вказати всі операції, які входять в сигнатуру Ω. Кожній сигнатурі алгебри U можна поставити у відповідність булевий вектор – код сигнатури, який у свою чергу може бути заданий натуральним числом, яке будемо називати кодом алгебри. Оскільки алгебри можуть мати різну нумерацію, то в роботах, крім сигнатурного коду алгебри наводять булевий код сигнатури або номер алгебри. Наприклад, сигнатурному коду $\Omega = \{\neg, \vee, \Leftrightarrow\}$ у класі алгебр, що використовує перші дев'ять операцій з Q (фіксованим порядком операцій) буде поставлено у відповідність булевий код $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$. Якщо ця алгебра закодована числом $148 = 2^2 + 2^4 + 2^7$, то при кодуванні використано прямий код, якщо числом $41 = 2^0 + 2^3 + 2^5-$ то зворотній. У даній роботі використовується зворотній код.

Означення 1. *Алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$, $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ називаються суміжними, якщо існує ребро, яке з'єднує ці алгебри.*

Суміжні алгебри U_1 і U_2 в Ω-кубі відрізняються тільки однією операцією, тобто $|\Omega_1 \cup \Omega_2 - \Omega_1 \cap \Omega_2| = 1$. Суміжні алгебри знаходяться у сусідніх ярусах Ω-кубу.

Означення 2. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається граничною, якщо вона містить суміжні функціонально повні та функціонально неповні алгебри.*

Означення 3. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається внутрішньою, якщо всі її суміжні алгебри є функціонально повними або функціонально неповними.*

Означення 4. *Функціонально неповна алгебра називається передповною, якщо довільне розширення її сигнатури перетворює цю алгебру у функціонально повну.*

Булеві алгебри класу M поділяються на чотири підкласи: M_1-клас внутрішніх функціонально неповних алгебр; M_2-клас граничних функціонально неповних алгебр; M_3- клас граничних функціонально повних алгебр; M_4- клас внутрішніх функціонально повних алгебр [1].

На рис. 1 наведено граф функціонально неповних алгебр.

Твердження 1. *Всі функціонально неповні алгебри в класі M є граничними і утворюють Ω-граф.*

Твердження доведено в [1].

Твердження 2. *Функціонально повна алгебра буде граничною тоді і тільки тоді, коли існує операція, яка входить до складу всіх базисів цієї алгебри.*

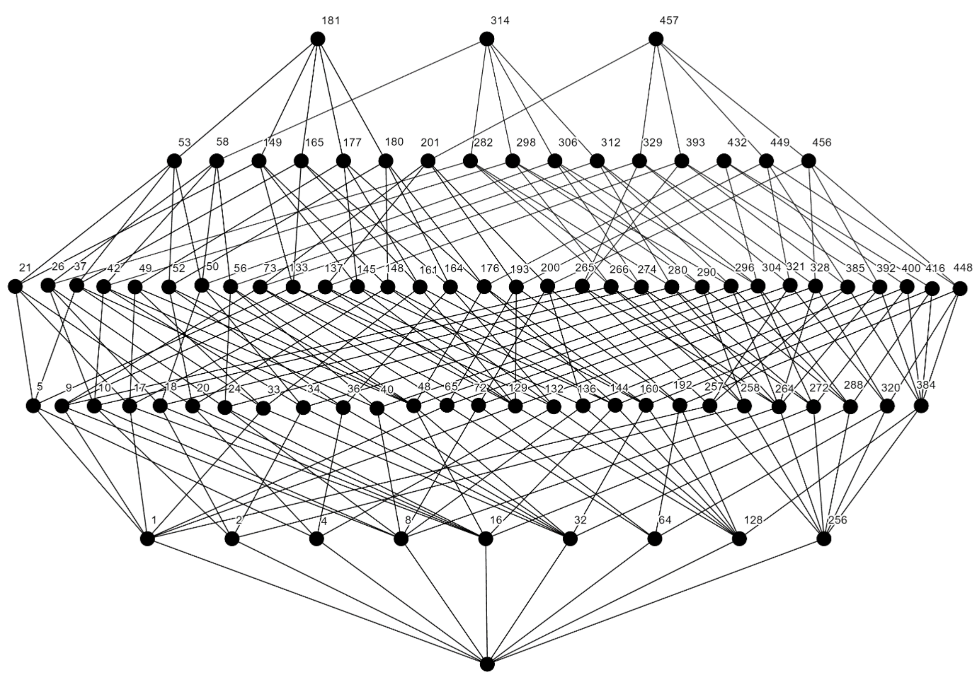

Рис. 1. Граф функціонально неповних алгебр

2. Основні результати. Розіб'ємо множину граничних функціонально повних алгебр M_3 на підкласи $M_3 = M_3^1 \cup M_3^2 \cup ... \cup M_3^9 \cup M_3^{10} \cup M_3^{11}$, де M_3^i, $i = \overline{1, 11}$ – множина всіх граничних функціонально повних алгебр, які мають суміжні ребра, що з'єднують їх з алгебрами класу M_2. Кожне суміжне ребро відповідає i-й операції вказаній в множині Q. Це означає, що в сигнатуру алгебр класу M_3^i входить i-ва операція, а в сигнатури відповідних суміжних алгебр ця операція не входить. Позначимо через M_2^{+i} – клас функціонально неповних алгебр, в сигнатуру яких входить i-ва операція, M_2^{-i} – клас алгебр, які отримують з M_2^i усуненням з сигнатури i-ої операції, тоді отримаємо

$$M_2^i = M_2 - \left(M_2^{+i} \cup M_2^{-i}\right). \qquad (1)$$

Клас алгебр M_3^i можна отримати з M_2^i розширенням сигнатури i-вою операцією. Якщо сигнатуру всіх алгебр M_2 розширити i-вою операцією, то алгебри M_2^{+i} і M_2^{-i} залишаються функціонально неповними, а решта алгебр перейдуть за допомогою ребра, що відповідає i-й операції, у клас функціонально повних. З того, що $|M_2| = 88$ і $\left|M_2^{+i}\right| = \left|M_2^{-i}\right|$, то з формули (1) отримуємо $|M_2^i| = 88 - 2\left|M_2^{+i}\right|$. На основі останньої формули отримуємо таблицю 1, у якій вказано кількість алгебр, у сигнатуру яких входить i-ва операція.

Таблиця 1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_2^{+i}	33	33	16	32	32	30	16	16	30	0	0
M_2^i	22	22	56	24	24	28	56	56	28	88	88

Означення 5. *Два графи G і H називаються ізоморфними, якщо між їх вершинами можна установити таку біекцію f, що дві вершини u, v графа G суміжні тоді і тільки тоді, коли $f(u)$ і $f(v)$ суміжні вершини у графі H.*

Задача розпізнавання ізоморфізмів графів відноситься до класу NP - повних. У роботі [4] стверджувалось, що «пошуки окремих критеріїв та ознак ізоморфізмів для графів того чи іншого класу можуть бути дуже важкими і не завжди успішними». Сучасні роботи по теорії графів [5] підтверджують, що проблему ізоморфізму графів не вдалося вирішити.

Позначимо через $G_i -$ Ω-граф, який відповідає класу граничних функціонально повних алгебр M_2^i. Для кожного класу M_2^i побудовано сигнатурні графи $G_1 - G_9$, наведені на рис. 2 – 6.

Твердження 3. *Ізоморфними є Ω-графи: $G_1 \cong G_2$, $G_4 \cong G_5$, $G_6 \cong G_9$, $G_7 \cong G_8$, $G_{10} \cong G_{11}$.*

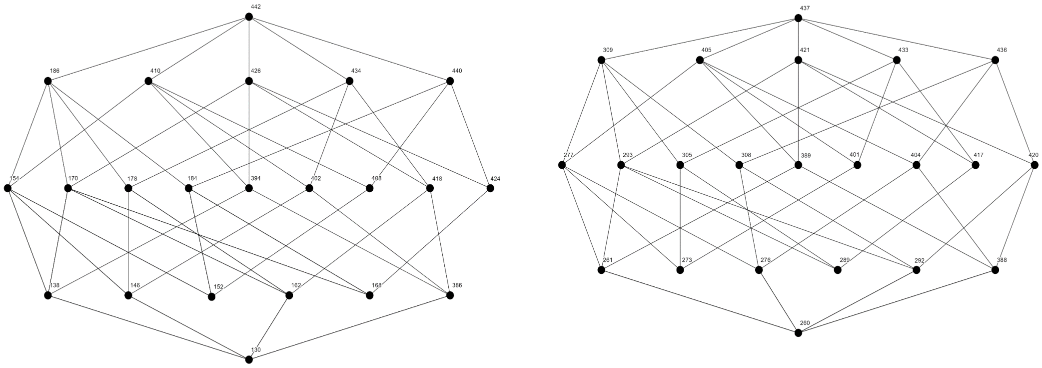

Рис. 2. Графи G_1 та G_2 класу граничних алгебр M_2^1 і M_2^2

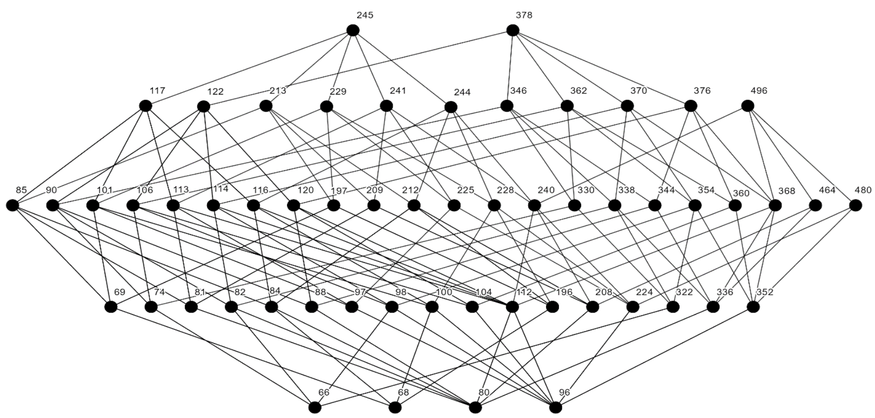

Рис. 3. Граф G_3 класу граничних алгебр M_2^3

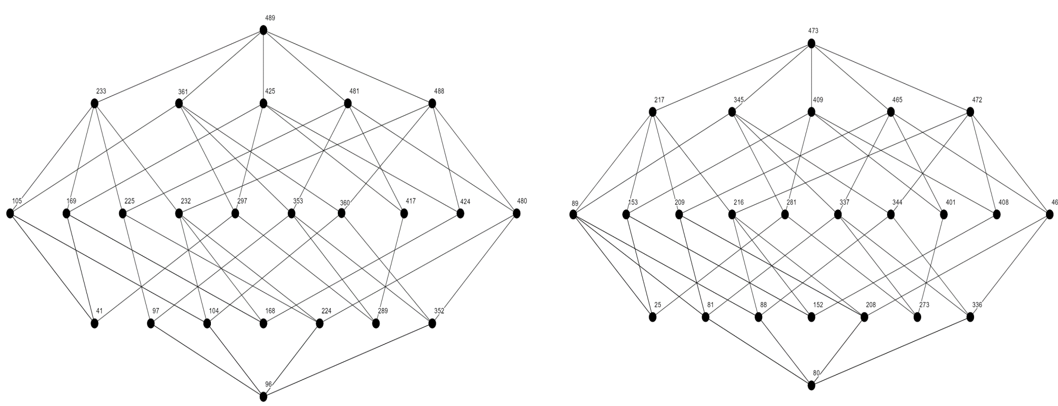

Рис. 4. Графи G_4 і G_5 класу граничних алгебр M_2^4 і M_2^5

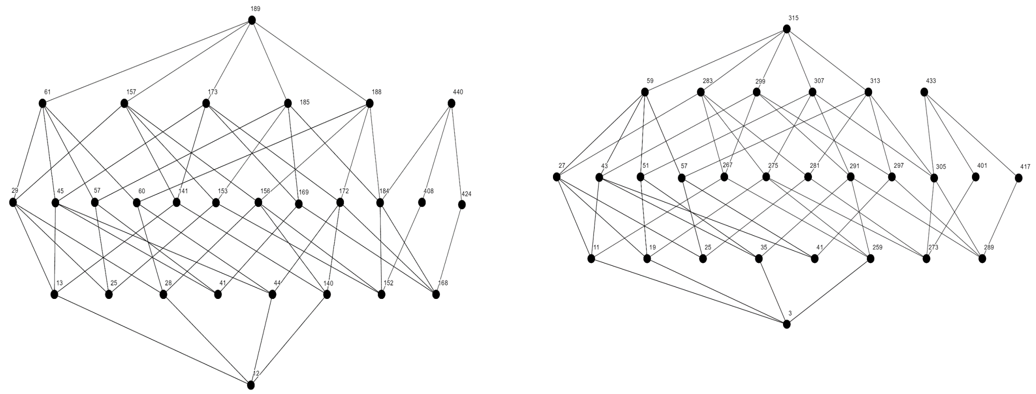

Рис. 5. Графи G_6 і G_9 класу граничних алгебр M_2^6 і M_2^9

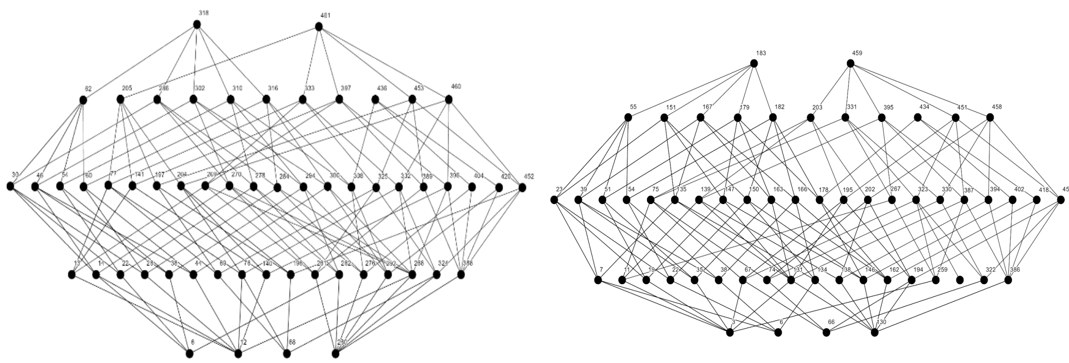

Рис. 6. Графи G_7 і G_8 класу граничних алгебр M_2^7 і M_2^8.

Графи $G_1 - G_9$ об'єднані в один сигнатурний граф, який зображений на рис. 7.

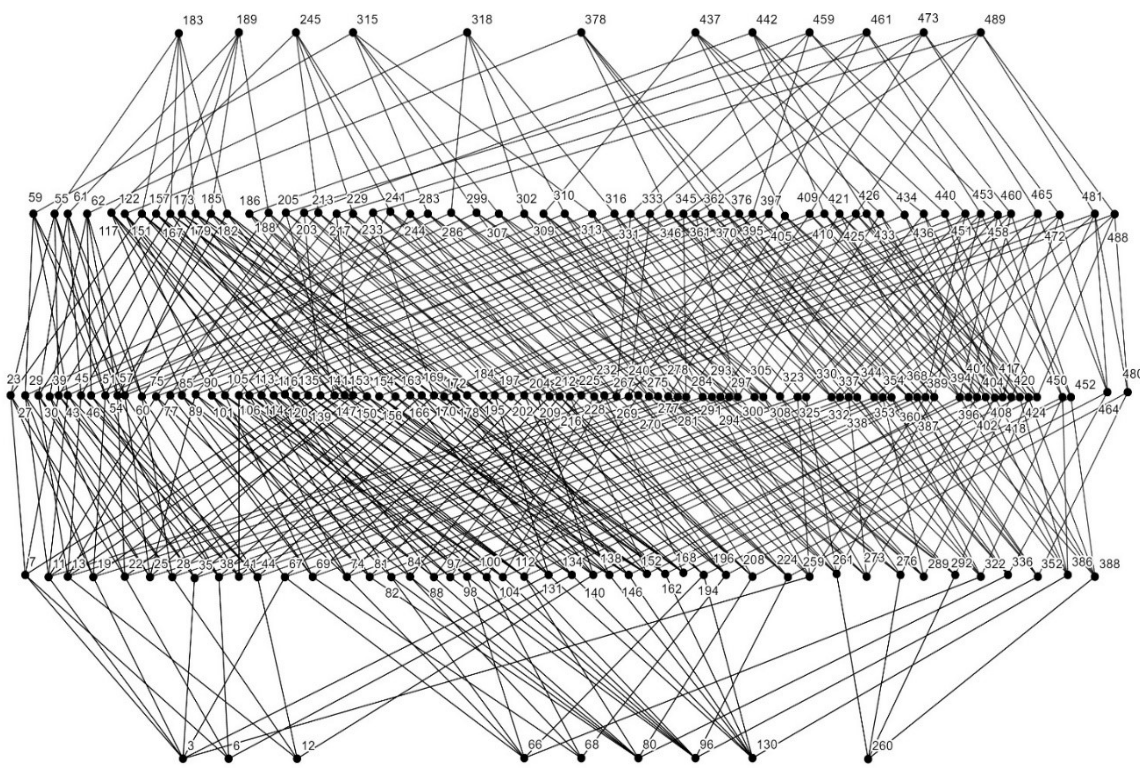

Рис. 7. Ω-граф граничних функціональних алгебр M_2^i.

Ізоморфізм сигнатурних графів G_i, $i = \overline{1,9}$ доводиться за допомогою бієкції вершин, заданих таблицями 2 - 5:

Таблиця 2.

$m=1$	260	273	289	261	276	292	388	277	293	305	308	389	401
$m=2$	130	152	168	138	146	162	386	154	170	178	184	394	402
$m=1$	404	417	420	309	405	421	433	436	437				
$m=2$	408	418	424	186	410	426	434	440	442				

Таблиця 3.

$m=4$	96	41	97	104	168	224	289	352	105	169	225	232	297	353	360
$m=5$	80	25	88	81	152	208	273	336	89	153	209	216	281	337	344
$m=4$	417	424	480	233	361	425	481	488	489						
$m=5$	401	408	464	217	345	409	465	472	473						

Таблиця 4.

$m=6$	12	25	41	152	168	13	28	44	140	29	45	57	60	141	153
$m=9$	3	25	41	273	289	11	19	35	259	27	43	57	54	267	275
$m=6$	156	169	172	184	408	424	61	157	173	185	188	440	189		
$m=9$	281	291	297	305	401	424	59	283	299	307	313	443	315		

Таблиця 5.

$m=7$	6	13	38	140	268	388	60	204	284	325	404	205	316	453
$m=8$	6	11	35	138	131	386	54	202	150	323	402	203	182	451
$m=7$	12	14	44	196	276	30	77	269	294	332	420	286	333	460
$m=8$	3	7	38	332	146	29	75	267	163	330	418	151	331	458
$m=7$	68	22	69	261	292	46	141	270	300	389	452	302	397	318
$m=8$	66	19	67	279	169	39	139	163	166	387	450	167	395	183
$m=7$	260	28	76	262	324	54	197	278	308	396	62	310	436	461
$m=8$	30	22	74	134	194	51	195	166	178	394	55	179	434	459

Означення 6. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називаєтьcя насиченою в класі K, якщо в результаті довільного розширення сигнатури отримуємо алгебру, яка не належить K.*

На основі Ω-графів G_i, $i = \overline{1,9}$ побудована таблиця 6, що вказує кількість канонічних, насичених і вільних алгебр в класах M_2^i.

Таблиця 6.

M_2^i	M_2^1	M_2^2	M_2^3	M_2^4	M_2^5	M_2^6	M_2^7	M_2^8	M_2^9
Код канонічних алгебр	130, 152, 168	260, 273, 289	66,68, 80,96	96,41, 168, 189	25,80, 152, 273	12,35, 41,152, 168	3,4,25, 273, 289	6,12, 68, 260	36, 66 130
К-сть канонічних	3	3	4	4	4	5	5	4	4
Код насичених алгебр	442	437	245, 378, 496	489	473	189, 440	315, 433	318, 461, 436	183, 459, 434
К-сть насичених	1	1	3	1	1	2	2	3	3
К-сть вільних алгебр	18	18	49	19	19	21	49	49	21
К-сть алгебр в M_2^i	22	22	56	24	24	28	56	56	28

З рисунка 7 отримуємо, що Ω-граф G класу граничних алгебр M_2 включає двісті дев'ятнадцять вершин; п'ятнадцять вершин, які відповідають канонічним алгебрам з номерами 3, 6, 12, 66, 68, 80, 96, 130, 260, 25, 41, 152, 168, 273, 289; дванадцять вершин, які відповідають граничним алгебрам з номерами 183, 189,245, 315, 318, 378, 437, 442, 459.

Розглянемо класи алгебр M_2^{1-10}, $M_2^{1-10,11}$, M_2^{1-11}, які отримали з M_2^{1-9} розширенням їх сигнатур відповідно операціями Шеффера (10) та Вебба (11). Зрозуміло, що $M_3^{1-9,10}$, $M_3^{1-9,11}$– класи граничних алгебр, а M_3^{10-11}– клас внутрішніх функціонально повних алгебр. Якщо G_2, G_2^{10}, G_2^{11}, G_2^{10-11} – Ω-графи відповідних класів M_2, M_2^{1-10}, $M_2^{1-10,11}$, G_2^{1-11}, то легко бачити, що ці графи ізоморфні, а їх об'єднання утворює Ω-граф, який схематично можна зобразити у вигляді

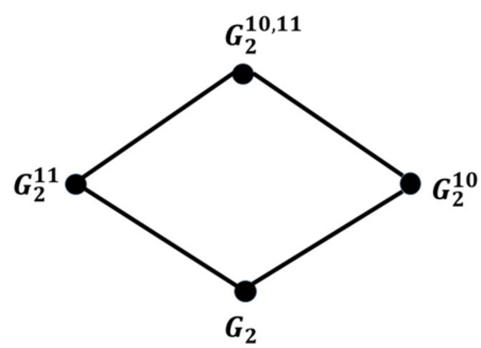

Рис. 8. Ω-граф класів алгебр M_2, M_2^{1-10}, $M_2^{1-10,11}$, G_2^{1-11}.

Із побуваного Ω-графа, наведеного на рисунку 7, отримаємо справедливість теорем.

Теорема 1. *У класі М відсутні внутрішні функціонально неповні алгебри.*

Теорема 2. *Множина булевих алгебр М складається з 88 граничних функціонально неповних алгебр; 395 граничних функціонально повних алгебр; 1565 внутрішніх функціонально повних алгебр.*

3. Висновки. У даній роботі проведені дослідження структури граничних функціонально повних алгебр класу M_3. Для кожного підкласу граничних алгебр побудовані сигнатурні графи G_i, $i = \overline{1,9}$, і на їх основі встановлено потужності канонічних, насичених та вільних алгебр. Доведено ізоморфізм графів G_i, $i = \overline{1,9}$, які об'єднані в Ω-граф граничних функціональнио повних алгебр. Сформульовані і доведені теореми про число граничних функціонально неповних алгебр, граничних функціонально повних алгебр та внутрішніх функціонально повних алгебр.

Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Дослідження сигнатурного кубу універсальних булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2 (37), С. 157-167. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167.
2. Журавлев Ю. И. Оценка сложности локальных алгоритмов для некоторых экстремальных задач на конечных множествах. *Докл. АН СССР*. 1964. №5. С. 1018-1021.
3. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях систем минимальных схем: сборник «Проблемы кибернетики». Москва: Физмалит, 1959. С. 75-121.
4. Зыков А. А. Теория конечных графов. Москва: Наука, 1969. 554 с.
5. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов. Спб: ООО «Диалектика», 2019. 240 с.

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V. Structure of signature cube of boolean algebra.

This paper is a continuation of the research distributed in [1], the theory of Boolean functions is considered from the point of view of universal algebras. This paper describes a class of functionally incomplete algebras, studies the main types of algebras and their location on the tiers of the signature cube. In the data of researches of universal Boolean algebras the 11-dimensional signal cube according to which 2048 algebras enter is created. Codification of these algebras has been offered. The notion of adjacent, boundary, and internal classes of functionally superficial and functionally incomplete algebras is introduced.

Boolean algebras of the class M are divided into four subclasses: a class of internal functionally incomplete algebras, a class of boundary functionally incomplete algebras, a class of boundary functionally superficial algebras, a class of internal functionally complete algebras. In this paper, an algorithm is proposed for finding boundary functionally complete algebras based on the expansion of signals of functionally incomplete algebras by Boolean operations. Subclasses of boundary algebras have been constructed for each of the eleven operations. The isomorphism of graphs of some classes of boundary algebras has been indicated. Ω-graph of boundary functionally complete algebras was obtained on the basis of combining graphs.

Keywords: signature cube, boundary algebras.

References

1. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2020). Investigation of signature cube ofuniversal boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2(37)*, 157-167. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167 [in Ukrainian].
2. Zhuravlev, Yu. I. (1964). Otsenka slozhnosti lokal'nykh algoritmov dlya nekotorykh ekstremal'nykh zadach na konechnykh mnozhestvakh. *AN USSR, 5*, 1018-1021 [in Russian].
3. Yablonskiy, S. V. (1959). Ob algoritmicheskikh trudnostyakh sistem minimal'nykh skhem. Sbornik «Problemy kibernetiki». Moskva: Fizmalit, 75-121 [in Russian].
4. Zykov, A. A. (1969). Teoriya konechnykh grafov. Moskva: Nauka [in Russian].
5. Uilson, R. J. (2019). Vvedenie v teoriyu grafov. Spb: OOO «Dialektika» [in Russian].

Одержано 17.04.2021