УДК 512.643.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).22-32

Т. В. Боярищева[1], М. М. Капустей[2], Г. І. Сливка-Тилищак[3], П. В. Слюсарчук[4]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2899-4900

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
здобувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
m.kapustey@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4438-3395

[3] Пряшівський університет в Пряшеві, ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент, завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7129-0530

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
petro.slyusarchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9235-1497

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

Граничні теореми теорії ймовірностей мають широке застосування у різних галузях науки і виробництва. Адже вони вивчають властивості різних випадкових величин, що формуються під впливом значної кількості випадкових чинників, кожен з яких, в свою чергу, має незначний вплив на кінцевий результат, але сумарний вплив цих чинників є суттєвим. Задачі, які розв'язуються в межах цієї галузі, можна умовно розділити на два типи. Перші досліджують сам факт збіжності суми випадкових доданків, а другі вивчають швидкість цієї збіжності. Дана робота присвячена якраз другому питанню. Оцінками швидкості збіжності у граничних теоремах займалося чимало дослідників. Щоправда, до середини минулого століття ці оцінки формулювалися в термінах абсолютних моментів, що мало принаймні два недоліки. Насамперед, існування абсолютних моментів є досить жорсткою умовою, що суттєво звужує коло випадкових величин, до яких можна застосувати дані оцінки. І по-друге, оцінки, що виражаються через абсолютні моменти, не враховують близькості розподілів доданків до граничного. Незважаючи на це, існує велика кількість оцінок, починаючи з нерівності Беррі – Ессеена і закінчуючи дослідженнями сучасних вчених, що використовують саме абсолютні моменти. Способом, що дозволив уникнути обох недоліків оцінок, стало використання псевдомоментів. Псевдомомент – це числова характеристика, яка за своєю структурою виражається через різницю функцій розподілу досліджуваної та граничної випадкових величин. Тому у випадку рівності цих розподілів псевдомомент рівний нулю, що дозволяє здійснити більш точну оцінку. Структура цих характеристик може бути дуже різноманітною, що дозволяє використати псевдомомент такого вигляду, який зручний саме для даної конкретної задачі. У статті використано характеристики, аналогічні до тих, що введені В. М. Золотарьовим. З їх допомогою вивчається швидкість збіжності розподілів сум незалежних випадкових величин до нормального закону в схемі серій. Обмеження, які при цьому накладаються на випадкові доданки, є не надто суворими – вимагається рівність нулю математичного сподівання і скінченність дисперсій кожного доданка. Натомість одержано оцінки швидкості збіжності, що виражаються через псевдомоменти різного виду. Також у роботі отримано оцінки для характеристичних функцій, які теж виражаються через вказані характеристики. Вони необхідні для доведення основних результатів, але мають і самостійне значення.

Ключові слова: центральна гранична теорема, оцінка швидкості збіжності, послідовність серій випадкових величин.

1. Вступ. Серед граничних теорем для розподілів сум випадкових величин особливе місце займають теореми, у яких іде мова про точність наближення розподілів сум граничним розподілом. У центральній граничній теоремі такими результатами є відомі нерівності Ессеена і Беррі-Ессеена. Ці оцінки не враховують фактора близькості розподілів доданків у сумах до відповідних компонент граничного розподілу. Наприклад, якщо доданки мають нормальний розподіл, то ліва частина нерівності Беррі-Ессеена рівна нулю, а права відмінна від нуля, бо виражається через абсолютні моменти. Цей недолік усувається використанням характеристик, які називають псевдомоментами. Вони враховують близькість розподілів доданків у сумах до відповідних компонент граничного розподілу. В оцінках швидкості збіжності у граничних теоремах використовуються псевдомоменти різного вигляду. У даний час існує велика кількість робіт у яких використовуються такі характеристики. У роботі [1] наведені деякі із таких результатів і детальний список літератури. Ми відзначимо важливу, у цьому напрямку, роботу Золотарьова [2], у якій одержано узагальнення нерівності Беррі-Ессеена із використанням різного вигляду псевдомоментів. У роботах [3] і [4] результати роботи [2] узагальнені для нормованих сум незалежних різнорозподілених випадкових величин, а у роботах [4] і [6] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [2] для послідовності серій незалежних в кожній серії не однаково розподілених випадкових величин. Метою даної роботи є вивчення аналогічної до [4] і [6] задач, але використовуються псевдомоменти іншої структури. У роботі наводяться оцінки швидкості збіжності до нормального закону розподілів сум випадкових величин в термінах псевдомоментів для послідовності серій незалежних в кожній серії випадкових величин. Побудовані нерівності для характеристичних функцій.

2. Основний результат. Розглянемо послідовність серій $\xi_{n1},\ldots,\xi_{nn}$ незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями $E\xi_{ni}=0$, дисперсіями $E\xi_{ni}^2=\sigma_{ni}^2$, $\sigma_{ni}>0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{ni}^2=1$. Позначимо: $F_{ni}(x)$ – функція розподілу ξ_{ni}, $S_n=\xi_{n1}+\cdots+\xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ – функція розподілу S_n, $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n=\sup\limits_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|$.

Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{ni}^{(0)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\max\left(1,|x|^3\right)|d\left(F_{ni}(x\sigma_{ni})-\Phi(x)\right)|,\quad \nu_n^{(0)}=max\left\{\nu_{n1}^{(0)},\ldots,\nu_{nn}^{(0)}\right\},$$

$$\kappa_{ni}^{(0)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\max\left(1,3x^2\right)|F_{ni}(x\sigma_{ni})-\Phi(x)|\,dx,\quad \kappa_n^{(0)}=max\left\{\kappa_{n1}^{(0)},\ldots,\kappa_{nn}^{(0)}\right\},$$

$$\kappa_{ni} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left| F_{ni}(x\sigma_{ni}) - \Phi(x) \right| dx, \quad \kappa_n = max \left\{ \kappa_{n1}, \ldots, \kappa_{nn} \right\}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\bar{\sigma}_n = \max\{\sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nn}\}$ *і* $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ *для* $n \geq 2$. *Існують такі сталі* C_1, C_2, C_3, *що для всіх* $n \geq 1$ *справедливі нерівності*

$$\rho_n \leq C_1 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \nu_n^{(0)}, \tag{1}$$

$$\rho_n \leq C_2 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \max\left\{ \kappa_n^{(0)}; \left(\kappa_n^{(0)}\right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2 (n+1)}} \right\}, \tag{2}$$

$$\rho_n \leq C_3 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \max\left\{ \kappa_n; (\kappa_n)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2 (3n+1)}} \right\}. \tag{3}$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням $E\xi_i = 0$, дисперсією $E\xi_i^2 = \sigma_i^2$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Позначимо через $F_k(x)$ функцію розподілу випадкової величини ξ_k і покладемо $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$. Тоді $S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{B_n}$, $F_{nk}(x) = F_k(xB_n)$.

$$\nu_i^{(0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right) \left| d\left(F_i(x\sigma_i) - \Phi(x)\right) \right|, \quad \nu^{(0)} = max\left\{ \nu_1^{(0)}, \ldots, \nu_n^{(0)} \right\},$$

$$\kappa_i^{(0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, 3x^2\right) \left| F_i(x\sigma_i) - \Phi(x) \right| dx, \quad \kappa^{(0)} = max\left\{ \kappa_1^{(0)}, \ldots, \kappa_n^{(0)} \right\},$$

$$\kappa_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left| F_i(x\sigma_i) - \Phi(x) \right| dx, \quad \kappa = max\left\{ \kappa_1, \ldots, \kappa_n \right\}.$$

Тоді будуть справедливі нерівності 1 – 3, де $\bar{\sigma} = \frac{1}{B_n} \max\limits_{1<k<n} \sigma_k$.

Із цих оцінок випливають оцінки Золотарьова [1].

3. Допоміжні леми. Будемо використовувати наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $f_{nk}(t)$ *– характеристична функція* ξ_{nk}, $\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right|$. *Для всіх* $t \in R$ *мають місце нерівності*

$$\omega_{nk}(t) \leq \nu_{nk}^{(0)} min\left(1, \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6}\right), \tag{4}$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk}^{(0)} min\left(|t|\sigma_{nk}, \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}\right), \tag{5}$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk} \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}. \tag{6}$$

Доведення. Враховуючи, що $E\xi_{nk} = 0$, $E\xi_{nk}^2 = \sigma_{nk}^2$

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{nk}(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sigma_{nk}} d\Phi(x) \right| =$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| =$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| =$$

$$|t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right) dx\right| =$$

$$|t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right)\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right) dx\right|. \tag{7}$$

Із нерівностей (7)

$$\omega_{nk}(t) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \le$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3}\right)\left|d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right)\left|d\left(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi\left(x\right)\right)\right| = \nu_{nk}^{(0)}. \tag{8}$$

Використовуючи нерівність ([1], с.372)

$$\left|e^{iz} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(iz)^j}{j!}\right| \le \frac{2^{1-\gamma}|z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma} \quad 0 \le \gamma \le 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

із (7)

$$\omega_{nk}(t) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \le$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right|\left|d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \le$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|tx|^3}{6}\left|d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| = \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3}\left|d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| \le$$

$$\frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3}\right)\left|d\left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right)\right| = \nu_{nk}^{(0)}\frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}. \tag{10}$$

Із (8) і (10) одержуємо нерівність (4).

Із нерівностей (7)

$$\omega_{nk}(t) = |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right) dx \right| \leq$$

$$|t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx\right| \left|F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx \leq$$

$$|t| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tx)^2}{2} \left|F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx = \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3\frac{x^2}{\sigma_{nk}^3} \left|F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx =$$

$$\frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left|F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi\left(x\right)\right| dx = \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}\kappa_{nk}.$$

Нерівність (6) доведена. Із попередньої нерівності

$$\omega_{nk}(t) \leq \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left|F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi\left(x\right)\right| dx \leq$$

$$\frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) \left|F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi\left(x\right)\right| dx = \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}\kappa_{nk}^{(0)}$$

і

$$\omega_{nk}(t) = |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right) dx \right| \leq$$

$$|t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_{nk}(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right| dx = |t|\sigma_{nk} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi\left(x\right)\right| dx \leq |t|\sigma_{nk}\kappa_{nk}^{(0)}$$

одержимо нерівність (5).

Лема 2. *Нехай* $c \in (0, e^{-n\bar{\sigma}_n^2}]$ *– довільна стала і для деякого* $s \in [0,3]$ *існує величина* $\theta_{nk}(s)$ *така, що для всіх* $t \in R$ *і* $k = 1, \ldots, n$ *мають місце нервності*

$$\omega_{nk}(t) = \left|f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}\right| \leq \theta_{nk}(s) min\left(|t|^s\sigma_{nk}^s; \frac{|t^3|\sigma_{nk}^3}{6}\right), \tag{11}$$

$$\theta_n(s) = max\left\{\theta_{n1}(s), \ldots, \theta_{nn}(s)\right\}.$$

Якщо $\theta_n(s) \leq c$ *і* $|t| \leq T_n^{(1)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n}\sqrt{-2\ln\theta_n(s)}$, *то*

$$|f_{nk}(t)| \leq e^{-c_1 t^2\sigma_{nk}^2}, \tag{12}$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\sqrt{-2c \cdot \ln c}$, $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{2}$, *а при* $\theta_n(s) \le c$ *і* $|t| > T_n^{(1)}$

$$|f_{nk}(t)| \le \left(1 + 2^{-\frac{s}{2}}\right) t^s \sigma_{nk}^s \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} . \tag{13}$$

Якщо $\theta_n(s) > c$, $|t| \le T_n^{(2)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \cdot \frac{c}{\theta_n(s)}$, *тоді*

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-c_2 t^2 \sigma_{nk}^2}, \tag{14}$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{c\sqrt{e}}{6} > 0$.

Доведення.

$$|f_{nk}(t)| = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} + e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \right| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t). \tag{15}$$

Нехай $\theta_n(s) \le c$ і $|t| \le T_n^{(1)}$. Із умови (11) леми і (15)

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \cdot \frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6} \cdot \theta_{nk}(s)\right) \le$$

$$e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{\left(T_n^{(1)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{4}} \cdot T_n^{(1)} \cdot \frac{t^2\sigma_{nk}^3}{6} \cdot \theta_{nk}(s)\right) \le$$

$$e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left(1 + \sqrt{-2\theta_n(s)\ln\theta_n(s)} \cdot \frac{t^2\sigma_{nk}^2}{6}\right).$$

Оскільки функція $x \ln x$ є спадною при $x \in (0;\ e^{-1}]$ і $c < e^{-1}$ то

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left(1 + \sqrt{-2c\ln c} \cdot \frac{t^2\sigma_{nk}^2}{6}\right) \le e^{-c_1 t^2 \sigma_{nk}^2}.$$

Нехай $\theta_n(s) \le c$ і $|t| > T_n^{(1)}$. Із (15) і (11) отримаємо

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t) \le$$

$$e^{-\frac{(T_n^{(1)})^2\sigma_{nk}^2}{2}} + |t|^s\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s) = (\theta_n(s))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} + |t|^s\sigma_{nk}^s\theta_{nk}(s).$$

Оскільки, $\theta_n(s) \le c \le e^{-1}$ і $|t| > T_n^{(1)}$, тоді

$$|t|\overline{\sigma}_n > \overline{\sigma}_n T_n^{(1)} = \sqrt{-2\ln\theta_n(s)} \ge \sqrt{-2\ln c} \ge \sqrt{2}.$$

Тому $|f_{nk}(t)| \le \left(1 + 2^{-\frac{s}{2}}\right) |t|^s \sigma_{nk}^s \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}}$.

Нехай $\theta_n(s) > c$, $|t| \le T_n^{(2)}$ $\left(\bar{\sigma}_n^2 T_n^{(2)} \le 1\right)$. Із (11) і (15) одержимо

$$|f_{nk}(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \omega_n(t)\right) \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \cdot \theta_{nk}(s) \cdot \frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\right) \le$$

$$e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{\left(T_n^{(2)}\right)^2\sigma_{nk}^2}{2}} \cdot \theta_{nk}(s) \cdot \frac{T_n^{(2)} t^2\sigma_{nk}^3}{6}\right) \le e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left(1 + c\sqrt{e} \cdot \frac{t^2\sigma_{nk}^2}{6}\right) \le e^{-c_2 t^2 \sigma_{nk}}.$$

Лема 3. *Нехай* $\bar{\sigma}_n = max\{\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \ldots, \sigma_{nn}\}$ *і* $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ *для* $n \geq 2$. *Якщо виконуються умови леми 2, то існують сталі* C_4, C_5, *що для всіх* $n \geq 2$ *справедлива нерівність*

$$\rho_n \leq C_4 \bar{\sigma}_n max\{\theta_n(s); (\theta_n(s))^p\}, \tag{16}$$

де $p = min\{1, \bar{\sigma}_n^{-2}(sn+1)^{-1}\}$, $\theta_n(s) = max\{\theta_{n1}(s), \ldots, \theta_{nn}(s)\}$, *а при* $s > 0$

$$\rho_1 \leq C_5 \left(1 + \frac{1}{s}\right) max\left\{\theta_{11}(s); (\theta_{11}(s))^{\frac{1}{s+1}}\right\}. \tag{17}$$

Доведення. Використаємо нерівність ([7], с.299)

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24 \sup\limits_x |G'(x)|}{\pi T}.$$

Оскільки $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$, то у попередній нерівності покладемо $F(x) = \Phi_n(x)$, $G(x) = \Phi(x)$, $f(t) = \prod\limits_{k=1}^n f_{nk}(t)$, $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \tag{18}$$

Із нерівності

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \left(\prod_{k=1}^{i-1} |b_k| \right) \left(\prod_{k=i+1}^n |a_k| \right)$$

випливає, що

$$\left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{ni}^2}{2}} \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)|.$$

Нехай $n \geq 2$. Із одержаної нерівності (11) леми 2 (нерівностей (12) і (14) при $|t| \leq T_n^{(l)}$ ($l = 1$ при $\theta_n(s) \leq c$ і $l = 2$ при $\theta_n(s) > c$)) отримаємо

$$\left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|t|^3 \sigma_{ni}^3}{6} \theta_{ni}(s) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n e^{-c_l t^2 \sigma_{nk}^2} \leq$$

$$\frac{|t|^3}{6} \theta_n(s) \bar{\sigma}_n \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 e^{-c_l t^2 (1 - \sigma_{ni}^2)} \leq \frac{|t|^3}{6} \theta_n(s) \bar{\sigma}_n e^{-\frac{c_l t^2}{4}}. \tag{19}$$

Ми врахували, що $c_l \leq \frac{1}{2}$ та умову $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$.

Нехай $\theta_n(s) > c$. Покладемо у (18) $T = T_n^{(2)} = \frac{1}{\bar\sigma_n} \cdot \frac{c}{\theta_n(s)}$. Тоді, врахувавши (19), при $n \geq 2$

$$\rho_n \leq \theta_n(s) \cdot \bar\sigma_n \cdot \frac{1}{3\pi} \int\limits_0^T t^2 e^{-\frac{1}{4}c_2 t^2} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \theta_n(s)\bar\sigma_n \leq$$

$$\theta_n(s)\bar\sigma_n \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{\pi} c_2^{\frac{3}{2}}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \right) = C_6 \theta_n(s)\bar\sigma_n. \tag{20}$$

У випадку $n \geq 2$, $\theta_n(s) > c$ нерівність (16) теореми доведена.

Нехай $n \geq 2$ і $\theta_n(s) \leq c$. Покладемо у (18) $T = \frac{1}{\bar\sigma_n} c^5 \left(\theta_n(s)\right)^{-p}$, $p = \min\{1; \bar\sigma_n^{-2}(sn+1)^{-1}\}$ і $T' = \min\{T;\ T_n^{(1)}\}$. Тоді інтеграл у (18)

$$I = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} \leq$$

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int\limits_{T'}^{T} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int\limits_{T'}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} =$$

$$I_1 + I_2 + I_3. \tag{21}$$

Врахувавши, що $T' \leq T_n^{(1)}$, аналогічно до оцінки інтегралу у (20)

$$I_1 \leq \theta_n(s) \cdot \bar\sigma_n \cdot \frac{1}{3\pi} \int\limits_0^{T'} t^2 e^{-\frac{1}{4}c_1 t^2} dt \leq \theta_n(s) \cdot \bar\sigma_n \cdot \frac{2}{3\sqrt{\pi} c_1^{\frac{3}{2}}}. \tag{22}$$

Будемо вважати, що $T' = T_n^{(1)}$, бо інакше $I_2 = 0$ і $I_3 = 0$ і справедливість нерівності (16) випливає з (18), (21), (22). Із (13) маємо

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T'}^{T} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{T'}^{T} \prod_{k=1}^n \left(2 t^s \sigma_{nk}^s \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar\sigma_n^2}} \right) \frac{dt}{t} =$$

$$\frac{2^{n+1}}{\pi} \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{1}{\bar\sigma_n^2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \sigma_{nk}^s \right) \int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} t^{sn-1} dt. \tag{23}$$

Нехай $s \geq \frac{1}{6}$. Оскільки $\theta_n(s) \leq c$, $n\bar\sigma_n^2 \geq 1$ і $n(1-sp) \geq p$, то

$$I_2 \leq \frac{2^{n+1}}{\pi s n} \cdot \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{1}{\bar\sigma_n^2}} \cdot \bar\sigma_n^{sn} \cdot T^{sn} \leq$$

$$\frac{2^{n+1}}{\pi s n} \cdot \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{1}{\bar\sigma_n^2}} \cdot \bar\sigma_n^{sn} \cdot \left(\frac{1}{\bar\sigma_n} c^3 \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{-p}{n\bar\sigma_n^2}} \right)^{sn} =$$

$$\frac{2^{n+1}}{\pi s n} \cdot \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{1}{\bar\sigma_n^2} - \frac{sp}{\bar\sigma_n^2}} c^{3sn} \leq \frac{12}{\pi n} \cdot \left(\theta_n(s)\right)^{\frac{p}{n\bar\sigma_n^2}} \cdot \left(2\sqrt{c}\right)^n \leq$$

$$\bar{\sigma}_n \cdot (\theta_n(s))^{\frac{p}{n\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \frac{24\sqrt{2}}{\pi}c. \tag{24}$$

Нехай $s \le \frac{1}{6}$ і $n \ge 2$, $p = 1$. Із цих умов і для $n \ge 2$ і $\bar{\sigma}_n^2 \le \frac{3}{4}$ випливає, що $\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}(1-s) - \frac{1}{6n\bar{\sigma}_n^2} > 1$. Тому, враховуючи, що $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{2}$, ми отримуємо

$$I_2 \le \frac{2^{n+1}}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} t^{sn-\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} dt \le$$

$$\frac{2^{n+1}}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \cdot \left(T_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{6}} \cdot T^{sn+\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{sn+\frac{1}{6}} \le$$

$$\frac{2^{n+1}\cdot 6}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}_n}\right)^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_n} \cdot c^3 \cdot (\theta_n(s))^{\frac{-1}{n\bar{\sigma}_n^2}}\right)^{sn+\frac{1}{6}} \le$$

$$\frac{2^{n+\frac{11}{12}}\cdot 6}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}(1-s)-\frac{1}{6n\bar{\sigma}_n^2}} \cdot c^{3sn+\frac{1}{2}} \le$$

$$\bar{\sigma}_n \cdot \theta_n(s) \cdot \frac{12}{\pi} \cdot c^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}_n}\left(2^{n\bar{\sigma}_n^2} c\right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \le$$

$$\bar{\sigma}_n \cdot \theta_n(s) \cdot \frac{12}{\pi} \cdot c^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{n}(2e^{-1})^n \le \bar{\sigma}_n \cdot \theta_n(s) \cdot \frac{12}{\pi\sqrt{e}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}. \tag{25}$$

Враховуючи, що $\theta_n(s) \le c$ і $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{2}$ для $n \ge 2$ а $\bar{\sigma}_n^2 \le \frac{3}{4}$ ми отримуємо

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_n^{(1)}}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi} \cdot \left(T_n^{(1)}\right)^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(T_n^{(1)}\right)^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(T_n^{(1)}\right)^{-2} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \le$$

$$\frac{1}{\pi}\bar{\sigma}_n^2 \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \le \frac{1}{\pi}\bar{\sigma}_n^2 \cdot (\theta_n(s))^{\frac{4}{3}} \le \frac{1}{\pi}\bar{\sigma}_n^2 \cdot \theta_n(s) \cdot c^{\frac{1}{3}}. \tag{26}$$

Якщо $n \ge 2$, $\theta_n(s) \le c$, то нерівність (16) теореми 1 виконується для (18), (21), (22), (24) – (26).

Нехай $n = 1$. Тоді $\bar{\sigma}_1^2 = 1$. Якщо $\theta_n(s) > c$, тоді $\rho_1 \le 1 < \frac{1}{c}\theta_n(s)$.

У випадку $\theta_n(s) \le c$ і $s > 0$, $p = \frac{1}{s+1}$. Із леми та визначення T маємо

$$\rho_1 \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \left| f_{11}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}\right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \le \theta_{11}(s) \cdot \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T t^{s-1} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} =$$

$$\theta_{11}(s) \cdot \frac{2}{\pi s}T^s + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} = \frac{2c^{5s}}{\pi s}(\theta_{11}(s))^{1-sp} + \frac{24c^{-5}}{\pi\sqrt{2\pi}} \cdot (\theta_{11}(s))^p \le$$

$$C_7\left(1+\frac{1}{s}\right)(\theta_{11}(s))^p.$$

Із одержаних оцінок для ρ_1 випливає нерівність (17).

4. Доведення теореми 1. ***Доведення.*** Із леми 1 випливає, що в лемах 2 і 3 можна покласти $s = 0$ і $\theta_{nk}(0) = \nu_{nk}^{(0)}$. Тоді з леми 3 отримаємо (1) для $n \geq 2$

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F_{11}(x) - \Phi(x)| = \sup_x \left| \int_{-\infty}^{x} d\left(F_{11}(u) - \Phi(u)\right) \right| \leq -3mm$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\left|F_{11}(u) - \Phi(u)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right) \left|(dF_{11}(x) - \Phi(x))\right| = \nu_{11}^{(0)}.$$

Якщо в лемах 2 і 3 покласти $s = 1$ і $\theta_{nk}(1) = \kappa_{nk}^{(0)}$, то із леми 1 та леми 3 одержимо (2). Якщо ж в лемах 2 і 3 покласти $s = 3$ і $\theta_{nk}(3) = \kappa_{nk}$, то із леми 1 і леми 3 одержимо (3).

У роботі одержано оцінку швидкості збіжності у центральній граничній теоремі, що узагальнює результати роботи [2]. Використано метод, що відмінний від методу роботи [2]. Відзначимо окремо нерівність 16 із леми 3, оскільки вона є самостійним результатом.

Список використаної літератури

1. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. Москва: Наука, 1986. 416 с.
2. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem. Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1973. pp. 531-543.
3. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Узагальнення одного результату В.М.Золотарьова. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика.* 1998. Вип. 3. С. 184-189.
4. Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика.* 1999. Вип. 4. С. 12–16.
5. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для послідовності серій в термінах середніх псевдомоментів. *Теорія ймовірностей таматематична статистика. Вип. 2(99).* 2018. С. 91-100.
6. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Точність наближення в центральній граничній теоремі в термінах усереднених псевдомоментів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика.* 2018. Вип. № 2(33). С. 78–87.
7. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: Из-во иностр. лит., 1962. 720 с.

Bojarishcheva T. V., Kapustey M. M., Slyvka-Tylyshchak G. I., Slyusarchuk P. V. The estimate of rate of convergence in the central limit theorem for the sequence of series.

Boundary theorems of probability theories are widely applicable in various fields of science and manufacture. It is reasonable as they deal with properties of different random values formed under the influence of a great deal of random factors each of which in its turn has a minor influence on the final result but the total influence of these factors is essential. Problems that are solved within this field may be conditionally divided into two types. The first ones are concerned with the fact of the convergence of a sum of random summands while the second ones deal with the rate of the convergence. The work is devoted to the latter issue. A lot of researchers have studied estimations of convergence rate in boundary theorems. But it should be mentioned that until the middle of the last century the estimations were formed with the help of terms of absolute moments, and that had at least two drawbacks. Firstly, the existence of absolute moments is rather a strict condition restricting an area of random values a lot to which the given estimations may be applied. Secondly, the estimations that are expressed in terms of absolute moments do not presuppose the proximity of boundary distribution of summands. In spite of it there is a great quantity of estimations beginning from Berry–Esseen inequality and ending with investigations of contemporary scientists using the very absolute moments. The usage of pseudomoments has become the way of allowing to avoid both drawbacks of estimations. A pseudomoment is a numerical characteristic which according to its structure is expressed in terms of the difference of functions of distribution of observable and boundary random values. So, in case of equivalency of these distributions the pseudomoment is equal to zero and it makes possible to receive a more accurate estimation. The structure of the characteristics may vary greatly and it enables to use a pseudomoment which is appropriate to a certain specific problem. In the article we have used analogical characteristics introduced by V.M. Zolotariov. By means of them the rate of convergence of distributions of sums of independent random values to normal law in a series circuit. In this case restrictions imposed on random summands are not too strict - mathematical expectation is to be equal to zero and dispersion of each summand is to be finite. Meanwhile, we have obtained estimations of convergence rate expressed in terms of pseudomoments of different types. We have also received estimations of characteristic functions expressed also in terms of mentioned characteristics. They are essential for proving major results but they are also of independent importance.

Keywords: central limit theorem, the estimate of rate of convergence, sequence of series of random variables.

References

1. Zolotarev, V. M. (1986). The modern theory of summation of independent random variables. Moscow: Izdatelstvo Nauka [in Russian].
2. Zolotarev, V. M. (1973). Exactness of an approximation in the central limit theorem. *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Berlin: Springer-Verlag.* 531-543.
3. Slyusarchuk, P. V., & Polyak, I. Y. (1998). The generalising of some result of V. M. Zolotarev. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 3, 184-189 [in Ukrainian].
4. Boyaryshcheva, T. V., & Slyusarchuk, P. V. (1999). The rate of convergence in the central limit theorem for no indetically distributed random variabels (Ukrainian). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 4, 12-16 [in Ukrainian].
5. Kapustey, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). Estimation of the convergence velocity in the central limit theorem for a seguance of series in the term of mean pseudo-moments *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2(99), 91-100 [in Ukrainian].
6. Kapustey, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). The accuracy of the approximation in the central limit theorem in terms of pseudo-moments. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2(33), 78–87 [in Ukrainian].
7. Loeve M.(1962). Probability Theory. Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury [in Russian].

Одержано 05.05.2021