УДК 517.988.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).47-59

Л. М. Мамай

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат фізико-математичних наук
lesya.mamay@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7545-8820

ПРО ПОБУДОВУ НАБЛИЖЕНИХ ІЗОЛЬОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Розглядається нелінійне інтегральне рівняння (НІР) зі степеневою нелінійністю і ставиться задача побудови ізольованих обмежених за нормою розв'язків, на яких похідна Фреше оператора, визначеного лівою частиною рівняння обмежена зверху і знизу. Для наближеного розв'язування НІР застосовано елементи загальної теорії наближених методів. Для конструювання послідовності наближених рівнянь використано метод механічних квадратур. Сформульовані і доведені пряма та обернена теореми, які відповідно характеризують збіжність апроксимаційного методу переходу до наближених рівнянь і апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Ключові слова: нелінійне інтегральне рівняння, ізольований розв'язок, квадратурний процес, оцінка похибки.

1. Вступ. В роботі [1] наведено теоретичне обґрунтування та практичну реалізацію знаходження всіх ізольованих наближених розв'язків НІР типу Урисона

$$u(x) - \int_0^1 \overline{K}\left(x, y, u(y)\right) dy - f(x) = 0$$

в області $\overline{\Omega} = \{(x, y, u) : 0 \leq x, y \leq 1, \|u\| \leq d < \infty\}$, де $u\left(x\right)$ — шукана функція, $K\left(x, y, u\right)$ та $f\left(x\right)$ — неперервні функції усіх своїх аргументів в $\overline{\Omega}$. В даній роботі проведені аналогічні міркування щодо НІР зі степеневою нелінійністю. Отримані відповідні оцінки, які фігурують у, так званих, прямій та оберненій теоремах, які дають теоретичне обґрунтування та практичний апарат для вирішення питання щодо відокремлення розв'язків таких рівнянь.

2. Постановка задачі і допоміжні твердження та означення.

Розглянемо рівняння НІР вигляду

$$u(x) - \int_0^1 \overline{K}\left(x, y\right) \cdot u^m(y) dy - f(x) = 0, m \geq 2, \tag{1}$$

де $u\left(x\right)$ — шукана функція, $K\left(x, y\right)$, $f\left(x\right)$ — неперервні функції усіх своїх аргументів в замкненій області $\overline{\Omega} = \{(x, y, u) : 0 \leq x, y \leq 1, \|u\| \leq d < \infty\} \subset C[0, 1]$.

Ставиться задача знаходження всіх неперервних ізольованих в області $\overline{\Omega}$ наближених розв'язків рівняння (1), шляхом побудови і наступного розв'язання апроксимаційних рівнянь. В роботі [2] для побудови наближених рівнянь використовувався метод вироджених ядер. В даній роботі використаємо метод механічних квадратур

$$\int_0^1 z(y) dy = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} z(y_{jn}) + r_n(z), \tag{2}$$

де точки y_{jn} називаються вузлами квадратурної формули, причому $0 \leq y_{1n} < < y_{2n} < \cdots < y_{nn} \leq 1$, а коефіцієнти $\alpha_{jn} \in R$, $\alpha_{jn} > 0$, $\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \cdots + \alpha_{nn} \leq \overline{a} = const$.

Означення 1. *Квадратурний процес* (2) *називається збіжним, якщо залишковий член* $r_n(z) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для будь-якої функції, неперервної на* $[0,1]$.

Замінюючи інтеграл (1) його наближеним значенням, згідно (2), отримаємо

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \overline{K}\left(x, y_{jn}\right) u^m(y_{jn}) + f(x), m \geq 2. \tag{3}$$

Аналітичні розв'язки, наближеного рівняння (3) визначаються рівністю

$$u_n^*(x) = \Phi_n \overline{\xi}_n^* := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \overline{K}\left(x, y_{jn}\right) \cdot \left(\overline{\xi}_{jn}\right)^m + f(x), \tag{4}$$

де $\overline{\xi}_n^* = \left(\overline{\xi}_{1n}, \overline{\xi}_{2n}, \ldots, \overline{\xi}_{nn}\right)$ — розв'язок системи рівнянь

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \overline{K}\left(x_{in}, y_{jn}\right) \cdot \left(\xi_{jn}\right)^m + f(x_{in}), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

яка апроксимує рівняння (1), а $\Phi_n \overline{\xi}_n$ має вигляд

$$\Phi_n \overline{\xi}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \overline{K}\left(x, y_{jn}\right) \cdot \left(\xi_{jn}\right)^m + f(x).$$

Отже, замість розв'язку $u^*(x)$ рівняння (1) знайдемо його розв'язки у вузлах інтерполяції y_{jn}, $j = \overline{1,n}$, як точні або наближені значення $\overline{\xi}_{jn} = u^*(y_{jn})$, які визначаються із системи (5). Вектори $\overline{\xi}_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn})$ розглядаються як елементи простору m_n або R_n.

Щоб встановити міру близькості відповідних розв'язків рівняння (1) та системи (5) вводиться лінійне відображення p_n таке, що $\forall\, u(x) \in C[0,1]$

$$p_n u = \left\{u\left(y_{1n}\right), u\left(y_{2n}\right), \ldots, u\left(y_{nn}\right)\right\} \in m_n, \tag{6}$$

а міра близькості розв'язків $u^*(x)$та $\overline{\xi}_n^*$ визначається величиною $\left\|p_n u^* - \overline{\xi}_n^*\right\|$ [1].

Означення 2. *Кажуть, що метод механічних квадратур збігається, якщо для достатньо великих* n *існують розв'язки* $\overline{\xi}_n^*$ *систем* (5) *і для кожної послідовності таких розв'язків* $\left\{\overline{\xi}_n^*\right\}$

$$\lim_{n \to \infty} \rho\left(\overline{\xi}_n^*, p_n F\right) = 0, \tag{7}$$

де F *— множина розв'язків рівняння* (1).

Подамо рівняння (1) в операторному вигляді

$$Tu := u - \overline{T}u = 0, \tag{8}$$

де T — двічі диференційовний за Фреше нелінійний оператор, що діє з області свого визначення Q гільбертового простору H у цей же простір. Нехай $u^*(x)$ — один із розв'язків рівняння (8).

Метод мінімальних похибок [3] полягає у побудові ітераційної послідовності згідно формули

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\left\|Tu^k\right\|^2}{\left\|G_k^* Tu^k\right\|^2} G_k^* Tu^k, \tag{9}$$

де $G_k = T'(u_k)$ — лінійний обмежений оператор, G_k^* — спряжений йому. Наведемо теорему існування і єдиності розв'язку рівняння (8) та збіжності методу (9) в якій, на відміну від [3], константи, що обмежують похідні оператора T в кулі $\overline{S}(u^0, r) = \{u \in Q : \|u - u^0\| \leq r\}$ залежать від u^0 та r.

Теорема 1. *Нехай у кулі $\overline{S}(u^0, r)$ з заданими u^0 та $r-$ виконуються умови*

$$\left\|T(u^0)\right\| \leq \eta, \|T'(u)\| \leq M(u^0, r), \|T''(u)\| \leq N(u^0, r), \tag{10}$$

$$\|T'(u)h\| \geq \tilde{m}(u^0, r) \|h\|, \tilde{m} > 0, \forall h \in H, \tag{11}$$

де η, $M(u^0, r)$, $N(u^0, r)$, $\tilde{m}(u^0, r)$ — константи, що забезпечують виконання умов

$$\gamma(r) = \frac{\eta \cdot N(u^0, r)}{\tilde{m}^2(u^0, r)} < 1, \tag{12}$$

$$\frac{2\eta}{\tilde{m}(u^0, r)} \leq r. \tag{13}$$

Тоді рівняння (8) має в кулі $\overline{S}(u^0, r)$ єдиний розв'язок u^*, до якого, починаючи з u^0, монотонно і сильно збігається послідовність $\{u_k\}$, побудована згідно (9) причому оцінка похибки характеризується нерівністю

$$\left\|u^* - u^k\right\| \leq \frac{2\eta}{\tilde{m}(u^0, r)} \left[1 - \frac{\tilde{m}^2(u^0, r)}{M^2(u^0, r)} (1 - \gamma(r))\right]^{\frac{k}{2}}. \tag{14}$$

3. Існування розв'язку системи апроксимаційних рівнянь.

Будемо вважати, що оператор $T : \left\{u \in C\left[\overline{\Omega}\right] : \|u\| \leq d\right\} \to C[0, 1]$, а систему (5) подамо як операторне рівняння

$$T_n \overline{\xi}_n := \overline{\xi}_n - \overline{T}_n \overline{\xi}_n = 0, n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

де $T_n \overline{\xi}_n = \left(T_{n1}\overline{\xi}_n, T_{n2}\overline{\xi}_n, \ldots, T_{nn}\overline{\xi}_n\right)$; $T_{ni}\overline{\xi}_n := \overline{\xi}_{in} - \overline{T}_{ni}\overline{\xi}_n = \xi_{in} - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \overline{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot \cdot (\xi_{jn})^m - f(x_{in})$, $i = \overline{1, n}$, причому оператор T_n переводить множину точок $\overline{\xi}_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn}) \in m_n$, що задовольняє $\left\|\overline{\xi}_n\right\| \leq d$ в m_n. Оскільки інтегральне рівняння (1) має степеневу нелінійність, то оператори T та T_n двічі диференційовні відповідно на будь-якому елементі $w \in C[0, 1]$, $\|w\| \leq d$ та $\overline{\xi}_n \in m_n$, $\left\|\overline{\xi}_n\right\| \leq d$. Диференціали операторів мають вигляд

$$T'(w)h = h(x) - m \int_0^1 \bar{K}(x, y) [w(y)]^{m-1} h(y) dy, \tag{16}$$

$$T''(w)hh_1 = -m(m-1) \int_0^1 \bar{K}(x, y) [w(y)]^{m-2} h(y) h_1(y) dy, \tag{17}$$

$$T_n'\left(\overline{\xi}_n\right)\overline{\zeta}_n = \left\{\sum_{j=1}^n \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn}\overline{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (\xi_{jn})^{m-1}\right] \zeta_{jn}\right\}_{i=1}^n \overline{\zeta}_n \in m_n, \tag{18}$$

де $\delta_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad i = j \\ 0, & \textit{якщо} \quad i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера, або $T_n'\left(\overline{\xi}_n\right)\overline{\zeta}_n = A_n\overline{\zeta}_n{}^T$, де $\overline{\zeta}_n{}^T$ —транспонований рядок вектора $\overline{\zeta}_n = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, а A_n — квадратна матриця порядку n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 - m\alpha_{1n}\overline{K}\left(x_{1n}, y_{1n}\right)\cdot\left(\xi_{1n}\right)^{m-1} & \cdots & -m\alpha_{nn}\overline{K}\left(x_{1n}, y_{nn}\right)\cdot\left(\xi_{nn}\right)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -m\alpha_{1n}\overline{K}\left(x_{nn}, y_{1n}\right)\cdot\left(\xi_{1n}\right)^{m-1} & \cdots & 1 - m\alpha_{nn}\overline{K}\left(x_{nn}, y_{nn}\right)\cdot\left(\xi_{nn}\right)^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Правомірність переходу до розв'язання наближених рівнянь виражаються двома теоремами: в першій доводиться існування розв'язків послідовності апроксимаційних рівнянь за даними існування розв'язків вихідного рівняння і збіжності методу переходу до наближених рівнянь, а в другій за даними існування при фіксованому n розв'язку наближеного рівняння доводиться існування відповідного йому розв'язку вихідного рівняння і дається апостеріорна оцінка близькості таких розв'язків.

В першій теоремі фігурують оцінки оператора T_n у точці $p_n u^*$, де $u^*(x)$ — розв'язок рівняння (1) та на елементі $\overline{\xi}_n \in \overline{S}_n\left(p_n u^*, r\right)$, які відображені в лемі 1.

Лема 1. *Нехай* $u^*(x)$ *— розв'язок рівняння* (1)*. Тоді:*
1) у точці $p_n u^*$ *для оператора* $T_n'\left(\overline{\xi}_n\right)$*, визначеного згідно* (18)*, справедливі оцінки, обчислені в нормі простору* R_n*:*

$$\left\|T_n'\left(p_n u^*\right)\right\| \leq \overline{M}_n, \left\|T_n'\left(p_n u^*\right) p_n h\right\| \geq \overline{m}_n \left\|p_n h\right\|, \textit{де} \quad (20)$$

$$\overline{M}_n = \begin{cases} \left\{ n + m^2\tilde{M}_n \right\}^{\frac{1}{2}}, & \textit{якщо} \ \overline{K}(x,y)\cdot\left[u^*(y)\right]^{m-1} \geq 0, \\ \left\{ n + 2m\overline{\overline{M}}_n + m^2\tilde{M}_n \right\}^{\frac{1}{2}}, & \textit{якщо} \ \overline{K}(x,y)\cdot\left[u^*(y)\right]^{m-1} < 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\overline{m}_n = \begin{cases} \left|1 - m\tilde{M}_n\right|, & \textit{якщо} \ \overline{K}(x,y)\cdot\left[u^*(y)\right]^{m-1} > 0, \\ 1, & \textit{якщо} \ \overline{K}(x,y)\cdot\left[u^*(y)\right]^{m-1} \leq 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{gathered} \tilde{M}_n = \left\{\sum_{i,j=1}^n \left(\alpha_{jn}\overline{K}\left(x_{in}, y_{jn}\right)\cdot\left[u^*\left(y_{jn}\right)\right]^{m-1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \overline{\overline{M}}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}\left|\overline{K}\left(x_{jn}, y_{jn}\right)\cdot\left[u^*\left(y_{jn}\right)\right]^{m-1}\right|; \end{gathered} \quad (23)$$

2) на будь-якому елементі

$$\overline{\xi}_n \in \overline{S}_n\left(p_n u^*, r\right) = p_n\overline{S}\left(u^*, r\right) = \left\{\overline{\xi}_n \in m_n : \left\|\overline{\xi}_n - p_n u^*\right\| \leq r\right\}$$

для похідної $T_n''\left(\overline{\xi}_n\right)$ *справедлива оцінка*

$$\left\|T_n''\left(\overline{\xi}_n\right)\right\| \leq \overline{N}_n\left(p_n u^*, r\right), \quad (24)$$

де

$$\overline{N}_n\left(p_n u^*, r\right) = \left\{\left(m\left(m-1\right)\right)^2 \sum_{i,j=1}^n \alpha_{jn}^2\overline{K}^2\left(x_{in}, y_{jn}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(C_{m-2}^{l} \left(u^* \left(y_{jn} \right) \right)^{l} \right)^2 \cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(r^2 \right)^{m-2-l} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

$C_{m-2}^{l} = \frac{(m-2)!}{l!(m-2-l)!}$ — *число комбінацій з $m-2$ по l.*

Доведення. Використовуючи вигляд (18) оператора $T_n' \left(\overline{\xi}_n \right) \overline{\zeta}_n$, згідно визначення норми у просторі R_n за нерівністю Коші справедливі нерівності:

$$\left\| T_n' \left(p_n u^* \right) p_n h \right\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left(u^* \left(y_{jn} \right) \right)^{m-1} \right] h \left(y_{jn} \right) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left(u^* \left(y_{jn} \right) \right)^{m-1} \right]^2 \sum_{j=1}^{n} \left[h \left(y_{jn} \right) \right]^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left(u^* \left(y_{jn} \right) \right)^{m-1} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| p_n h \right\| =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 2m \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \delta_{ij}^{(n)} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left[u^* \left(y_{jn} \right) \right]^{m-1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{j=1}^{n} \left(m\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left[u^* \left(y_{jn} \right) \right]^{m-1} \right)^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| p_n h \right\| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \left\{ n + m^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left[u^* \left(y_{jn} \right) \right]^{m-1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| p_n h \right\|, \\ \qquad\qquad \text{якщо } \ \overline{K} \left(x, y \right) \cdot \left[u^* \left(y \right) \right]^{m-1} \geq 0, \\ \left\{ n + 2m \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \left| \overline{K} \left(x_{jn}, y_{jn} \right) \cdot \left[u^* \left(y_{jn} \right) \right]^{m-1} \right| + \right. \\ \left. + m^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left[u^* \left(y_{jn} \right) \right]^{m-1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| p_n h \right\|, \\ \qquad\qquad \text{якщо } \ \overline{K} \left(x, y \right) \cdot \left[u^* \left(y \right) \right]^{m-1} < 0. \end{cases}$$

Оцінимо похідну оператора T_n зверху, враховуючи що $T_n' \left(p_n u^* \right) p_n h = A_n \left(p_n h \right)^T$, де матриця A_n має вигляд (19). Розглянемо випадки:

1. Нехай $\overline{K} \left(x, y \right) \cdot u^m(y) \leq 0$. Тоді

$$\left\| T_n' \left(p_n u^* \right) p_n h \right\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left(u^* \left(y_{jn} \right) \right)^{m-1} \right] h \left(y_{jn} \right) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^{(n)} h \left(y_{jn} \right) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[h \left(y_{jn} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\| p_n h \right\|.$$

2. Якщо $\overline{K} \left(x, y \right) \cdot u^m(y) > 0$, тоді проведемо наступні міркування. Подамо матрицю A_n у вигляді різниці $A_n = E_n - \tilde{A}_n$, де E_n — одинична матриця n-го порядку, а $\tilde{A}_n$ — квадратна матриця з елементами

$$\tilde{a}_{ij} = m\alpha_{jn} \overline{K} \left(x_{in}, y_{jn} \right) \cdot \left[u^* \left(y_{jn} \right) \right]^{m-1}, \ i, j = \overline{1, n}.$$

Для норм матриць справедлива нерівність $\|T'_n(p_n u^*)\, p_n h\| = \left\|A_n \cdot (p_n h)^T\right\| = \left\|E_n \cdot (p_n h)^T - \tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| \geq \left| \left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| - \left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| \right|$. Знайдемо $\overline{m}_n$, для якого

$$\left| \left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| - \left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| \right| \geq \overline{m}_n \left\|(p_n h)^T\right\|. \tag{26}$$

Оцінимо $\left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\|$. За нерівністю Коші, використовуючи (23), отримаємо

$$\left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| = m \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_{jn} \overline{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1}\right] \cdot h(y_{jn}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq m\tilde{M}_n \|p_n h\|.$$

Очевидно, що $\left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| = \|E_n \cdot (p_n h)\| = \|p_n h\| = \left\|(p_n h)^T\right\|$. Запишемо (26) у вигляді двох нерівностей:

$$\begin{aligned} \left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| - \left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| &\geq \overline{m}_n \left\|(p_n h)^T\right\| \\ \left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| - \left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| &\leq -\overline{m}_n \left\|(p_n h)^T\right\| \end{aligned} \tag{27}$$

Якщо $\tilde{M}_n < \frac{1}{m}$, тоді

$$\left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| - \left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| \geq \left(1 - m\tilde{M}_n\right) \left\|(p_n h)^T\right\|. \tag{28}$$

Якщо $\tilde{M}_n > \frac{1}{m}$, тоді другу з нерівностей (27) запишемо у вигляді

$$\left\|E_n \cdot (p_n h)^T\right\| + \overline{m}_n \left\|(p_n h)^T\right\| \leq \left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\|$$

та використаємо $\left\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\right\| \leq m\tilde{M}_n \|p_n h\|$. Звідси

$$(1 + \overline{m}_n) \left\|(p_n h)^T\right\| \leq m\tilde{M}_n \left\|(p_n h)^T\right\|,$$

тобто

$$\overline{m}_n \leq m\tilde{M}_n - 1. \tag{29}$$

На основі нерівностей (28) та (29) отримаємо, що в даному випадку $\overline{m}_n = \left|m\tilde{M}_n - 1\right|$.

Доведемо твердження 2). Під похідною $T''_n\left(\overline{\xi}_n\right)$ розуміють сукупність $T''_n\left(\overline{\xi}_n\right) = \left[\; V_{1n}\left(\overline{\xi}_n\right), \;\; V_{2n}\left(\overline{\xi}_n\right), \;\; \ldots, \;\; V_{nn}\left(\overline{\xi}_n\right) \;\right]$, де $V_{kn}\left(\overline{\xi}_n\right) = \left[\frac{\partial^2 T_{ni}}{\partial \xi_{kn} \partial \xi_{jn}}\right]$, $i, j, k = \overline{1, n}$, а $\left\|T''_n\left(\overline{\xi}_n\right)\right\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 T_{ni}}{\partial \xi_{kn} \partial \xi_{jn}}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$. Звідси, враховуючи, що мішані похідні функцій $T_{ni}\left(\overline{\xi}_n\right)$, $i = \overline{1, n}$, дорівнюють нулю, використовуючи формулу бінома Ньютона та нерівність Коші отримаємо:

$$\left\|T''_n\left(\overline{\xi}_n\right)\right\|^2 \leq m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}^2 \sum_{i=1}^{n} \overline{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot [\xi_{jn}]^{2(m-2)} \leq$$

$$\leq m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{jn}^2 \overline{K}^2 (x_{in}, y_{jn}) \cdot \left([(\xi_{jn} - u^*(y_{jn})) + u^*(y_{jn})]^{m-2} \right)^2 =$$

$$= m^2 (m-1)^2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{jn}^2 \overline{K}^2 (x_{in}, y_{jn}) \cdot \left(\sum_{l=0}^{m-2} C_{m-2}^{l} (\xi_{jn} - u^*(y_{jn}))^{m-2-l} (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \leq$$

$$\leq m^2 (m-1)^2 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{jn}^2 \overline{K}^2 (x_{in}, y_{jn}) \cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(C_{m-2}^{l} (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \cdot \sum_{l=0}^{m-2} (\xi_{jn} - u^*(y_{jn}))^{2(m-2-l)} \right] \leq$$

$$\leq m^2 (m-1)^2 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{jn}^2 \overline{K}^2 (x_{in}, y_{jn}) \cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(C_{m-2}^{l} (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(r^2 \right)^{m-2-l} \right],$$

оскільки $\forall j = \overline{1, n}$ справедлива нерівність $(\xi_{jn} - u^*(y_{jn}))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\xi_{in} - u^*(y_{in}))^2 = r^2$. Лема доведена.

Наведемо теорему про існування розв'язків системи (5) і збіжність методу переходу до системи (5).

Теорема 2. *Нехай виконані умови:*

1) *рівняння* (1) *має розв'язок* $u^*(x) \in C[0,1]$;
2) *квадратурний процес* (2) *збігається, тобто* $r_n(z) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для будь-якої функції* $z(x) \in C[0,1]$;
3) *функція* $\overline{K}(x,y) \cdot u^m(y)$ *неперервна за всіма змінними в області* $\overline{\Omega}_1 = \{(x,y,u)\}$: $\|u - u^*\| \leq r$, *а функція* $f(x)$ *неперервна на* $[0,1]$;
4) *оператор* T, *визначений згідно* (8), *двічі неперервно диференційовний за Фреше в кулі* $\overline{S}(u^*, r) = \{u \in C[0,1] : \|u - u^*\| \leq r\}$, *причому для оператора* T'_n, *визначеного згідно* (18), *у точці* $p_n u^*$ *справедливі нерівності* (20);
5) *на будь-якому елементі*

$$\overline{\xi}_n \in \overline{S}_n (p_n u^*, r) = p_n \overline{S}(u^*, r) = \left\{ \overline{\xi}_n \in m_n : \left\| \overline{\xi}_n - p_n u^* \right\| \leq r \right\}$$

для оператора $T''_n \left(\overline{\xi}_n \right)$ *виконується нерівність* (24).

Тоді справедливі твердження:

1) *Оператори* $\overline{T}$, $\overline{T'}$, $\overline{T_n}$, $\overline{T'_n}$, *визначені відповідно формулами* (8), (16), (15), *та* (18), *є цілком неперервними відповідно на кулях* $\overline{S}(u^*, r)$ *і* $\overline{S}_n (p_n u^*, r)$, *причому послідовність операторів* $\overline{T_n} : \overline{S}_n (p_n u^*, r) \to m_n \overline{T'_n} (p_n u^*) \in L(m_n, m_n)$ *компактно апроксимують відповідно оператори* $\overline{T} : \overline{S}(u^*, r) \to C[0,1]$ *та* $\overline{T'}(u^*) \in L(C[0,1], C[0,1])$.
2) *Існує така область* $d(r) = (0, r_0)$, *де* r_0 $(r_0 > 0)$ — *корінь рівняння* $\overline{m_n} - \overline{N}_n (p_n u^*, r) \cdot r = 0$, *що для будь-якого* $r \in d(r)$ *буде виконуватися нерівність*
$$\overline{m_n} - \overline{N}_n (p_n u^*, r) \cdot r > 0. \tag{30}$$
3) *Для операторів* T_n, T'_n *в кулі* $\overline{S}_n (p_n u^*, r)$ *вірні оцінки, обчислені в нормі простору* R_n:

$$\|T_n (p_n u^*)\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[r_n \left(\overline{K}(x_{in}, y) [u(y)]^m \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \overline{\eta}(n, u^*), \tag{31}$$

$$\left\|T_n'\left(p_n u\right)\right\| \leq \overline{M}_n + \overline{N}_n\left(p_n u^*, r\right) \cdot r = M_n\left(p_n u^*, r\right), \qquad (32)$$

$$\left\|T_n'\left(p_n u\right) p_n h\right\| \geq \left[\overline{m}_n - \overline{N}_n\left(p_n u^*, r\right) \cdot r\right] \left\|p_n h\right\| = \tilde{m}_n\left(p_n u^*, r\right) \left\|p_n h\right\|. \qquad (33)$$

4) Для будь-якого $r \in d(r)$ знайдеться спільне $n_o(r)$, що при $n \geq n_o(r)$ будуть виконуватися умови

$$\gamma\left(r\right) = \frac{\overline{\eta}\left(n, u^*\right) \overline{N}_n\left(p_n u^*, r\right)}{\tilde{m}_n^2\left(p_n u^*, r\right)} < 1, \qquad (34)$$

$$\frac{2 \cdot \overline{\eta}\left(n, u^*\right)}{\tilde{m}_n\left(p_n u^*, r\right)} \leq r. \qquad (35)$$

5) При всіх $n \geq n_o(r)$ система рівнянь (5) має в кулі $\overline{S}_n\left(p_n u^*, r\right)$ єдиний розв'язок $\overline{\xi}_n^*$, що відповідає розв'язку $u^*\left(x\right)$ рівняння (1), до якого, починаючи з $u^0 = \overline{\xi}_n^0 = p_n u^*$, монотонно і сильно збігається послідовність $\left\{\overline{\xi}_n^k\right\}$, побудована згідно (9) для системи (5), причому справедлива оцінка похибки

$$\left\|\overline{\xi}_n^* - \overline{\xi}_n^k\right\| \leq \frac{\overline{\eta}\left(n, u^*\right)}{\tilde{m}_n\left(p_n u^*, r\right)} \left[1 - \frac{\tilde{m}_n^2\left(p_n u^*, r\right)}{\overline{M}_n^2\left(p_n u^*, r\right)}\left(1 - \gamma\left(r\right)\right)\right]^{k/2}. \qquad (36)$$

6) Будь-яка послідовність розв'язків $\left\{\overline{\xi}_n^k\right\}$ збігається при $n \to \infty$ за нормою до елемента $p_n u^*$, причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$\left\|\overline{\xi}_n^* - p_n u^*\right\| \leq \frac{\overline{\eta}\left(n, u^*\right)}{\tilde{m}_n\left(p_n u^*, r\right)}. \qquad (37)$$

Доведення. Розглянемо рівняння (1) та систему (5) відповідно як операторні рівняння (8), (15) у просторах m_n та $C\left[0,1\right]$. Згідно (3), (4) оператори $\overline{T} : \overline{S}\left(u^*, r\right) \to C\left[0,1\right]$ та $\overline{T}_n : \overline{S}_n\left(p_n u^*, r\right) \to m_n$ є цілком неперервними на кулях $\overline{S}\left(u^*, r\right)$ і $\overline{S}_n\left(p_n u^*, r\right)$. Доведемо, що по відношенню до зв'язуючих відображень p_n, заданих згідно (6), послідовність операторів $\overline{T}_n$ компактно апроксимує оператор $\overline{T}$. Для цього перевіримо обидві умови означення 5.1 [4]: 1) дійсно, $\forall u \in \overline{S}\left(u^*, r\right)$, використовуючи твердження 8.1 [4], на основі компактності сім'ї $\left\{z_x\left(y\right) = \overline{K}\left(x, y\right) \cdot \left[u\left(y\right)\right]^m\right\}$, будемо мати:

$$1)\ \left\|p_n \overline{T} u - \overline{T}_n p_n u\right\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_0^1 \overline{K}\left(x_{in}, y\right) \cdot \left[u\left(y\right)\right]^m dy - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \overline{K}\left(x_{in}, y_{jn}\right) \cdot \left[u\left(y_{jn}\right)\right]^m \right| =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left| r_n\left(\overline{K}\left(x_{in}, y\right) \cdot \left[u\left(y\right)\right]^m\right)\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

2) для $\forall \overline{\xi}_n = \left(\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ldots, \xi_{nn}\right) \in \overline{S}_n\left(p_n u^*, r\right)$, згідно умов (2), (3), враховуючи, що $\sum_{j=1}^n \alpha_{jn} = \alpha = const$, на основі теореми Арцела послідовність

$w_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}\overline{K}(x,y_{jn})\cdot[\xi_{jn}]^m - f(x)$ компактна в $C[0,1]$ і $p_n w_n(x)=\overline{T}_n\overline{\xi}_n$.

Аналогічно покажемо [4], що послідовність операторів $\overline{T}_n{}'(p_n u^*)$ компактно апроксимує оператор $\overline{T'}(u^*)\in L(C[0,1],C[0,1])$. На основі компактності сім'ї функцій $\left\{\tilde{z}_x(y)=m\overline{K}(x,y)\cdot[u^*(y)]^{m-1}\right\}$ отримаємо

$$\left\|p_n\overline{T'}(u^*)-\overline{T}_n'(p_n u^*)\right\| = \max_{1\le i\le n}\left|m\int_0^1\overline{K}(x_{in},y)\cdot[u^*(y)]^{m-1}dy-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}\overline{K}(x_{in},y_{jn})\cdot[u^*(y_{jn})]^{m-1}\right| = m\cdot\max_{1\le i\le n}\left|r_n\left(\overline{K}(x_{in},y)\cdot[u^*(y)]^{m-1}\right)\right|\to 0$$

при $n\to\infty$. Послідовність $\tilde{w}_n(u^*(x))=m\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}\overline{K}(x,y_{jn})\cdot[u^*(y_{jn})]^{m-1}$ компактна в $C[0,1]$ і $p_n\tilde{w}_n(u^*(x))=\overline{T}_n{}'(p_n u^*)$.

Покажемо, що існує така область $d(r)=(0,r_0)$, що $\overline{m_n}-\overline{N}_n(p_n u^*,r)\cdot r>0$ для будь-якого $r\in d(r)$. Дійсно, перепишемо останню нерівність у вигляді $\overline{N}_n(p_n u^*,r)\cdot r-\overline{m_n}<0$. Функція $\overline{f}(r)=\overline{N}_n(p_n u^*,r)\cdot r-\overline{m_n}$ є зростаючою і $\overline{f}(r)<0$ при $r=0$. Тоді знайдеться таке $r_0\in(0,\infty)$, що $\overline{f}(r_0)=0$ і для будь-якого $r\in(0,r_0)=d(r)$ буде справедлива нерівність $\overline{f}(r)<0$.

Міркування при доведенні твердження 3 аналогічні проведеним в [1], тому в даній роботі не наводяться.

Так як для довільного $r\in(0,r_0)$ виконується нерівність (30), тоді з умови збіжності квадратурного процесу (умова 2), можна стверджувати, що існує таке $n_o(r)$, починаючи з якого (при $n\ge n_o(r)$) при всіх n система нерівностей (34), (35) буде сумісною, а це означає, що для оператора $T_n\overline{\xi}_n$ виконуються всі умови теореми 1, тобто система рівнянь (5) в кулі $\overline{S}_n(p_n u^*,r)$ має єдиний розв'язок $\overline{\xi}_n^*$, до якого, починаючи з $\overline{\xi}_n^0=p_n u^*$ збігається послідовність $\left\{\overline{\xi}_n^k\right\}$, побудована згідно (9) для системи (5) та справедливі оцінки (36), (37). З нерівності (37) випливає, що $\left\|\overline{\xi}_n^*-p_n u^*\right\|\to 0$ при $n\to\infty$, а це означає збіжність методу переходу від рівняння (1) до системи (5). Теорема доведена.

4. Існування і єдиність розв'язку рівняння (1)**.** Припустимо, що існує l точних ізольованих розв'язків $\xi_{1n}^*,\xi_{2n}^*,\dots,\xi_{ln}^*$ системи (5), які при деякому фіксованому $n\ge n_o$ всі вони можуть бути знайдені, наприклад за допомогою εs-алгоритму [5]. За цими розв'язками, згідно (4), можна побудувати відповідні аналітичні розв'язки u_{1n}^*, $u_{2n}^*,\dots,u_{ln}^*$. Наступна теорема дає розв'язання задачі знаходження для кожного v, $v(x)=u_{in}^*$ $(i=\overline{1,l})$ таких значень радіуса r, які б у кулі $\overline{S}(v,r)=\left\{u\in\overline{\Omega}:\|u-v\|\le r\right\}$ забезпечили виконання достатніх умов існування єдиного розв'язку рівняння (1) (теорема 1).

Теорема 3. *Нехай виконані умови:*

1) *функції* $\overline{K}(x,y)\cdot[u(y)]^m$ *та* $f(x)$ *належать простору* $C_\chi\left[\overline{\Omega}\right]$, $\chi\ge 3$, $C_\chi\left[\overline{\Omega}\right]\subset L_2[0,1]$;
2) *при кожному фіксованому* $n\ge n_o$ *система рівнянь* (5) *має розв'язок* $\overline{\xi}_n^*$, *а відповідний йому аналітичний розв'язок* $v=u_n^*(x)$ *має вигляд* (4).

Тоді справедливі наступні твердження:

1) норма нев'язки наближеного розв'язку v інтегрального рівняння (1) задовольняє нерівність

$$\|Tv\| \leq \|r_n (v (y))\| \leq b_s \cdot Q^{(s)}, \tag{38}$$

де b_s — множник, незалежний від функції $\overline{K}(x, y) \cdot [v(y)]^m$, свій для кожної квадратурної формули, а $Q^{(s)}$ задовольняє нерівність

$$\max_{0 \leq x,y \leq 1} \left| \frac{d^s}{dy^s} \left[\overline{K}(x, y) \cdot [v(y)]^m\right] \right| \leq Q^{(s)}; \tag{39}$$

2) для будь-якого $u \in \overline{S}(v, r)$ вірні оцінки, обчислені в нормі простору $L_2 [0, 1]$

$$\|T' (u)\| \leq \overline{M} + N (\|v\| , r) \cdot r = M (v, r), \tag{40}$$

де

$$\|T' (u) h\| \geq [\overline{m} - N (\|v\| , r) \cdot r], \ \|h\| = m (v, r) \|h\|, \tag{41}$$

а константа $\tilde{\theta}$ визначається із нерівності

$$\left\{\int_0^1 \left[v^2 (y)\right]^{m-2} dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{\theta} \ \left(\int_0^1 v^2(y)dy\right)^{\frac{m-2}{2}};$$

$$\|T'' (u)\| \leq \overline{N} (\|v\| , r), \tag{42}$$

де

$$\overline{N} (\|v\| , r) = m(m - 1) \left\|\overline{K}(x, y)\right\| \cdot$$
$$\cdot\tilde{\theta} \left(r^{m-2} + \sum_{i=1}^{m-3} \frac{(m - 1 - i) \dots (m - 2)}{i!} \|v\|^i r^{m-2-i} + \|v\|^{m-2}\right), \tag{43}$$

$$\overline{M} = \begin{cases} (1 + m^2 M_1^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо} \quad \overline{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} \geq 0, \\ (1 + 2mM_1 + m^2 M_1^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо} \quad \overline{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} < 0, \end{cases} \tag{44}$$

$$\overline{m}_n = \begin{cases} |1 - mM_1|, & \text{якщо} \ \overline{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} > 0, \quad M_1 \neq \frac{1}{m} \\ 1, & \text{якщо} \ \overline{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} \leq 0, \end{cases} \tag{45}$$

$$M_1 = \left\|\overline{K}^2(x, y) [v(y)]^{2(m-1)}\right\|; \tag{46}$$

3) скалярне рівняння $\overline{m} - \overline{N} (\|v\| , r) \cdot r = 0$ має принаймні один додатній розв'язок $\overline{R}$, при кожному фіксованому $n \geq \overline{n}_0$;

4) існує таке $\overline{n}_0 \geq n_0$, що при $n \geq \overline{n}_0$ кожному розв'язку v рівняння (3) буде відповідати свій інтервал $(r_1, r_2) \subset [0, \infty)$ зміни радіуса r кулі $\overline{S}(v, r)$. На цьому інтервалі буде сумісна система нерівностей (12), (13) в якій $\eta = r_n (v)$, а функції $m (v, r)$ та $\overline{N} (\|v\| , r)$ мають вигляд (43) та (45) відповідно;

5) рівняння (1) має у кулі $\overline{S}(v, r)$, де $r \in (r_1, r_2)$ єдиний розв'язок $u^* (x)$, що відповідає даному $v (x)$, до якого, починаючи з $u^0 (x) = v (x)$, при $k \to \infty$ збігається послідовність $\left\{u^k (x)\right\}$, побудована згідно (9) для оператора T, причому справедлива нерівність

$$\left\|u^* (x) - u^k (x)\right\| \leq \frac{b_s \cdot Q^{(s)}}{m (v, r)} \left[1 - \frac{m^2 (v, r)}{M^2 (v, r)} (1 - \gamma (r))\right]^{k/2}; \tag{47}$$

б) апостеріорна оцінка похибки, що характеризує близькість розв'язків $u^*(x)$ *та* $v(x)$ *відповідно рівнянь* (1) *та* (3) *визначається нерівністю*

$$\|u^*(x) - v(x)\| \le \frac{b_s \cdot Q^{(s)}}{m(v,r)}. \tag{48}$$

Доведення. Оскільки $v = u_n^*(x)$ є точним розв'язком рівняння (3), то $T_n v(x) = 0$. Звідси, враховуючи вигляд оператора T і збіжність квадратурного процесу (2), застосовуючи оцінку залишкового члена, наведену в [5], одержимо:

$$\|Tv\| \le \|Tv - T_n v\| + \|T_n v\| = \left\| \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^m \, dy - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \overline{K}(x, y_{jn}) \cdot [v(y_{jn})]^m \right\| =$$

$$= \|r_n(v(y))\| \le b_s \cdot Q^{(s)}.$$

Доведемо, що для операторів $T'(u)$, $T''(u)$ в кулі $\overline{S}(v,r)$ виконуються оцінки (42)-(44). Використовуючи нерівність трикутника, формулу Лагранжа та враховуючи, що $u \in \overline{S}(v,r)$, згідно нерівності (44), де $\overline{N}(\|v\|, r)$ має вигляд (45), та оцінки $\|T'(v)\| \le \overline{M}$, де $\overline{M}$, визначена згідно (46), справедливість яких доведена в [2], отримаємо:

$$\|T'(u)\| \le \|T'(v)\| + \|T'(u) - T'(v)\| \le$$

$$\le \overline{M} + \left\| \int_0^1 T''(v + \tau(u - v)) \, d\tau \cdot (u - v) \right\| \le \overline{M} + N(\|v\|, r) \cdot r = M(\|v\|, r).$$

Знайдемо значення $\overline{m}$, для якого виконується нерівність $\|T'(v)h\| \ge \overline{m}\ \|h\|$. Нехай $\overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} \le 0$. Тоді

$$\|T'(v)h\| = \left\| h(x) - m \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\| \ge \|h(y)\|.$$

Нехай $\overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} > 0$. Відомо, що

$$\left\| h(x) - m \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\| \ge$$

$$\ge \left| \|h\| - \left\| m \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\| \right| \ge \overline{m}\, \|h\|.$$

Запишемо останню нерівність у вигляді двох еквівалентних нерівностей:

$$\begin{aligned} \|h\| - m \left\| \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\| &\ge \overline{m} \cdot \|h\| \\ \|h\| - m \left\| \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\| &\le -\overline{m} \cdot \|h\| \end{aligned} \tag{49}$$

Використовуючи формулу Коші-Буняковського та позначення (48), будемо мати:

$$\left\| \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right)^2 dx \le$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \overline{K}^2(x,y) \cdot [v(y)]^{2(m-1)} dydx \|h\|^2 = \left\| \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{(m-1)} \right\|^2 \cdot \|h\|^2 = M_1^2 \|h\|^2. \quad (50)$$

Якщо $M_1 < \frac{1}{m}$, тоді

$$(1 - mM_1) \ \ \|h\| \, \|h\| - m \left\| \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\| \geq$$

$$\geq \|h\| - m \left\| \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} \right\| \cdot \|h\| = (1 - mM_1) \ \ \|h\|,$$

тобто перша з нерівностей (49) виконується при $\overline{m} = 1 - mM_1$.

Розглянемо другу з нерівностей (49), яку запишемо у вигляді

$$(1 + \overline{m}) \ \ \|h\| \leq m \left\| \int_0^1 \overline{K}(x,y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) \, dy \right\|,$$

та застосуємо оцінку (50). Будемо мати: $(1 + \overline{m}) \ \ \|h\| \leq mM_1 \|h\|$, тобто друга з нерівностей (49) виконується при $\overline{m} \leq mM_1 - 1$, якщо $M_1 > \frac{1}{m}$. Звідси випливає, що $\overline{m} = |1 - mM_1|$. Тоді, згідно нерівності трикутника, враховуючи що

$$\|T'(v) - T'(u)\| \leq \left\| \int_0^1 T''(v + \tau(u - v)) \, d\tau \cdot (u - v) \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \|T''(v + \tau(u - v))\| \, d\tau \cdot \|u - v\| \leq N(\|v\|, r) \cdot r,$$

отримаємо

$$\|T'(u)h\| \geq \|T'(v)h\| - \|(T'(v) - T'(u))h\| \geq \overline{m}\|h\| - \|T'(v) - T'(u)\| \, \|h\| \geq$$

$$\geq [\overline{m} - N(\|v\|, r) \cdot r] \ \ \|h\|.$$

Доведемо справедливість твердження 3. Позначимо $\tilde{f}(r) = \overline{N}(\|v\|, r) \cdot r - \overline{m}$. Враховуючи вигляд функції $\overline{N}(\|v\|, r)$, $\tilde{f}(r)$ — зростаюча (при $r > 0$), причому $\tilde{f}(r) < 0$ при $r = 0$. Тому знайдеться таке $\overline{R} > 0$, що $\tilde{f}\left(\overline{R}\right) = 0$, тобто $\overline{R}$ є коренем рівняння $\overline{m} - \overline{N}(\|v\|, r) \cdot r = 0$.

Для доведення тверджень 4-6 відмітимо, що кожному фіксованому $n \geq \overline{n}_0$ буде відповідати своя множина розв'язків $v(x) = u_{in}^*(x)$, $i = \overline{1, l}$. Для кожного такого $n \geq \overline{n}_0$ і відповідного йому розв'язку $v(x)$ існує свій інтервал сумісності системи нерівностей (12), (13). Це випливає із збіжності квадратурного процесу ($r_n(v) \to 0$ при $n \to \infty$), а функції $m(v, r)$ та $\overline{N}(\|v\|, r)$ залежать від r. Отже, знайдуться такі фіксовані $n \geq \overline{n}_0$ і відповідні їм $v(x)$, що існує інтервал (r_1, r_2) і для всіх $r \in (r_1, r_2)$ буде виконуватися система нерівностей (12), (13), а значення r_1 та r_2 визначаються шляхом розв'язання вказаної системи. Звідси випливає, що в кулі $\overline{S}(v, r)$, де $r \in (r_1, r_2)$ виконані всі умови теореми 1, що означає існування єдиного розв'язку $u^*(x) \in \overline{S}(v, r)$ рівняння (1), збіжність послідовності $\left\{u^k(x)\right\}$, побудованої згідно (9) та справедливість апостеріорних оцінок (49), (50). Теорема доведена.

5. Висновки. В даній роботі наведено спосіб побудови аналітичних розв'язків нелінійного інтегрального рівняння зі степеневою нелінійністю та знаходження області єдиності кожного розв'язку. Цими областями є замкнені кулі, центрами яких і є точні чи наближені розв'язки апроксимаційних рівнянь, а радіуси знаходять, використовуючи достатні умови теореми існування і єдиності розв'язку та збіжності ітераційного методу мінімальних похибок.

Список використаної літератури

1. Бабич М. Д. Про відокремлення ізольованих розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь. *Український математичний журнал*, 1996. Т. 48, № 8. С. 1011—1020.
2. Мамай Л. М. Про наближене розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 2008. Вип. 17. С. 116–131.
3. Фридман В. М. Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения. *Доклады Академии наук СССР*, 1961. Т. 139, № 5. С. 1063-1066.
4. Вайникко Г. М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту: Изд-во ТГУ, 1970. 192 с.
5. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений. *Кибернетика*, 1982. № 2. С. 74—79.
6. Волков Е. А. О поиске решений нелинейного интегрального уравнения. *Труды Математического института Академии наук СССР*, 1976. Т. 142. С. 101—121.

Mamay L. M. About the construction of approximate isolated solutions of nonlinear integral equations with power nonlinearity.

This paper is devoted to questions of the global approximate solving of nonlinear integral equations with nonlinear degree. The elements of general theory of the approximate methods for the class of the nonlinear integral equations (NIE) with nonlinear degree were applied. To designing sequence of approximated equations a quadrature formula was used. Direct and return theorems were formulated and proved for this class of NIE, which reflect interrelation between exact and sequence of approximated equations in sense of existence of solution and their conformity.

Keywords: nonlinear integral equations, isolated solutions, an error, quadrature formula.

References

1. Babych, M. D. (1996). Pro vidokremlennya izolovanyh rozvyazkiv nelinijnyh integralnyh rivnyan [On the separation of isolated solutions of nonlinear integral equations]. *Ukrainian Mathematical Journal, 48*(8), 1011–1020 [in Ukranian].
2. Mamay, L. M. (2008). Pro nablyzhene rozvyazuvannya nelinijnyh integralnyh rivnyan zi stepenevoju nelinijnistju [On the approximate solution of nonlinear integral equations with power nonlinearity]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics, 17*, 116–131 [in Ukranian].
3. Fridman, V. M. (1961). Iterativnyj proces s minimalnymi oshybkami dlya nelinejnogo operatornogo uravneniya [An iterative process with minimal errors for a nonlinear operator equation]. *Reports of the USSR Academy of Sciences, 139*(5), 1063–1066 [in Russian].
4. Vajnikko, G. M. (1970). Kompaktnaja aproksimatsiya operatorov i priblizhonnoe reshenie uravnenij [Compact approximation of operators and approximate solution of equations]. Tartu: TGU [in Russian].
5. Babych, M. D., & Shevchuk, L. B. (1982). Ob odnom algoritme priblizhonnogo resheniya sistem nelinejnyh uravnenij [On an algorithm for the approximate solution of systems of nonlinear equations]. *Kibernetika, 2*, 74-79 [in Russian].
6. Volkov, E. A. (1976). O poiske resenij nelinejnogo integralnogo uravneniya [On the search for solutions of a nonlinear integral equation]. *Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences, 142*, 101-121 [in Russian].

Одержано 30.10.2021