УДК 512.815
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).81-90

А. О. Рамський[1], Н. М. Самарук[2], О. А. Поплавська[3]

[1] Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
ramsky@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9624-5018

[2] Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат педагогічних наук, доцент
samaruk_nm@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4611-8528

[3] Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
helen.poplavskaya@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6920-1842

КРАТНОСТІ ВАГ НЕЗВІДНИХ ЗОБРАЖЕНЬ АЛГЕБРИ ЛІ SL_3

В даній статті для комплексної алгебри Лі sl_3 запропонована явна формула знаходження кратності ваги незвідного зображення Γ_λ, яке визначається старшою вагою $\lambda = (a, b)$. Множина всіх ваг Λ такого зображення утворює групове кільце $\mathbb{Z}[\Lambda]$ з мультиплікативним базисом $\boldsymbol{e}(\mu), \mu \in \Lambda$. Характер зображення $\mathrm{Char}\,\Gamma_\lambda$ є елементом $\mathbb{Z}[\Lambda]$, коефіцієнти якого і є шуканими кратностями. Головна ідея обчислень полягає у специфікації базису $\boldsymbol{e}(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2}$ групового кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$. Це дало можливість представити характер $\mathrm{Char}\,\Gamma_{a,b}$ незвідного $\Gamma_{a,b}$ зображення як многочлен Шура $s_{a,b}\left(x, \dfrac{y}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ від двох змінних x, y . Як наслідок ми виразити коефіцієнти цього многочлена через прості функції, які легко обчислюються за лінійний час. Ключову роль в обчисленні зіграли знайдені явно коефіцієнти розкладу ряду

$$\Delta = \frac{1}{(y^2 - x)\,(1 - yx)\,(y - x^2)},$$

в термінах функції

$$c(n,k) = \begin{cases} \min(n{-}k+2, k), 1 \le k \le n+1, \\ \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Ключові слова: алгебри Лі, незвідні зображення, характери, кратності, формула Вейля, многочлени Шура.

1. Вступ. Однією із важливих задач теорії зображень класичних алгебр Лі є знаходження кратностей ваг які зустрічаються у їхніх незвідних зображеннях. Існує кілька обчислювальних формул для розв'язання цієї задачі.Класичними є формули Фрейденталя [1], Костанта [1], Рака [3], Климика [4]. Всі ці формули є наслідком відомої формули Вейля для характерів, див. [5]. Теоретично, використовуючи формулу Вейля можна обчислити кратності довільного незвідного зображення. Проте практичне використання цих формул є досить незручним, оскільки всі вони є рекурентними, тобто визначають лише алгоритм обчислення кратностей. Крім того вони використовують, або сумування по групі Вейля, або сумування по діаграмам Юнга, що стає обчислювально складною задачею при зростанні розмірностей алгебр і їхніх зображень. В зв'язку з цим великий інтерес викликають роботи, які пропонують більш ефективні алгоритми обчислення кратностей. Серед таких робіт варто відмітити статтю Муді і Патери [6] та роботи [7]- [9]. Проте в цих роботах не знайдено формул для кратностей у замкнутому вигляді. Явні формули кратностей деяких зображень, які мають старші ваги простої структури знайдено в [10], але вони мають складний комбінаторний вигляд.

В даній статті для комплексної алгебри Лі sl_3 авторами запропонована явна формула знаходження кратності ваги його незвідного зображення. Головна ідея обчислень полягає у специфікації базису групового кільця ваг зображення, що дало можливість представлення характеру зображення як многочлена Шура. Це дозволило виразити коефіцієнти цього многочлена через прості функції, які швидко обчислюються за лінійний час.

2. Ваги та характери незвідного зображення алгебри Лі sl_3. Розглянемо напівпросту комплексну скіченновимірну алгебру Лі L з картанівською підалгеброю h і нехай $\Lambda \subset h^*$ – решітка всіх цілочисельних функцій на h, тобто множина власних значень відносно дії картанівської підалгебри на всіх зображеннях L. Множина Λ утворює абелеву групу і нехай $\mathbb{Z}[\Lambda]$ ціле групове кільце цієї групи. Базисний елемент $\mathbb{Z}[\Lambda]$, який відповідає вазі $\lambda \in \Lambda$ ми позначимо формальним символом $\boldsymbol{e}(\lambda)$. Зокрема, $\boldsymbol{e}(\lambda)\boldsymbol{e}(\mu) = \boldsymbol{e}(\lambda+\mu)$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$. Таке окреме позначення потрібне для того, щоб відрізнити вагу λ як елемента множини ваг Λ і вагу λ як елемента групового кільця $\mathbb{Z}[\Lambda]$.

Нехай W – зображення алгебри L і Λ_W множина ваг цього зображення. Оскільки алгебра L напівпроста, то векторний простір W розкладається в пряму суму вагових підпросторів $W(\lambda)$:

$$W = \sum_{\lambda \in \Lambda_W} n_\lambda W(\lambda),$$

тут n_λ – кратність ваги λ. *Формальним характером* $\mathrm{Char}(W)$ зображення W скінченновимірної алгебри Лі L називається сума

$$\mathrm{Char}(W) = \sum_{\lambda \in \Lambda_W} n_\lambda \boldsymbol{e}(\lambda).$$

Характер зображення W є елементом групового кільця $\mathbb{Z}[\Lambda]$.

Надалі ми будемо працювати із комплексною алгеброю Лі sl_3, яка реалізується як матрична алгебра, що породжується 3×3 матрицями з нульовим слідом. Позначимо через $E_{k,i}$ 3×3-матрицю, яка має одиницю в k-тому рядку та i-му стовпчику і нуль у всіх інших місцях. Тоді

$$h = \{s_1 E_{1,1} + s_2 E_{2,2} + s_3 E_{3,3} \mid s_1 + s_2 + s_3 = 0, s_i \in \mathbb{C}\},$$

– картанівська підалгебра алгебри sl_3. Визначимо $L_i \in h^*$ як $L_i(E_{j,j}) = \delta_{i,j}$. Нехай $\phi_1 = L_1, \phi_2 = L_1 + L_2$ – фундаментальні ваги відносно h. Додатні корені мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= L_1 - L_2 = 2\phi_1 - \phi_2 = (2, -1),\\
\alpha_2 &:= L_2 - L_3 = -\phi_1 + 2\phi_2 = (-1, 2),\\
\alpha_3 &:= L_1 - L_3 = \phi_1 + \phi_2 = (1, 1).
\end{aligned}$$

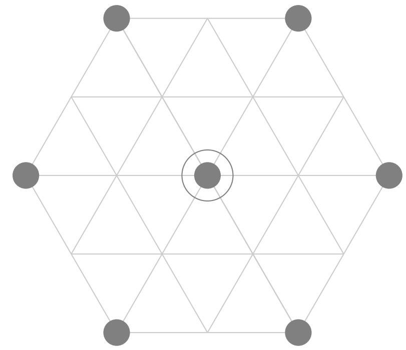

Рис. 1. Вагова діаграма зображення $\Gamma_{1,1}$.

Добре відомо, див. [5], що множина ваг довільного незвідного зображення напівпростої алгебри Лі є впорядкованою множиною і максимальні елементи відносно цього впорядкування (старші ваги) з точністю до ізоморфізму визначають це зображення. Незвідне зображення з старшою вагою $\lambda = (a, b)$ позначимо через $\Gamma_\lambda = \Gamma_{(a,b)}$, а множину його ваг позначимо через $\Lambda_{a,b}$.

Ваги з $\Lambda_{(a,b)}, a \geq b$ можна зобразити на площині як послідовність вкладених опуклих шестикутників (трикутників для $b = 0$), які при $a \neq b$ вироджуються у трикутник, а при $a = b$ вироджуються точку, див. [11], [5]. На кожній із сторін найбільшого зовнішнього шестикутника розміщено почергово a та b ваг. Кратності всіх ваг найпершого зовнішнього шестикутника рівні одиниці, а потім кратності поступово збільшуються на одиницю на кожному наступному концентричному шестикутнику. Для прикладу, якщо $a = b$, то вагова діаграма має вигляд концентричних рівносторонніх шестикутників, які вироджуються в точку, що відповідає вазі $(0, 0)$. Кратність всіх ваг найбільшого зовнішнього шестикутника, на кожній із сторін якого розміщено рівно a ваг, дорівнює 1, а кратність ваги $(0, 0)$ рівна $a + 1$. Якщо a, або b рівні нулю, то вагова діаграма утворює трикутник і тоді кратність кожної ваги рівна одиниці.

Всі ваги з Γ_λ отримуються із старшої ваги λ віднімаючи від неї лінійні комбінації коренів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ з додатними коефіцієнтами так, щоб отримані ваги залишалися в шестикутнику (чи трикутнику) вагової діаграми. Наприклад, для старшої ваги $\lambda = (1, 1)$ маємо

$$\begin{aligned}
&\lambda - \alpha_3 = (0, 0),\\
&\lambda - 2\alpha_3 = (-1, -1),\\
&\lambda - \alpha_1 = (-1, 2),\\
&\lambda - \alpha_3 - \alpha_1 = (-2, 1),\\
&\lambda - \alpha_2 = (2, -1),\\
&\lambda - \alpha_3 = (1, -2).
\end{aligned}$$

Отже, $\Lambda_{(1,1)} = \{(1, 1), (-1, 2), (1, -2), (0, 0), (-2, 1), (2, -1), (-1, -1)\}$, причому кратності всіх ваг рівні одиниці, крім нульової ваги, для якої кратність рівна двійці. Вагова діаграма $\Lambda_{(1,1)}$ показана на Рис. 1. Аналогічно для старшої ваги $\lambda = (2, 1)$

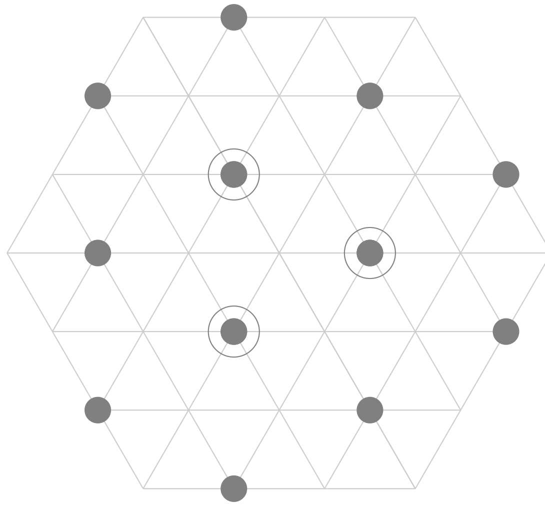

Рис. 2. Вагова діаграма зображення $\Gamma_{2,1}$.

маємо

$$\Lambda_{(2,1)} = \{(2,1),(3,-1),(0,2),(1,0),(2,-2),(-2,3),(-1,1),(0,-1),(1,-3),\\ (-3,2),(-2,0),(-1,-2)\},$$

кратності всіх ваг рівні 1 крім ваг $((1,0),(-1,1),(0,-1)$, кратності яких дорівнюють 2. Вагова діаграма для $\Lambda_{(2,1)}$ показана на Рис. 2. Зовнішні чорні точки утворюють шестикутник довжини сторін якого рівні 2 і 1, тобто такі ж, як і координати старшої ваги $\lambda = (2,1)$.

3. Обчислення кратності ваг. Розглянемо таку спеціалізацію базису групового кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$:

$$\boldsymbol{e}(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2},$$

для $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ і формальних змінних x, y. В цих позначеннях характер буде раціональним виразом від двох змінних x, y. Явний вигляд цього виразу в термінах симетричних многочленів Шура дає формула Вейля для характерів, див. [11, стор. 400]. З формули Вейля випливає, що спеціалізований характер незвідного зображення алгебри sl_3 із старшою вагою $\lambda = (a,b)$ має вигляд

$$\operatorname{Char}\Gamma_{a,b} = s_{a,b}\left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

де

$$s_{a,b}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\begin{vmatrix} {x_1}^{a+b+2} & {x_2}^{a+b+2} & {x_3}^{a+b+2} \\ {x_1}^{b+1} & {x_2}^{b+1} & {x_3}^{b+1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}},$$

є многочленом Шура, який відповідає розбиттю (a,b).

Для прикладу, знаходимо, що

$$\operatorname{Char}\Gamma_{1,0} = x + \frac{y}{x} + \frac{1}{y},$$
$$\operatorname{Char}\Gamma_{1,1} = 2 + \frac{x^2}{y} + xy + \frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{y}{x^2},$$
$$\operatorname{Char}\Gamma_{1,2} = xy^2 + x^2 + \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{x} + 2\,y + 2\,\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{x^2} + 2\,x^{-1} + y^{-2} + \frac{y}{x^3} + \frac{1}{yx^2}.$$

Позначимо через $n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)$ кратність ваги $\mu = (\mu_1,\mu_2)$ в зображенні $\Gamma_{a,b}$.

З прикладу вище, маємо для $\Gamma_{1,1}$, що $n_{1,1}(0,0) = 2$, а всі кратності $n_{1,1}(1,1)$, $n_{1,1}(-1,2)$, $n_{1,1}(1,1)$, $n_{1,-2}(-2,1)$, $n_{1,1}(2,-1)$, $n_{1,1}(-1,-1)$ рівні 1.

За означенням характеру кратність $n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)$ дорівнює коефіцієнту біля $x^{\mu_1}y^{\mu_2}$ в характері $\Gamma_{a,b}$. Позначимо цей факт так

$$n_{a,b}(\mu_1,\mu_2) = [x^{\mu_1}y^{\mu_2}]\operatorname{Char}\Gamma_{a,b},$$

тут символ $[x^n y^m]f(x,y)$ позначає коефіцієнт біля $x^n y^m$ у виразі $f(x,y)$.

Домножимо характер на $(xy)^{a+b}$ для того щоб уникнути негативних степенів. Тоді, очевидно

$$n_{a,b}(\mu_1,\mu_2) = [x^{a+b+\mu_1}y^{a+b+\mu_2}](xy)^{a+b}\operatorname{Char}\Gamma_{a,b}.$$

Має місце наступне твердження, яка отримується із виразу для характеру після обчислення многочлену Шура:

Лема 1.

$$(xy)^{a+b}\operatorname{Char}\Gamma_{a,b} =$$

$$= \frac{y^{b+1}x^{a+1} - y^{a+2\,b+3}x^{2\,a+b+3} + y^{a+1}x^{2\,a+2\,b+4} + y^{2\,a+2\,b+4}x^{b+1} - x^{a+2\,b+3} - y^{2\,a+b+3}}{(x-y^2)\,(1-yx)\,(x^2-y)}.$$

Зауважимо, що всі степені у правій частині, після спрощень, будуть додатними цілими числами, тобто вираз $(xy)^{a+b}\operatorname{Char}\Gamma_{a,b}$ вже буде многочленом від двох змінних над $\mathbb{Z}$, а його коефіцієнти будуть шуканими кратностями. Для знаходження явного виразу для цих кратностей виконаємо деякі попередні обчислення.

Покладемо

$$N_{a,b} := y^{b+1}x^{a+1} - y^{a+2\,b+3}x^{2\,a+b+3} + y^{a+1}x^{2\,a+2\,b+4} + y^{2\,a+2\,b+4}x^{b+1} - x^{a+2\,b+3} - y^{2\,a+b+3},$$

і

$$\Delta = \frac{1}{(y^2-x)\,(1-yx)\,(y-x^2)}.$$

Для ряду Δ можна отримати явний вираз:

Лема 2. *Коефіцієнт біля x^n в розкладі Δ в формальний степеневий ряд обчислюєтъся за формулою*

$$[x^n]\Delta = -\sum_{i=1}^{n+1} c(n,i) y^{n-3(n+2-i)},$$

де

$$c(n,k) = \begin{cases} \min(n-k+2,k), 1 \le k \le n+1, \\ \\ 0, \text{ в іншому випадку}, \end{cases}$$

і $\delta_{i,j}$ *– функція Кронекера.*

Доведення. Розкладемо кожен із співмножників в ряд :

$$\frac{1}{y-x^2} = \frac{1}{y}\frac{1}{1-\frac{x^2}{y}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{y^{k+1}},$$
$$\frac{1}{y^2-x} = \frac{1}{y^2}\frac{1}{1-\frac{x}{y^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{y^{k+2}},$$
$$\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k.$$

Тоді

$$\Delta = \frac{1}{(y^2-x)(1-yx)(y-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{y^{k+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{y^{k+2}}\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k.$$

Перемножимо перші два з них і виділимо коефіцієнти біля степенів x :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{y^{k+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{y^{k+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{y^{k+1}}\frac{1}{y^{2(n-2k)+2}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{y^{2n-3k+3}}\right)x^n.$$

Домножимо на третій ряд і знову виділимо коефіцієнти біля степенів x :

$$\Delta = \frac{1}{y-x^2}\frac{1}{y^2-x}\frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor i/2\rfloor}\frac{1}{y^{2i-3k+3}}y^{n-i}\right)x^n.$$

Отже

$$[x^n]\Delta = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor i/2\rfloor}\frac{1}{y^{2i-3k+3}}y^{n-i} = y^{n-3}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor i/2\rfloor}\frac{1}{y^{3i-3k}}.$$

Отриману подвійну суму, оскільки в ній зустрічаються однакові степені y, можна звести до одинарної

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor i/2\rfloor}\frac{1}{y^{3i-3k}} = \sum_{t=0}^{n}\frac{\alpha(n,t)}{y^{3t}}.$$

Тут $\alpha(n,t)$ ціле число яке показує скільки раз степінь y^{-3t} входить в подвійну суму.

Для фіксованого t число $\alpha(n,t)$ дорівнює кількості пар (i,k) таких що $t = i-k$ при таких обмеженнях на $i,k : 0 \le i \le n$, $0 \le k \le i/2$. Оскільки $k = i-t$ ми маємо $0 \le i-t \le i/2$, і, після спрощень, отримаємо такі обмеження на $i : i/2 \le t \le i \le n$. Для кожного i, яке задовольняє ці умови, пара $(i, i-t)$ задовольняє потрібну умову. Порахуємо, скільки існує чисел i, які задовольняють умову $i/2 \le t \le i \le n$ при фіксованому t. Легко бачити, що коли $t \ge n/2$, то довільне i для якого $t \le i \le n$ задовільняє умову, отже таких їх буде $n-t+1$. У випадку $t < n/2$, підходить довільне i, для якого виконується, $i/2 \le t \le i$ звідки $t \le i \le 2t$. Отже ми маємо $t+1$ таких значень i. Враховуючи

$$\min(t+1, n-t+1) = \begin{cases} n-t+1, \text{ для } t \ge n/2 \\ t+1, \text{ для } t < n/2 \end{cases},$$

в результаті отримаємо, що кількість таких пар рівна $\min(t+1, n-t+1)$, тобто

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{1}{y^{3i-3k}} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\min(n-t+1, t+1)}{y^{3t}}$$

Підставивши отриману суму у вираз для Δ, після зміни індексу сумування, отримаємо необхідний результат.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Кратність ваги (μ_1, μ_2) в зображенні $\Gamma_{a,b}$ обчислюється за формулою*

$$n_{a,b}(\mu_1, \mu_2) = c\left(a+b+\mu_1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right) - \\ - c\left(b+\mu_1-1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right) - c\left(a+\mu_1-1, \frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right).$$

Доведення.

Позначимо

$$n_a(\mu_1) := [x^{a+b+\mu_1}]\left((xy)^{a+b}\,\mathrm{Char}\,\Gamma_{a,b}\right).$$

Тоді, враховуючи, що

$$[x^n]N_{a,b} = \delta_{n,a+1}\,y^{b+1} + \delta_{n,b+1}\,y^{2a+2b+4} - \delta_{n,0}\,y^{2\,a+b+3} + \\ - \delta_{n,2\,a+b+3}y^{a+2\,b+3} + \delta_{n,2\,a+2\,b+4}y^{a+1} - \delta_{n,a+2\,b+3},$$

маємо

$$n_a(\mu_1) = \sum_{i=0}^{a+b+\mu_1} \left([x^i]\,\Delta\right)\left([x^{a+b+\mu_1-i}]\,N_{a,b}\right) = \\ = \left([x^{b+\mu_1-1}]\Delta\right)y^{b+1} + \left([x^{a+\mu_1-1}]\Delta\right)y^{2a+2b+4} - \\ - \left([x^{a+b+\mu_1}]\Delta\right)y^{2\,a+b+3} - \left([x^{\mu_1-a-3}]\Delta\right)y^{a+2\,b+3} + \left([x^{\mu_1-a-b-4}]\Delta\right)y^{a+1} - \left([x^{\mu_1-b-3}]\Delta\right).$$

Оскільки $|\mu_1| \leq a+b$ тоді $\mu_1-a-b-4<0$. Отже $[x^{\mu_1-a-b-4}]\Delta = 0$.

Ми маємо

$$([x^{b+\mu_1-1}]\Delta)\, y^{b+1} = -\sum_{i=1}^{b+\mu_1} c(b+\mu_1-1, i) y^{3(i-1)-b-2\mu_1}.$$

Звідси випливає

$$[y^{a+b+\mu_2}]\left([x^{b+\mu_1-1}]\Delta\right)\, y^{b+1} = -\delta_{a+b+\mu_2, 3(i-1)-b-2\mu_1} c(b+\mu_1-1, i) = \\ = -c\left(b+\mu_1-1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right).$$

Аналогічно,

$$[y^{a+b+\mu_2}]\left([x^{a+\mu_1-1}]\Delta\right)\, y^{2a+2b+4} = -c\left(a+\mu_1-1, \frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right),$$

$$[y^{a+b+\mu_2}]\left(-[x^{a+b+\mu_1}]\Delta\right)\, y^{2\,a+b+3} = c\left(a+b+\mu_1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right),$$

$$[y^{a+b+\mu_2}]\left(-[x^{\mu_1-a-3}]\Delta\right)\, y^{a+2\,b+3} = c\left(\mu_1-a-3, \frac{2\mu_1+\mu_2-(2a+b)}{3}-1\right),$$

і

$$[y^{a+b+\mu_2}]\left(-[x^{\mu_1-b-3}]\Delta\right) = c\left(\mu_1-b-3, \frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right).$$

Оскільки, $n_{a,b}(\mu_1,\mu_2) = [y^{a+b+\mu_2)}]n_a(\mu_1)$ то ми отримаємо

$$n_{a,b}(\mu_1,\mu_2) = c\left(a+b+\mu_1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right) - \\ -c\left(b+\mu_1-1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right) - c\left(a+\mu_1-1, \frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right) + \\ +c\left(\mu_1-a-3, \frac{2\mu_1+\mu_2-(2a+b)}{3}-1\right) + c\left(\mu_1-b-3, \frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right).$$

Доведемо, що дві останні формули тотожно рівні нулю. Справді, для першої тотожності з властивостей вагової діаграми зображення $\Gamma_{a,b}$, ми маємо, що другий аргумент

$$\frac{2\mu_1+\mu_2-(2a+b)}{3}-1 \leq 0.$$

Але $c(n,k)=0$, якщо $k<0$.

Для другої тотожності покажемо що другий аргумент є більшим ніж перший. З властивостей вагової діаграми для різниці аргументів, ми маємо,

$$\frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3} - (\mu_1-b-3) = \frac{a+2b+\mu_2-\mu_1}{3}+3 > 0.$$

Але $c(n,k)=0$ якщо $n<k$. Отже, ми можемо ігнорувати останні два вирази. Теорему доведено.

Таким чином ми можемо записати характер у явному вигляді:

$$\operatorname{Char}\Gamma_{a,b} = \frac{1}{x^a y^b}\sum_{\mu\in\Lambda} c\left(a+b+\mu_1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right) -$$
$$-c\left(b+\mu_1-1, \frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right) - c\left(a+\mu_1-1, \frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right) x^{\mu_1} y^{\mu_2}.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі для комплексної алгебри Лі sl_3 запропонована явна формула знаходження кратності ваги незвідного зображення $\Gamma_{a,b}$, яке визначається старшою вагою $\lambda = (a, b)$. Головна ідея обчислень полягає у наступній специфікації базису $\boldsymbol{e}(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2}$ групового кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$. Це дало можливість представити характер $\operatorname{Char}\Gamma_{a,b}$ незвідного $\Gamma_{a,b}$ зображення як многочлен Шура $s_{a,b}\left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y}\right)$ від двох змінних x, y . Ключову роль в обчисленні зіграли знайдені явно коефіцієнти розкладу ряду

$$\Delta = \frac{1}{(y^2-x)(1-yx)(y-x^2)},$$

в термінах функції максимуму двох чисел. Результати обчислення кратностей поновністю співпадають із результатами отриманими іншими методами в статті [12].

Ідеї, які реалізовано в статті, автори планують поширити для знаходження кратностей ваг незвідних зображень алгебр Лі sl_n при $n > 3$.

Список використаної літератури

1. Freudenthal H. Zur Berechnung der chararktere der halbeinfachen Lieschen gruppen. *Indag. Math.* 1954. Vol. 16. P. 369-376.
2. Kostant B. A formula for the multiplicity of a weight. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1959. Vol. 93, No 1. P. 53-73.
3. Racah G. Lectures on Lie groups, Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics. F. Gfirsey, ed., *Gordon and Breach*, New York. 1964. P. 1-36.
4. Klimyk A. U. Multiplicities of weights of representations and multiplicities of representations ofsemisimple Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.* 1967. Vol.177, No 5. P. 1001–1004.
5. Humphreys J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. *Springer.* 1978. 198 p.
6. Moody R.V., Patera J. Fast recursion formula for weight multiplicities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.).* 1982. Vol. 7(1). P. 237–242.
7. Cavallin M. An algorithm for computing weight multiplicities in irreducible modules for complex semisimple Lie algebras. *J. Algebra.* 2017. Vol. 471. P. 492-510.
8. Siddhartha S. A new formula for weight multiplicities and characters. *Duke Math. J.* 2000. Vol. 101(1). P. 77–84.
9. Schützer W. A new character formula for Lie algebras and Lie groups. *J. Lie Theory.* 2012. Vol. 22(3). P. 817–838.
10. Lauret E A., Bertone F.R. Multiplicity formulas for fundamental strings of representations of classical Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics.* 2017. Vol. 58. 111703.
11. Fulton W., Harris J. Representation theory: a first course. Graduate texts in mathematics. no. 129. Springer. 2004. 407p.
12. Lübeck F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic, *LMS J. Comput. Math.* 2001. Vol. 4. P. 135-169.

Ramskyi A. O., Samaruk N. M., Poplavska O. A. Weight multiplicities of irreducible representations of the Lie algebra sl_3.

In this paper, for the complex Lie algebra sl_3 we propose an explicit formula for finding the multiplicity of the weight of the irreducible representation Γ_λ, which is determined by its higher weight $\lambda = (a, b)$. The set of all weights Λ of such a representation forms a group ring $\mathbb{Z}[\Lambda]$ with the multiplicative basis $\boldsymbol{e}(\mu), \mu \in \Lambda$. The character of the representation $\operatorname{Char}\Gamma_\lambda$ is an element of $\mathbb{Z}[\Lambda]$, the coefficients of which are the required multiplicities. The main idea of the calculations is to specify the basis $\boldsymbol{e}(\mu) = x^{\mu_1}y^{\mu_2}$ of the group ring $\mathbb{Z}[\lambda]$. This made it possible to represent the character $\operatorname{Char}\Gamma_\lambda$ of the irreducible representation Γ_λ as a Schur polynomial $s_{a,b}\left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y}\right)$ of two variables x, y. As a consequence, we express the coefficients of this polynomial through simple functions that are easily computed for linear time. The key role in the calculation was played by the explicitly found coefficients of the series decomposition

$$\Delta = \frac{1}{(y^2 - x)\,(1 - yx)\,(y - x^2)},$$

in terms of the function

$$c(n,k) = \begin{cases} \min(n-k+2, k), 1 \le k \le n+1, \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$

Keywords: Lie algebras, irreducible representations, characters, multiplicities, Weyl formula, Schur polynomials.

References

1. Freudenthal, H.(1954). Zur Berechnung der chararktere der halbeinfachen Lieschen gruppen. *Indag. Math.*, 16, 369-376.
2. Kostant, B. (1959). A formula for the multiplicity of a weight. *Transactions of the American Mathematical Society,* 93(1), 53-73.
3. Racah, G. (1964). Lectures on Lie groups, Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, F. Gfirsey, ed., Gordon and Breach, New York, 1-36.
4. Klimyk, A. U. (1967). Multiplicities of weights of representations and multiplicities of representations ofsemisimple Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.,* 177(5), 1001-1004.
5. Humphreys, J. (1978). Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer.
6. Moody, R. V. & Patera, J. (1982). Fast recursion formula for weight multiplicities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1), 237-242.
7. Cavallin, M. (2017). An algorithm for computing weight multiplicities in irreducible modules for complex semisimple Lie algebras. *J. Algebra*, 471, 492-510.
8. Siddhartha, S. (2000). A new formula for weight multiplicities and characters. *Duke Math. J.*, 101 (1), 77-84.
9. Schützer, W. (2012). A new character formula for Lie algebras and Lie groups. *J. Lie Theory*, 22(3) , 817–838.
10. Lauret, E A. & Bertone, F.R. (2017). Multiplicity formulas for fundamental strings of representations of classical Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 58, 111-703.
11. Fulton, W. & Harris, J. (2004). Representation theory: a first course, Graduate texts in mathematics, 129, Springer.
12. Lübeck, F. (2001). Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic, *LMS J. Comput. Math.*, 4, 135-169.

Одержано 31.10.2021