УДК 519.86
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).68-80

В. М. Петечук[1], Ю. В. Петечук[2]

[1] Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
vasil.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5663-8789

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,
доцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
yuliia.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3670-9671

ГОМОМОРФІЗМИ ЛІНІЙНИХ ГРУП, ЩО МІСТЯТЬ НОРМАЛЬНІ ПІДГРУПИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ТРАНСВЕКЦІЙ

У статті розглядаються розширені і стандартні описи гомоморфізмів груп $E\left(n,R\right)\subseteq$ $\subseteq G\subseteq GL\left(n,R\right)$, $n\geq 2$ над асоціативними кільцями R з 1.

Показано, що гомоморфізми з умовою (*) групи $E\left(n,R\right)\lhd G\subseteq GL\left(n,R\right)$, $n\geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1 мають розширено стандартний опис, а при деяких обмеженнях стандартний опис на групах G і $E\left(n,R\right)$.

В роботі також описуються гомоморфізми з умовою (*) групи $E\left(n,R\right)\subseteq G\subseteq$ $GL\left(n,R\right)$, $n\geq 4$, що відображають її у групу $GL\left(m,K\right)$, $m\geq 2$, які є мономорфізмами (зокрема такими є ізоморфізми) або $E\left(n,K\right)\subseteq \varLambda E\left(n,R\right)$ над асоціативними кільцями R і K з 1.

Показано, що такі гомоморфізми допускають стандартний опис на групі $E\left(n,R\right)$.

Ключові слова: асоціативні кільця з 1, гомоморфізми з умовою (*), розширені і стандартні описи гомоморфізмів лінійних груп.

1. Вступ. Стаття присвячена вивченню гомоморфізмів матричних груп, які містять підгрупи елементарних трансвекцій над асоціативними кільцями з 1.

Вводиться поняття стандартного опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Розглядається гомоморфізм $\varLambda_0$ групи $GL\left(n,R\right)$ у групу автоморфізмів $GL\left(W\right)$ лівого (необов'язково вільного) K-модуля W над довільними асоціативними кільцями R і K з 1, який визначається за правилом

$$\varLambda_0\left(x\right)=g^{-1}\left[\overline{\delta}\left(x\right)e+\overline{\nu}(x)^{-1}\left(1-e\right)+e_1\right]g,\ \ x\in GL\left(n,R\right),$$

де L і P – ліві K-модулі, $g:W\to\underbrace{L\oplus\cdots\oplus L}_{n}\oplus P$ – ізоморфізм K-модулів, $\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n, індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta:R\to EndL$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu:R\to EndL$ відповідно в кільце $\left(EndL\right)_n$, 1 – одиниця і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$.

За означенням гомоморфізм $\varLambda:G\to GL\left(W\right)$ групи $E(n,R)\subseteq G\subseteq GL(n,R)$ допускає стандартний опис на групі $E\left(n,R\right)$, якщо $\varLambda$ збігається з $\varLambda_0$ на цій групі.

Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ допускає розширено стандартний опис на групі G, якщо існує гомоморфізм $\gamma : G \to GL(W)$ такий, що $\Lambda(g) = \gamma(g)\Lambda_0(g)$, $g \in G$, де e – центральний ідемпотент кільця $EndL$ і елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами групи $\Lambda_0(G)$.

Якщо при цьому елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами всієї групи $\Lambda(g)$, то будемо казати, що Λ допускає стандартний опис на групі G.

У даній статті робиться опис гомоморфізмів з умовою (*) групи $E(n,R) \lhd \lhd G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1. Показано, що вони допускають розширено стандартний опис на групі G, а в окремих випадках стандартний опис на групі G.

Гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ над довільними асоціативними кільцями R з 1 описані в [1, 3, 4]. Вони допускають стандартний опис на підгрупі $E(n,R)$.

У зв'язку з цим виникає природне запитання про дію таких гомоморфізмів на всій групі G. У загальному випадку ця задача повністю не розв'язана, хоча існує багато окремих випадків для яких це можна зробити. Для відповіді на поставлене запитання використовуються співвідношення між елементами групи G і елементами її підгрупи $E(n,R)$. У всіх відомих випадках у тій або іншій формі використовується те, що підгрупа $E(n,R)$ є нормальною підгрупою групи G. У даній статті робиться опис гомоморфізмів з умовою (*) підгруп повної лінійної групи над асоціативними кільцями, в яких підгрупи елементарних трансвекцій є нормальними.

В роботі також описуються гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ у групу $GL(m,K)$, $m \geq 2$, які є мономорфізмами або образи групи $E(n,R)$ яких містять підгрупу $E(m,K)$ над асоціативними кільцями R і K з 1.

Показано, що такі гомоморфізми допускають стандартний опис на групі $E(n,R)$, в якому $P = 0$.

2. Загальні поняття і твердження. Нехай V і W – ліві K-модулі, $g : W \to V$ ізоморфізм K-модулів, $V = gW$. Ізоморфізм $i_g : GL(W) \to GL(V)$ називається внутрішнім ізоморфізмом, якщо він індукується ізоморфізмом g за правилом $i_g(x) = gxg^{-1}$, де x – довільний елемент групи $GL(W)$.

Твердження 1. *Ізоморфізм g індукує ізоморфізм*

$$g^{-1} : V \to W, \quad i_{g^{-1}} : GL(V) \to GL(W)$$

і мають місце рівності $i_g i_{g^{-1}} = 1$, $i_{g^{-1}} i_g = 1$, $i_{g^{-1}} = (i_g)^{-1}$.

Доведення випливає із означення внутрішнього ізоморфізма.

Нехай R – асоціативне кільце з 1, R^* – група оборотних елементів кільця R, R_n – кільце матриць $n \times n$ над R, $n \geq 2$, $GL(n,\ R) = R_n^*$ – повна лінійна (матрична) група оборотних $n \times n$ матриць над кільцем R.

Означення 1. *Відображення δ кільця R в асоціативне кільце R_1 з 1 називається кільцевим гомоморфізмом, якщо $\delta(0) = 0$,*

$$\delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \quad \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1)\delta(r_2)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R.

Означення 2. *Відображення ν кільця R в асоціативне кільце R_1 з 1 називається кільцевим антигомоморфізмом, якщо $\nu(0) = 0$,*

$$\nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \quad \nu(r_1 r_2) = \nu(r_1)\,\nu(r_2)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R.

Якщо $\delta : R \to R_1$ – кільцевий гомоморфізм і $\nu : R_1 \to R_2$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu\delta : R \to R_2$ є кільцевим антигомоморфізмом. Аналогічно, якщо $\nu : R \to R_1$ – кільцевий антигомоморфізм і $\delta : R_1 \to R_2$ – кільцевий гомоморфізм, то $\delta\nu : R \to R_2$ є кільцевим антигомоморфізмом.

Означення 3. *Нехай R^0 означає кільце R у якому задана операція множення за правилом $x \circ y = yx$, де x, y – довільні елементи кільця R. Кільце R^0 називається опозитом кільця R.*

Відображення $\nu_0 : R \to R^0$, задане за правилом $\nu_0(r) = r$, $r \in R$, є кільцевим антигомоморфізмом R в R^0.

Якщо $\delta : R \to R_1$ – кільцевий гомоморфізм, $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu_0\delta : R \to R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм. І, навпаки. Якщо $\delta : R \to R_1$ – кільцевий антигомоморфізм, $\nu_0 : R_1 \to R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu_0\delta : R \to R_1^0$ – кільцевий гомоморфізм.

Звуження кільцевого гомоморфізму на мультиплікативну групу кільця породжує груповий гомоморфізм, а кільцевий антигомоморфізм породжує груповий антигомоморфізм мультиплікативної групи кільця.

Груповий антигомоморфізм породжує груповий гомоморфізм, якщо кожному елементу групи поставити у відповідність елемент, який обернений до його антигомоморфного образу.

Кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує кільцевий гомоморфізм $\overline{\delta} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\delta}(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$, де $r_{ij} \in R$, $1 \le i, j \le n$.

Кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ індукує кільцевий антигомоморфізм $\overline{\nu} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\nu}(r_{ij}) = (\nu r_{ji}) = \mathrm{т}(\nu r_{ij})$, де т – означає класичне транспонування.

Зокрема, кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує груповий гомоморфізм $\overline{\delta} : GL(n, R) \to GL(n, R_1)$ за правилом $\overline{\delta} g = (\overline{\delta} g)$, $g \in GL(n, R)$, а кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ груповий гомоморфізм $\overline{\nu} : GL(n, R) \to GL(n, R_1)$ за правилом $\overline{\nu} g = (\overline{\nu} g)^{-1}$, $g \in GL(n, R)$.

Гомоморфізми $\overline{\delta}$ і $\overline{\nu}$ прийнято називати кільцевим і контраградієнтним гомоморфізмами. Вони отримуються заміною елементів матриць групи $GL(n, R)$ на їх образи відносно гомоморфізмів $\overline{\delta}$ і $\overline{\nu}$ відповідно.

Нехай 1 – одиниця, e – ідемпотент кільця R_1 і e_1 – деякий ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця R_1. Відображення Λ_e групи $GL(n, R)$ визначається за правилом

$$\Lambda_e(x) = \overline{\delta} x e + \overline{\nu} x^{-1}(1 - e) + e_1, \quad x \in GL(n, R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n, R)$ у групу $diag(GL(n, R_1), 1)$, якщо ідемпотент e комутує з елементами кілець δR, νR.

Гомоморфізм Λ_e прийнято називати контраградієнтно-кільцевим гомоморфізмом.

Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) K-модуль, L та P – ліві K-модулі, $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ – ізоморфізм K-модулів,

$\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n, індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$.

Відображення Λ_0 групи $GL(n,R)$ визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right]g, \quad x \in GL(n,R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n,R)$ у групу $g^{-1}diag\,(GL(n,EndL),1)\,g \subseteq GL(W)$, якщо e комутує з елементами кілець δR, νR.

Одиничний елемент і центральний ідемпотент e кільця $EndL$ породжують одиничний елемент і центральний ідемпотент $e \cdot 1$ кільця $(EndL)_n$, які також будемо позначати 1 і буквою e відповідно.

Якщо $P = 0$, то ідемпотент e_1 відсутній. Якщо в Λ_e кільце R_1 є кільцем $EndL$, то $\Lambda_0(x) = g^{-1}\Lambda_e(x)g$, де $x \in GL(n,R)$. Таким чином $\Lambda_0 = i_{g^{-1}}\,\Lambda_e$.

Позначимо через e_{ij} матрицю кільця R_n, у якої на місці (i,j) стоїть одиниця, а на інших місцях нулі. Очевидно, що $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, де δ_{jk} – символ Кронекера. Одиничну матрицю кільця R_n будемо позначати 1 або E.

Означення 4. *Елементи $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, де $r \in R$, $1 \le i \ne j \le n$, e_{ij} – стандартна матрична одиниця, будемо називати елементарними трансвекціями, а діагональні елементи $d_i = 1 - 2e_{ii}$, $1 \le i \le n$, елементарними інволюціями, трансвекції $t_{ij}(1)$ будемо називати одиничними елементарними трансвекціями.*

Оскільки δ і ν – кільцеві гомоморфізм і антигомоморфізм відповідно, то $\delta(1) = 1$, $\nu(1) = 1$ і відображення Λ_0 на одиничних елементарних трансвекціях має вигляд

$$\Lambda_0 t_{ij}(1) = g^{-1}\left[t_{ij}(1)e + t_{ji}(-1)(1-e) + e_1\right]g, 1 \le i \ne j \le n.$$

Нехай $E(n,R)$ – підгрупа групи $GL(n,R)$, яка породжена всіма елементарними трансвекціями $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, $r \in R$, $1 \le i \ne j \le n$.

Означення 5. *У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2, а елемент $[g_1, \ldots, g_t] = [[g_1, \ldots, g_{t-1}], g_t]$ – комутатором довжини t елементів $g_1, \ldots, g_t$ групи G, де $t > 2$.*

Мають місце рівності $d_k^2 = 1$, $d_ke_{ij}d_k^{-1} = -e_{ij}$, якщо $i \ne j$, $k \in \{i,j\}$. В інших випадках d_k комутує з e_{ij}. Тому $[d_k, t_{ij}(r)] = t_{ij}(-2r)$, якщо $k \in \{i,j\}$, $r \in R$. В решті випадків d_k комутує з $t_{ij}(r)$.

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що має місце

Твердження 2. Виконуються наступні матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl}r_1r_2),$$

де $1 \le k \ne i$, $i \ne j$, $l \ne j \le n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R. Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, де $1 \le i$, j, $k \le n$ – попарно різні довільні натуральні числа, $r \in R$.

Нехай K^0 – оппозит кільця K. Як відмічалось вище відображення $\nu : K \to K^0$, яке визначається за правилом $\nu_0(k) = k$, є антиізоморфізмом кілець K і K^0, $\nu_0^2 = 1$. Антиізоморфізм ν_0 прийнято називати елементарним антиізоморфізмом.

Довільний антиізоморфізм $\nu = \nu_0 (\nu_0 \nu)$ є добутком кільцевого гомоморфізму $\nu_0 \nu$ і елементарного антиізоморфізму ν_0.

Відмітимо, що кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to K$ індукує кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to Ke$, де e – центральний ідемпотент кільця K, який також будемо позначати через δ. Аналогічно кільцеві антигомоморфізми $\nu : R \to K$, $\nu_0 : K \to K$ індукують кільцеві антигомоморфізми $\nu : R \to K(1-e)$, $\nu_0 : K \to K(1-e)$, які також будемо позначати ν і ν_0 відповідно.

У цих позначеннях сума $\delta + \nu_0 \nu$ кільцевих гомоморфізмів δ і $\nu_0 \nu$ є кільцевим гомоморфізмом і її можна позначати через δ. Гомоморфізм Λ_e в такому разі діє за правилом

$$\Lambda_e x = \overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu_0}\big(\overline{\delta}(x)\big)^{-1}(1-e) + e_1,$$

де x – довільна матриця групи $GL(n,R)$, e – ідемпотент, який комутує з елементами кільця δR, а e_1 – ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця δR.

Надалі, будемо вважати, що гомоморфізм Λ_e визначений саме в такий спосіб. Зокрема,

$$\Lambda_e t_{ij}(r) = t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r)(1-e) + e_1,$$

де r – довільний елемент кільця R, e – ідемпотент, який комутує, а e_1 – ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця δR.

Антиізоморфізм $\nu_0 : K \to K^0$ індукує антиізоморфізм $\overline{\nu_0} : K_n \to (K^0)_n$ і, як наслідок, антиізоморфізм $\overline{\nu_0}$ груп $GL(n,K)$ і $GL(n,K^0)$. Останній прийнято називати елементарно-контраградієнтним. Він утворюється із нетотожнього (єдиного) автоморфізма графа типу A_n, що зберігає кути, тобто який пару (i,j) відображає у пару (j,i).

Аналогічно кільцевий гомоморфізм $\overline{1} : K_n \to K_n$ утворюється з тотожнього відображення $K \to K$ і тотожнього автоморфізма графа типу A_n, який, зрозуміло, зберігає кути графа.

Таким чином, з точністю до внутрішнього ізоморфізму і кільцевого гомоморфізму, під стандартними неодиничними гомоморфізмами алгебраїчної групи типу A_n, розуміють пов'язані з ідемпотентами e і $(1-e)$ гомоморфізми (тотожний і контраградієнтний), які індуковані автоморфізмами графа, що зберігають його кути.

Нагадаємо, що систему центральних ортогональних ідемпотентів кільця називають повною, якщо їх сума дорівнює одиниці.

Тому у більш загальній ситуації стандартними вважають ті неодиничні гомоморфізми алгебраїчної групи, які, з точністю до внутрішнього ізоморфізму і кільцевого гомоморфізму, при відповідних ідемпотентах повної системи центральних ортогональних ідемпотентів утворюють гомоморфізми алгебраїчної групи, які породжені автоморфізмами графа, що зберігають його кути.

Гомоморфізми такого типу можна вважати стандартними навіть над довільними асоціативними кільцями з одиницями. У більш широкому розумінні поняття стандартних гомоморфізмів запропонував Ж. Тітс [11].

Подібним чином влаштовані гомоморфізми груп Шевалльє над комутативними кільцями з 1. Найбільш істотні результати в цьому напрямку отримані Р. Стейнбергом [12], Дж. Є. Хамфрі [13], Є. Абе [14], О. І. Буніною [15].

Нехай $\Lambda : G \to GL(W)$ – гомоморфізм з умовою (*), який з точністю до ізоморфізму визначає розклад модуля W у пряму суму n ізоморфних між собою підмодулів, які ізоморфні модулю L і деякого підмодуля, який ізоморфний модулю P, $W_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$, де L береться n раз і $g : W \to W_g$ – відповідний ізоморфізм. Внутрішній ізоморфізм $i_g : GL(W) \to GL(W_g)$ у цьому випадку будемо позначати Λ_g.

За означенням $\Lambda_0 = \Lambda_g^{-1}\Lambda_e$. У [1,3] доведено, що $\Lambda_g\Lambda = \Lambda_e$. Тому $\Lambda = \Lambda_g^{-1}\Lambda_e = \Lambda_0$ на групі $E(n,R)$ відносно кільцевого гомоморфізма $\delta : R \to EndL$ і центрального ідемпотента e кільця $EndL$.

3. Означення розширено стандартного і стандартного описів гомоморфізмів.

Означення 6. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$, якщо Λ збігається з Λ_0 на цій групі і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$.*

Означення 7. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ допускає розширено стандартний опис на групі G, якщо існує гомоморфізм $\gamma : G \to GL(W)$ такий, що $\Lambda(x) = \gamma(x)\Lambda_0(x)$, $x \in G$, e – центральний ідемпотент кільця $EndL$ і елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами групи $\Lambda_0(G)$. Якщо при цьому елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами групи $\Lambda(G)$, то будемо казати, що Λ допускає стандартний опис на групі G.*

Зауважимо, що якщо Λ допускає стандартний опис на групі $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, то $\gamma(G)$ – комутативна група і Λ збігається з Λ_0 на групі $E(n,R)$. Це випливає з рівності

$$\Lambda t_{ij}(r) = [\Lambda t_{ik}(r), \Lambda t_{kj}(1)] = \left[\gamma(t_{ik}(r))\Lambda_0 t_{ik}(r), \gamma(t_{kj}(1))\Lambda_0 t_{kj}(1)\right] =$$

$$= [\Lambda_0 t_{ik}(r), \Lambda_0 t_{kj}(1)] = \Lambda_0 t_{ij}(r),$$

де $1 \le i, j, k \le n$ – різні числа, $r \in R$.

Тому означення 7 стандартного опису гомоморфізмів на групі $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ цілком узгоджується із означенням 6.

4. Гомоморфізми з умовою (*). Розглянемо гомоморфізми з умовою (*) підгруп групи $GL(n,R)$, $n \ge 4$ над асоціативними кільцями R з 1, які містять нормальну підгрупу $E(n,R)$. Зокрема це так, якщо R – довільне комутативне кільце з 1 [16].

Означення 8. *Будемо казати, що гомоморфізм Λ задовольняє умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ існують натуральні числа s_1 і s_2, які оборотні в K і $A \in G$ такі, що $\Lambda A = 1 + s_1 m$ і з рівності $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A$, $B \in G$ випливає, що $A^{s_2}B = BA^{s_2}$.*

Зауважимо, що коли мова йде про нільпотентний елемент m, то передбачається, що він існує. Тому гомоморфізми з умовою (*) є неодиничними.

Ізоморфізми задовольняють умову (*), якщо покласти $s_1 = s_2 = 1$ і скористатися тим, що $1 + m$ є оборотним елементом.

Якщо в означенні гомоморфізма з умовою (*) ΛA комутує із скінченною кількістю елементів ΛB_i, $B_i \in G$, $1 \le i \le t$, то існує натуральне число s_2, яке оборотне в K таке, що A^{s_2} комутує з $B_1, \ldots, B_t$. Аналогічно доводиться, що замість одного елемента $A \in G$ можна розглядати скінченну кількість елементів групи G.

Відмітимо, що якщо гомоморфізм Λ_0 задовольняє умову (*), то кільця δR і νR співпадають з кільцем $EndL$.

5. Гомоморфізми з умовою (*) груп, які містять нормальну підгрупу елементарних трансвекцій.

Теорема 1. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий K-модуль, $E\,(n, R) \lhd G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 4$, $\Lambda : G \to GL\,(W)$ – довільний гомоморфізм з умовою (*). Тоді Λ допускає розширено стандартний опис на групі G.*

Якщо комутант $G' = E\,(n, R)$, то Λ допускає стандартний опис на групі G.

Доведення. Нехай h – довільний елемент групи G. За умовою група $E\,(n, R)$, $n \geq 3$ є нормальною підгрупою групи G. Тому

$$ht_{ij}\,(r)\,h^{-1} = \prod t_{kl}\,(r_{kl}),$$

де $h \in G$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$, $r_{kl} \in R$ і добуток береться по $1 \leq k \neq l \leq n$.

Як доведено в [3, 4] існує ізоморфізм $g : W \to W_g$, $W_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такий, що Λ збігається з Λ_0 на підгрупі $E\,(n, R)$ групи G. Тому

$$\Lambda h \Lambda t_{ij}\,(r)\,\Lambda h^{-1} = \Lambda\left(ht_{ij}\,(r)\,h^{-1}\right) =$$

$$= \prod \Lambda t_{kl}\,(r_{kl}) = \prod \Lambda_0 t_{kl}\,(r_{kl}) = \Lambda_0\left(ht_{ij}\,(r)\,h^{-1}\right) = \Lambda_0\,(h) \Lambda t_{ij}\,(r)\,(\Lambda_0\,(h))^{-1}.$$

Тим самим доведено, що елементи $\gamma\,(h) = \Lambda_0(h)^{-1}\Lambda\,(h)$ комутують із елементами $\Lambda t_{ij}\,(r)$, а елементи $\Lambda_g \gamma\,(h)$ комутують із елементами $\Lambda_g \Lambda t_{ij}\,(r) = \Lambda_e t_{ij}\,(r)$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$ і $r \in R$. Зрозуміло, що γ – відображення групи G у групу $GL\,(W)$ і $\Lambda\,(h) = \Lambda_0\,(h)\,\gamma\,(h)$, $h \in G$.

Розглянемо відображення $\chi : G \to GL\,(W_g)$, яке задане за правилом $\chi\,(h) = \Lambda_g \gamma\,(h)$ для всіх $h \in G$. Оскільки елементи $\chi\,(h)$ комутують із елементами $\Lambda_g \Lambda t_{ij}\,(r) = \Lambda_e t_{ij}\,(r)$, то для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$ має місце рівність

$$\chi\,(h)\,(t_{ij}\,(\delta r)\,e + t_{ji}\,(-\nu_0 \delta r)\,(1 - e) + e_1) =$$

$$= (t_{ij}\,(\delta r)\,e + t_{ji}\,(-\nu_0 \delta r)\,(1 - e) + e_1)\,\chi\,(h)\,.$$

З неї випливає, що $\chi\,(h)$ комутує з формальними матрицями

$$diag\,((\delta r e_{ij})\,e - (\delta r e_{ji})\,(1 - e)\,, 0)$$

для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$. Тому

$$\chi\,(h) = \chi_1\,(h)\,e + \chi_2\,(h)\,(1 - e) + \chi_3\,(h)\,e_1,$$

де $\chi_1\,(h)$ і $\chi_2\,(h)$ – формальні скалярні матриці, які комутують із δr для всіх $r \in R$.

Оскільки Λ – гомоморфізм із умовою (*), то $\delta r = EndL$ і $\chi_1\,(h)$, $\chi_2\,(h)$ містяться в центрі кільця $(EndL)_n$. Тому елементи $\chi\,(h)$ попарно комутують із елементами

$$\Lambda_e\,(h_1) = \overline{\delta}\,(h_1)\,e + \overline{\nu_0}\left(\overline{\delta}\,(h_1)^{-1}\right)(1 - e) + e_1$$

для довільних елементів h і h_1 групи G. Отже, елементи $\chi(G)$ попарно комутують із елементами групи $\Lambda_e(G)$, а елементи $\Lambda_{g^{-1}}\chi(G) = \gamma(G)$ попарно комутують із елементами групи $\Lambda_{g^{-1}}\Lambda_e(G) = \Lambda_0(G)$. Оскільки Λ, Λ_0 – гомоморфізми групи G і $\Lambda(h) = \gamma(h)\Lambda_0(h)$, $h \in G$, то γ є гомоморфізмом групи G. Тим самим доведено, що Λ допускає розширено стандартний опис на групі G.

Зрозуміло, що в такому разі відображення $\chi : G \to GL(W_g)$ є гомоморфізмом групи G. Тому відображення $\chi_3 : G \to GL(P)$ також є гомоморфізмом групи G. З рівності $\chi_3 E(n,R) = 1$ випливає, що гомоморфізм χ_3 індукує груповий гомоморфізм $\chi_3 : G/E(n,R) \to GL(P)$.

Якщо комутант G' групи G міститься в групі $E(n,R)$, то група $G/E(n,R)$ – комутативна. Це означає, що елементи $\chi_3(h)$ і $\chi_3(h_1)$, а значить і елементи $\chi(h)$ і $\chi(h_1)$, а також елементи $\gamma(h)$ і $\gamma(h_1)$ комутують для всіх елементів h і h_1 групи G.

Тим самим доведено, що $\gamma(G)$ – комутативна група, елементи якої попарно комутують з елементами $\Lambda(G)$. Тому Λ допускає стандартний опис на групі G.

З комутаторних формул випливає

Твердження 3. *Нехай G – група, яка породжена групою оборотних діагональних матриць $D(n,R)$ і групою $E(n,R)$. Тоді комутант групи G збігається із групою $E(n,R)$.*

Згідно з теоремою 1 гомоморфізми з умовою (*) групи $D(n,R) \cdot E(n,R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1 допускають стандартний опис на цій групі. Зокрема, якщо R – локальне кільце, то група $G(n,R)$, $n \geq 2$ збігається із групою $D(n,R) \cdot E(n,R)$.

Відмітимо, що якщо в теоремі 1 $P = 0$, то Λ також допускає стандартний опис на групі G. Адже, в цьому випадку елементи груп $\gamma(G)$ і $\Lambda(G)$ попарно комутують між собою.

Означення 9. *Нехай R – асоціативне кільце з 1, G – підгрупа групи $G(n,R)$, $n \geq 2$. Автоморфізм Λ групи G називається гомотетією, якщо існує гомоморфізм $\gamma : G \to \xi(R)^*$ такий, що $\Lambda(g) = \gamma(g)\, g$ для всіх $g \in G$, де $\xi(R)$ – центр кільця R.*

6. Автоморфізми лінійних і проективних груп над комутативними кільцями.

Теорема 2. *Нехай R – комутативне кільце з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$. Тоді довільний автоморфізм групи G є добутком стандартних автоморфізмів: внутрішнього, кільцевого (розширено-кільцевого при $n = 3$), контраградієнтного і гомотетії.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 опис автоморфізмів Λ групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, з точністю до стандартних автоморфізмів: внутрішнього, розширено-кільцевого, контраградієнтного зводиться до випадку, коли $\Lambda|_{E(n,R)} = 1$.

Враховуючи, що $E(n,R)$ нормальна підгрупа групи $GL(n,R)$ одержуємо, що $\Lambda(g)\, e\Lambda(g)^{-1} = \Lambda(geg^{-1}) = geg^{-1}$ для довільних $g \in G$ і $e \in E(n,R)$. Отже, елементи $\gamma(g) = g^{-1}\Lambda(g)$ комутують із усіма елементами групи $E(n,R)$ і тому є скалярними матрицями.

Тим самим, доведено, що $\Lambda(g) = \gamma(g)\, g$ для всіх $g \in G$, де γ – гомоморфізм групи G у групу R^*. Отже, Λ – гомотетія.

Багато теорем про гомоморфізми матричних груп над кільцями мають місце і у випадку проективних груп [8, 17]. Нагадаємо, що згідно з означенням, якщо

G –підгрупа групи $GL(n,R)$, то $PG = G/_{G\bigcap \xi GL(n,R)}$ – проективна група, де $\xi GL(n,R)$ – центр групи $GL(n,R)$. У роботі [5] доведено, що над комутативними кільцями R і K з 1 ізоморфізми $\Lambda : PG \to PH$, де $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, $E(m,K) \subseteq H \subseteq GL(m,K)$, $m \geq 3$ є добутком стандартних ізоморфізмів (при $n = m = 3$ в розширеному сенсі).

Зокрема, якщо R – комутативне кільце з 1 і Λ – автоморфізм групи PG, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, то Λ індукує автоморфізм групи $PE(n,R)$, який є стандартним у розширеному сенсі і продовжується до автоморфізму групи PG. Тому, з точністю до стандартних автоморфізмів, можна вважати, що автоморфізм Λ є тотожним на групі $PE(n,R)$. Як і вище, доводиться, що Λ – гомотетія. Це означає, що автоморфізм Λ з точністю до стандартних автоморфізмів є тотожним на групі PG.

Зрозуміло, що вищенаведені міркування придатні і у тих випадках, коли $E(n,R) \lhd G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$ і Λ – автоморфізм групи PG, який тотожний на групі $PE(n,R)$ над довільним асоціативним кільцем R з 1. Як і вище, тоді Λ – тотожний автоморфізм на всій групі PG. Інформація про кільця R, для яких група $E(n,R)$ є нормальною підгрупою в групі $GL(n,R)$, викладена в [10].

Однак, розраховувати на те, що з тотожності автоморфізму Λ групи PG, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ на підгрупі $PE(n,R)$ випливає тотожність автоморфізму Λ на всій групі PG над довільним асоціативним кільцем R з 1, не доводиться. Адже, як випливає із роботи В.М. Герасімова [18] існують асоціативні кільця R з 1 над якими група $E(n,R)$ не є нормальною підгрупою групи $GL(n,R)$ і існують нетотожні автоморфізми групи $PGL(n,R)$, які тотожні на всій групі $PE(n,R)$.

Однак, клас асоціативних кілець R з 1 для яких з тотожності автоморфізмів групи PG, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ на підгрупі $PE(n,R)$ випливає їхня тотожність на всій групі PG, досить широкий. Як випливає із робіт І. З. Голубчика і О. В. Міхальова [6], І. З. Голубчика [9] це вірно, якщо R – є PI-кільцем або R є двостороннім порядком у регулярному в змістіНоймана кільці.

Ізоморфізми матричних груп $GL(n,R)$, $n \geq 4$ в групу $GL(m,K)$, $m \geq 2$ над асоціативними кільцями R і K з 1 описав І. З. Голубчик [9]. Виявилося, що вони допускають стандартний опис на групі $E(n,R)$.

7. Гомоморфізми з умовою (*) в частинних випадках. Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$, $\Lambda : G \to GL(m,K) \equiv GL(W)$ гомоморфізм з умовою (*), W – лівий K-модуль розміру m.

Нехай C_1 – підгрупа групи $E(n,R)$, яка породжена одиничними елементарними трансвекціями $t_{in}(1)$, $1 \leq i < n$, $t_{nj}(1)$, $1 < j < n$, а C_2 – підгрупа групи $E(n,R)$, яка породжена одиничними елементарними трансвекціями $t_{in}(1)$, $1 < i < n$, $t_{nj}(1)$, $1 \leq j < n$.

Нехай C – підгрупа групи $E(n,R)$, яка породжена одиничними елементарними трансвекціями $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Виконується таке твердження.

Твердження 4. *Централізатори $C_G(C_1)$ і $C_G(C_2)$ збігаються з централізатором $C_G(C)$ і складаються із скалярних (не обов'язково попарно комутативних) матриць групи G.*

Доведення отримується безпосередньою перевіркою, яка випливає із вигляду централізаторів матричних одиниць.

Теорема 3. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$, W – лівий вільний K-модуль, $dimW = m$, $m \geq 2$, $\Lambda : G \to GL(W) \equiv GL(m,K)$ – гомоморфізм з умовою (*). Якщо Λ є мономорфізмом (такими є ізоморфізми) або $E(n,K) \subseteq \Lambda E(n,R)$, то Λ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$ в якому підмодуль $P = 0$.*

Доведення. Згідно з роботами [3, 4] гомоморфізми з умовою (*) мають стандартний опис на групі $E(n,R)$. Це означає, що існує ізоморфізм $g : W \to W_g$, де $W_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такий, що $L \neq 0$, $\delta : R \to EndL$ – епіморфізм і

$$\Lambda t_{ij}(r) = g^{-1}\left(t_{ij}(\delta r)e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r)(1-e) + e_1\right)g,$$

e – центральний ідемпотент кільця $EndL$, e_1 – ідемпотент кільця $EndP$, який ортогональний з елементами кільця $EndL$.

Нехай x – довільний елемент із $Hom(P,L)$.

Згідно з умовою існують натуральні числа s_1, s_2, s_1', s_2', які оборотні в кільці K і матриці h, h' групи G такі, що

$$\Lambda h = g^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 & s_1 e x \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g \quad \text{і} \quad \Lambda h' = g^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 & s_1'(1-e)x \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g$$

і матриці h^{s_2}, $(h')^{s_2'}$ комутують з елементами груп C_1 і C_2 відповідно. Оскільки централізатори $C_G(C_1)$ і $C_G(C_2)$ співпадають із централізатором $C_G(C)$, то h^{s_2}, $(h')^{s_2'}$ комутують з одиничними елементарними трансвекціями групи C. Тому Λh^{s_2}, $\Lambda (h')^{s_2'}$ комутують з елементами групи ΛC і $s_1 s_2 e x = s_1' s_2' (1-e)x = 0$. В такому разі $ex = (1-e)x = 0$, і, як наслідок, $x = 0$, $Hom(P,L) = 0$. Аналогічно доводиться, що $Hom(L,P) = 0$. Тому

$$K_m = g^{-1} diag\left((EndL)_n, EndP\right) g, E_m = g^{-1} diag(E_n, 1) g.$$

Елемент $g^{-1}diag(0,1)g$ належить центру кільця K_m, а тому має вигляд λE_m, де $\lambda^2 = \lambda$ – елемент центра кільця K.

Аналогічно елемент $g^{-1}diag(E_n,0)g$ також належить центру кільця K_m і має вигляд $(1-\lambda)E_m$. Окрім цього,

$$\Lambda E(n,R) \subseteq (1-\lambda)K_m + \lambda E_m.$$

Тому трансвекції $t_{ij}(\lambda K)$, $1 \leq i \neq j \leq m$ комутують з елементами групи $\Lambda E(n,R)$.

За умовою (*) прообрази деяких степенів елементів $t_{ij}(\lambda)$ існують і комутують із скінченною кількістю елементів групи $E(n,R)$ (наприклад, $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq m$), а тому є скалярними матрицями. Однак, з цього не випливає, що ці скалярні матриці комутують між собою.

Якщо ж накласти додаткову умову на Λ, з якої випливає, що деякі степені трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ з показниками степенів, які є оборотними елементами в кільці K комутують між собою, то $\lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$ і Λ має стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

Такою додатковою умовою може бути, наприклад, вимога, щоб гомоморфізм з умовою (*) був мономорфізмом. Адже, тоді деякі степені прообразів, які існують завдяки умові (*), трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$, з показниками степенів, які є оборотними елементами в кільці K, комутують з елементами групи $E(n, R)$, а тому є центральними скалярними матрицями, які комутують між собою. Це означає, що відповідні степені трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ комутують.

Тому $\varLambda$ має стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

Якщо накласти іншу додаткову вимогу $E(m, K) \subseteq \varLambda E(n, R)$, то трансвекції $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ належать групі $\varLambda E(n, R)$. Оскільки кожна з трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ комутує з елементами групи $\varLambda E(n, R)$, то вони комутують між собою. Це означає, що $\varLambda$ має також стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

Твердження теореми 3 залишається правильним і в тому випадку, якщо вимагати, щоб хоча б одна трансвекція $t_{ij}(\lambda)$ належала групі $\varLambda E(n, R)$. Адже, в такому разі трансвекція $t_{ji}(\lambda)$, яка комутує з елементами групи $\varLambda E(n, R)$, комутує і з трансвекцією $t_{ij}(\lambda)$. Тому $\lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$. Як і вище $\varLambda$ має стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі розглядаються застосування гомоморфізмів з умовою (*). Зокрема, розглядається питання опису гомоморфізмів з умовою (*) підгруп повної лінійної групи над асоціативними кільцями з 1, в яких підгрупи елементарних трансвекцій є нормальними підгрупами, а також знаходиться вигляд гомоморфізмів з умовою (*) в деяких частинних випадках. Показано, що умова нормальності підгрупи $E(n, R)$ у підгрупах групи $GL(n, R)$, які її містять, дають можливість довести, що гомоморфізми з умовою (*) допускають розширено стандартний опис, а при деяких обмеженнях стандартний опис на таких підгрупах.

Задача опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями є актуальною, активно розвивається, має застосування в алгебраїчній K-теорії, теорії кілець і модулів та теорії зображень груп над кільцями. В описі гомоморфізмів є чимало задач, які потребують вирішення. Однією з них є задача опису гомоморфізмів з умовою (*) лінійних груп над асоціативними кільцями з 1, які містять підгрупу елементарних трансвекцій, що не є в них нормальною.

Іншою задачею є описання гомоморфізмів лінійних груп над асоціативними кільцями з 1, які містять підгрупи елементарних трансвекцій і задаються на них одиничними гомоморфізмами.

Список використаної літератури

1. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфізми матричних груп та кілець над асоціативними кільцями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38, №1. С. 61-75. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75
2. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*.2020. Вип. 1(36). С. 16-29. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29
3. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфізми з умовою (*), якщо 2 - оборотний елемент. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*.2020. Вип. 2(37). С. 15-27. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113
4. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2015. Вип. 1(26). С. 99-114.

5. Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. *Матем. сб.* 1982. № 4, С. 539–547.
6. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами. *Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1983. Т. 3, № 38. С. 73-85.
7. Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами. *Сиб. мат. журн.* 1985. Т. 4. С. 49-67.
8. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки.* 1989. Т. 45, вып 2. С. 80-94.
9. Golubchik I. Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL\,(n, R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics.* 1992. Vol. 131, Part 1. P. 123-136.
10. Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin: Springer, 1989. 578 p.
11. Tits J. Homomorphismes et automorphismes «abstracts» de groupes algebriques et arithmetiques. *Actes. Congres intern. Math.*. 1970. Vol. 2. P. 349-355. (Русский перевод в кн.: Автоморфизмы классических групп. Москва : Мир, 1976. С. 218-225).
12. Steinberg R. Lectures of Chevalley groups. New Haven: Yale Unib. Math. Dept., 1968. (Русский перевод: Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 261 с.).
13. Humphress T. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups. *Canad. T. Math.* 1969. Vol. 21. P. 908-911.
14. Abe E. Chevalley groups over commutative rings. *Proc. Conf. Radical-Theory.* Sendai. 1998. P. 1-23.
15. Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings. *J. Algebra.* 2012. Vol. 355, № 1. P. 154-170. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.002
16. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*. 1977. Т. 41, № 2. С. 235-252.
17. Голубчик И. З. Изоморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами. *Фундамент. и прикладная матем.*. 1985. Т. 1, № 1. С. 311-314.
18. Герасимов В. Н. Группа единиц свободного произведения колец. *Матем. сб.*. 1987. Т. 134, № 1. С. 42-65.

Petechuk V. M., Petechuk Y. V. Homomorphisms of linear groups that contain normal subgroups of elementary transvections.

In the article considers extended and standard descriptions of homomorphisms of groups $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 2$ over the associative rings R with 1.

It is shown that homomorphisms with condition (*) of the group $E\,(n, R) \lhd G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 4$ over associative rings R of 1 have an extended standard description, and at some restrictions a standard description.

The article also describes homomorphisms with condition (*) of group $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 4$ into an group $GL\,(m, K)$, $m \geq 2$, which are monomorphisms (particular such are isomorphisms) or $E\,(n, K) \subseteq \Lambda E\,(n, R)$ over the associative rings R and K with 1.

It is shown that such homomorphisms allow a standard description.

Keywords: associative rings with 1, homomorphisms with condition (*), extended and standard descriptions of homomorphisms of linear groups.

References

1. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2021). Homomorphisms of matrix groups and rings over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 38(1),* 61-75. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75 [in Ukrainian].
2. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2020). Images by formal matrices of elements of matrix groups over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1(36),* 16-29. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29 [in Ukrainian].
3. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2020). Homomorphisms with condition (*) if 2 is a reversible element. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and*

Informatics, 2(37), 101-113. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113 [in Ukrainian].

4. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1(26),* 99-114 [in Russian].
5. Petechuk, V. M. (1982). Automorphisms of matrix groups over commutative rings. *Math. Noties, 4,* 539-547 [in Russian].
6. Golubchik, I. Z., & Mikhalev, A. V. (1983). Isomorphism of general linear groups over associative rings. *Moscow Univ. Math. Bull., 38(3),* 73-85 [in Russian].
7. Zelmanov, E. I. (1985). Isomorphism of linear groups over on associative rings. *Siberian Math. J., 4(26),* 49-67 [in Russian].
8. Petechuk, V. M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. *Math. Notices, 2(45),* 83-94 [in Russian].
9. Golubchik, I. Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL\,(n,R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics, 131(1),* 123-136.
10. Hahn, A. J., & O'Meara, O.T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin: Springer.
11. Tits, J. (1970). Homomorphismes et automorphismes «abstracts» de groupes algebriques et arithmetiques. *Actes. Congres intern. Math., 2*, 349-355.
12. Steinberg, R. (1968). Lectures of Chevalley groups. New Haven: Yale Unib. Math. Dept.
13. Humphress, T. F. (1969). On the automorphisms of infinite Chevalley groups. *Canad. T. Math., 21,* 908-911.
14. Abe, E. (1998). Chevalley groups over commutative rings. *Proc. Conf. Radical-Theory.* Sendai, 1-23.
15. Bunina, E. I. (2012). Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings. *J. Algebra, 355(1)*, 154-170. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.002.
16. Suslin, A. A. (1977). On the structure of a special linear group over a ring of polynomials. *Izv. USSR Academy of Sciences. Ser. mat., 41(2),* 235-252 [in Russian].
17. Golubchik, I. Z. (1985). Isomorphisms of projective groups over associative rings. *Fundam. and applied mat., 1(1)*, 311-314 [in Russian].
18. Gerasimov, V. N. (1987). Group of units of free product of rings. *Mat. Sat., 134(1),* 42-65 [in Russian].

Одержано 24.10.2021