

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124)**С. Ю. Бабич¹, Ю. П. Глухов², В. Ф. Лазар³**¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

провідний науковий співробітник,

професор, доктор технічних наук

babich_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>² Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

старший науковий співробітник,

кандидат фізико-математичних наук

gluchov.uriy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>³ Мукачівський державний університет,

доцент кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій,

кандидат технічних наук

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

**ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ТІЛАХ (МАТЕРІАЛАХ) З
ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. ЧАСТИНА 3.
ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ У ПРУЖНОМУ ДВОХШАРОВОМУ
ПІВПРОСТОРИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ
РУХОМИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

У статті досліджені динамічні процеси у пружному двошаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження. Дані задачі розв'язані методом інтегральних перетворень і за допомогою комплексних потенціалів, введених в роботах академіка НАН України Гузя О.М. і одного із авторів цієї статті. Проведено оцінку можливих значень коренів характеристичного рівняння. Отримано необхідні і достатні умови існування кратних коренів характеристичного рівняння. На вільну поверхню пружного шару, що лежить на пружному півпросторі, діє навантаження, що рухається з постійною швидкістю. Вважається, що картина деформацій інваріантна у часі в системі координат, що рухається разом з навантаженням. Для матеріалів з пружними потенціалами гармонічного типу (стисливі тіла) та з пружними потенціалами типу Бартенєва-Хазановича (нестисливі тіла) проведено численні дослідження. Аналіз отриманих результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (запасованих) деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння. Крім цього, доведено, що для заданих параметрів завжди можна знайти область значень λ_1 (коефіцієнтів) подовження, для яких існують критичні швидкості руху навантаження. Зокрема при жорсткому з'єднанні шару з півпростором можливо існування двох критичних швидкостей руху навантаження, у крайньому випадку, одна із яких більша за швидкість поверхневих хвиль Релея. Отримані результати можуть бути використані для дослідження напружено-деформованого стану елементів багатшарового заздалегідь деформованого півпростору при дії рухомого поверхневого навантаження.

Ключові слова: контактні напруження, комплексні потенціали, фазові швидкості, жорсткі штампи, рухомі навантаження, хвилі Релея, напружено-деформований стан.

1. Вступ. Однією з задач, яка має значне наукове і практичне значення є задача про розповсюдження хвиль у тілах під дією прикладених до їх границь рухомих навантажень (узагальнена задача Лемба про початкові навантаження).

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

Такий тип навантаження має місце, наприклад, при прокатці металів, виробництві паперу, пластмас, великогабаритних дзеркал тощо. Задачі такого типу виникають також при розрахунку аеродромних і дорожніх покриттів, при розрахунку пластин і оболонок, які перебувають у рухомому середовищі або під дією рухомих штампів і в багатьох інших випадках.

Необхідно зазначити, що як з математичної так і з фізичної точки зору рухоме навантаження є поняттям досить загального характеру. Тому основні закономірності дії рухомого навантаження можуть вивчатися незалежно від того, в результаті якого фізичного процесу ці проблеми виникають. У даній статті розглянута динамічна задача для пружного попередньо напруженого шару, що лежить на півпросторі, і на яку діє поверхневе рухоме навантаження.

Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1]. В рамках цієї теорії різні двомірні моделі багатопарового середовища вивчалися в роботах [2-12]. Необхідно зазначити, що остання робота з даної тематики опублікована на початку 2021р. у статті авторів [13].

2. Актуальність. Актуальність таких досліджень очевидна, оскільки практично у всіх елементах конструкцій і деталях машин присутні початкові (залишкові) напруження. Природа виникнення початкових напружень досить різноманітна. Про їх походження і вплив на основні характеристики контактної взаємодії для статичних і динамічних задач, в тому числі при дії рухомих штампів, навантажень детальніше вивчено в роботах [14-15].

3. Постановка задачі. «Розглянемо задачу в рамках постановки, викладеної в роботах [1-3]. Пружний шар лежить на пружному півпросторі. На вільну поверхню шару діє навантаження, що рухається з початковою швидкістю ν . Вважаємо, що картина деформації інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

4. Метод розв'язку. Спочатку розглянемо першу основну динамічну задачу для півплощини, яка аналогічна задачам статички (задача Фламана). Іншими словами, розглядається задача, коли граничні умови відповідають зосередженій силі інтенсивності \mathbf{p} , яка прикладена до границі півплощини під кутом α_1 до осі Oy_1 , і яка рухається рівномірно вздовж осі Oy_1 із швидкістю ν . Після ряду перетворень, аналогічно [4] для напруження \tilde{Q}_{22} вздовж осі $0\eta_2$ (на вертикальній осі) одержано вираз у такому вигляді:

$$\tilde{Q}_{22} \Big|_{\eta_1 \equiv y_1 - vt = 0} = -\frac{P}{\pi y_2} \left\{ \operatorname{Im} \left[\mu_1 \mu_2 \left(\mu_1 \gamma_{21}^{(1)} - \mu_2 \gamma_{21}^{(2)} \right) \right] \right\}^{-1} \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\left(\mu_2^2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1^2 \gamma_{21}^{(1)} \right) \right] \sin \alpha_1 + (\mu_1 + \mu_2) \cos \alpha_1. \quad (1)$$

У випадку відсутності початкових напружень величина, яка відповідає (1) для класичної лінійної теорії пружності ізотропного тіла, має вигляд

$$\tilde{Q}_{22} \Big|_{\eta_1 \equiv y_1 - vt = 0} = \frac{P}{\pi y_2} \cdot 2 \cos \alpha_1. \quad (2)$$

Для потенціалу Трелоара (нестисливе тіло) на основі чисельних розрахунків виявлено вплив початкових напружень на закономірності розподілу напружено-деформованого стану в півплощині з початковими напруженнями для першої

динамічної задачі. При цьому початковий напружено-деформований стан також визначений для плоскої деформації ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1, \lambda_3 = 1$). Одержані результати свідчать про те, що початкові напруження, які задаються коефіцієнтом подовження λ_1 , суттєво впливають на розподіл напружень у розглянутій першій динамічній граничній задачі для півплощин з початковими напруженнями.

В роботі досліджені динамічні процеси у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження методом інтегральних перетворень і ті ж самі задачі розв'язані за допомогою комплексних потенціалів. Іншими словами, однією із таких задач є задача про поширення хвиль у попередньо напружених тілах під дією прикладених до їх границь рухомих навантажень (ускладнення задачі Лемба про точкове навантаження). Таке навантаження має, наприклад, місце при прокатці металів, виробництві паперу, пластмас, великогабаритних дзеркал тощо. Задачі такого типу виникають також при розрахунку аеродромних і дорожніх покриттів, при розрахунку пластин і оболонки, які знаходяться у рухомому середовищі або під дією рухомих штампів і в багатьох інших випадках. Необхідно зауважити, що як з математичної, так і з фізичної точки зору, рухоме навантаження є поняттям досить широким. Тому основні закономірності дії рухомого навантаження вивчені незалежно від того в результаті якого фізичного процесу ці проблеми виникли. Розглянуто задачу, коли шароватий півпростір складається із пружного шару товщини $2h$, який лежить на пружному стисливому або нестисливому попередньо напруженому ізотропному півпросторі; причому навантаження рухається вздовж вільної поверхні шару з постійною швидкістю v на протязі великого проміжку часу (маємо плоский деформований стан). Вважається також, що динамічну поведінку шару можна описати за допомогою системи теорії пластин, які враховують зсув і інерцію обертання. Досліджено два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$ (жорсткий і нежорсткий контакти).

З використанням методу інтегральних перетворень Фур'є отримані фундаментальні розв'язки задач для стисливих і нестисливих тіл у просторі зображень при різних умовах контакту і швидкостях руху навантажень. Граничні умови і рівняння руху двохшарового півпростору для стисливих і нестисливих матеріалів зображені у загальному вигляді (відрізняються тільки коефіцієнти). Розв'язок задачі знайдений за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за змінною y_1

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iky_1} dy_1. \quad (3)$$

Застосувавши перетворення Фур'є до відповідних рівнянь, одержимо

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_2^2 \right) = 0; \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

У статті знайдено розв'язок задачі для нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння і різних умов спряження шару і півпростору з початковими напруженнями, причому задача розв'язана у загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової).

У випадку нежорсткого контакту перетворені рівняння представлені таким

чином

$$\begin{aligned}
 & -ik^3\alpha_{21}^{(1)}\chi^F + ik\alpha_{21}^{(2)}\frac{d^2\chi^F}{dy_2^2} = 0; \\
 & k^2\theta_3 \left(k^2\beta_1 - \beta_2\frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F + \left(k^2\alpha_{22}^{(1)} - \alpha_{22}^{(2)}\frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d\chi^F}{dy_2} - 2ikkh\varphi^F = p_2^F; \\
 & 2ikk \left(-k^2\beta_1 - \beta_2\frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F - (k^2\theta_2 + 2\kappa) \varphi^F = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогічно записуються у просторі зображень рівняння руху і граничні умови, представлені через потенціали Φ і ψ . Перетворені хвильові рівняння руху записані у такому вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_1^2 \right) \Phi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_2^2 \right) \psi^F = 0. \tag{6}$$

Розв'язок перетвореного рівняння (4) з врахуванням затухання на нескінченності знайдено у вигляді

$$\chi^F = Ae^{k_1k\eta_1y_2} + Be^{k_2k\eta_2y_2}, \tag{7}$$

де A і B – постійні інтегрування. Тут $k_j \equiv \sigma = \frac{|k|}{k}$, якщо $\eta_j^2 > 0$ і $k_j = i$, якщо $\eta_j^2 < 0$. У випадку коли η_j приймає комплексне значення, то у зображенні (7) треба покласти $k_j = 1$; $\eta_j = \sigma Re\eta_j - (-1)^j Im\eta_j$, $j = 1, 2$. Розв'язок для потенціалів Φ^F і ψ^F , з врахуванням (6), знаходиться у вигляді

$$\Phi^F = A_0e^{k_1k\eta_1y_2}; \quad \psi^F = B_0e^{k_2k\eta_2y_2}, \tag{8}$$

де A_0 і B_0 – постійні інтегрування. В результаті знайдені критичні швидкості руху навантаження у випадку стисливого півпростору з пружним потенціалом гармонічного типу (нерівні корені). Аналогічно досліджено вплив початкових напружень, механічних характеристик пластини і півпростору, умов їх спряження на значення критичних швидкостей руху навантаження у випадку нестисливого півпростору з пружним потенціалом Бартенєва-Хазановича. На основі одержаних чисельних результатів для докритичних швидкостей руху поверхневого навантаження зроблені наступні висновки. При жорсткому контакті напруження, швидкості переміщень у півпросторі і згинальний момент у пластині менший, ніж при нежорсткому. Значення параметрів напружено-деформованого стану у конкретній точці шаруватого тіла залежить як від початкових напружень, так і від її координат. При цьому в досліджуваному діапазоні значень λ_1 темп зростання амплітуди розглянутих величин при стиску більший, ніж при розтягу. Затухання при віддаленні від точки прикладання навантаження для стиску проходить повільніше, ніж при розтягу. Вплив початкових напружень значно збільшується із зростанням швидкості руху навантаження. Особливо останнє має місце при попередньому стиску. При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень значно менший, ніж при нежорсткому контакті. Якщо врахування інерції обертання в рамках розглянутих швидкостей руху поверхневого навантаження і значень λ_i у випадку жорсткого контакту вносить незначну похибку (менше 2,6%), то у випадку нежорсткого контакту відмінність у результатах буде досить суттєвою (до 30%). Особливо необхідно враховувати інерцію обертання при $\lambda_1 < 1$ і великих швидкостях руху навантаження.

Із аналізу одержаних результатів випливає, що для двохшарового півпростору із нестисливого матеріалу можна зробити ті ж самі висновки, що і для двохшарового стисливого півпростору. Вплив початкових напружень на значення критичних швидкостей руху навантаження більш суттєвий для порівняно м'яких пластин і для нежорсткого контакту. При нежорсткому контакті резонанс виникає при меншій швидкості руху навантаження, ніж при жорсткому контакті. Чим м'якша пластина у порівнянні з півпростором, тим менші у неї критичні швидкості руху навантаження у порівнянні з швидкістю хвиль Релея V_R .

В роботі визначено реакцію на рухоме навантаження двохшарового пружного півпростору з початковими напруженнями з використанням комплексних потенціалів. Із застосуванням комплексних потенціалів в загальній формі для стисливих і нестисливих пружних тіл у роботі дана постановка задачі про рух двохшарового пружного півпростору з початковими напруженнями під дією рухомого поверхневого навантаження. Для плоских динамічних задач у пружних тіл з початковими напруженнями, коли дані динамічні задачі можуть бути зведені до стаціонарних задач у рухомій системі координат, яка рухається прямолінійно з постійною швидкістю, розв'язок можна побудувати через комплексні потенціали. В роботі використано метод М.І. Мусхелішвілі, який пов'язаний з інтегралами типу Коші для півплощини. У цьому випадку для стисливих тіл задача зведена до рівняння

$$\frac{\partial^4 \chi^j}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = 0; j = 1, 2 \quad (9)$$

У (9) комплексні змінні мають вигляд

$$z_j = y_1 + \mu_j y_2; \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\mu}_j y_2. \quad (10)$$

Для рівних коренів ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) характеристичного рівняння загальний розв'язок рівняння (9) можна зобразити у такому вигляді

$$\chi^{(j)} = Re \left[F_1^{(j)}(z_1) + \bar{z}_1 F_2^{(j)}(z_1) \right]. \quad (11)$$

Якщо ввести нові аналітичні функції

$$F_j^{(1)'}(z_1) = \mu_1 \varphi_j(z_1); \quad F_j^{(2)'}(z_1) = \varphi_j(z_1); \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

то після деяких перетворень одержимо зображення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\varphi_j(z_1)$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{kj} &= Re \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\varphi_1''(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2''(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \varphi_2'(z_1) \right\}; \\ u_k &= Re \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\varphi_1'(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2'(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \varphi_2(z_1) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нерівних коренів ($\mu_1 \neq \mu_2$) загальний розв'язок (9) знаходиться у вигляді

$$\chi = 2Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad (14)$$

де $F_j(z_j)$ – довільні аналітичні функції комплексних змінних z_j . Після введення нових аналітичних функцій

$$F_j''(z_j) = \Phi_j(z_j) \quad (15)$$

одержимо зображення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\Phi_j(z_j)$ у такому вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{ij} &= 2Re \left[\gamma_{ij}^{(1)} \Phi_1'(z_1) + \gamma_{ij}^{(2)} \Phi_2'(z_2) \right]; \\ u_k &= 2Re \left[\gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2) \right]; \quad i, j, k = 1, 2.\end{aligned}\quad (16)$$

В (16) введені наступні позначення коефіцієнтів, які входять у вирази для напружень і переміщень

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^{(k)} &= \mu_k \left(\alpha_{ij}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{ij}^{(2)} \right); \quad \gamma_{jj}^{(k)} = \alpha_{ij}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{ij}^{(2)}; \\ y_1^{(j)} &= -\mu_j; \quad y_2^{(j)} = \beta_1 + \mu_j^2 \beta_2; \quad i, j, k = 1, 2; \quad i \neq j,\end{aligned}\quad (17)$$

де параметри β_j і $\alpha_{ij}^{(k)}$ визначаються із виразів, які входять в комплексні потенціали.

Відносно поведінки потенціалів $\Phi_j(z_\gamma)$, $\varphi_\gamma(z_j)$ на нескінченності приймалися такі ж самі обмеження, як і в лінійній теорії пружності. Критичні швидкості руху навантаження визначались із умови існування дійсних додатних кратних коренів характеристичного рівняння відповідних диференціальних рівнянь. Таким чином, в роботі застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримані результати аналогічні тим, які були одержані методом інтегральних перетворень Фур'є. Крім висновків, сформульованих вище (на основі чисельних розрахунків) для плоских задач руху двохшарового пружного півпростору з початковими напруженнями із стисливого і нестисливого матеріалу при дії рухомого навантаження можна ще зробити і такі. При заданих параметрах завжди можна знайти область значень λ_1 , для яких існують критичні швидкості руху навантаження. Для швидкостей руху навантаження більших швидкості поширення хвиль зсуву у півпросторі присутність початкових напружень має більш суттєвий вплив на розподіл напружень і швидкостей переміщень у півпросторі і згинального моменту у пластині. Характер цього впливу різний в залежності від розташування розглядуваної точки шаруватого тіла відносно точки прикладення навантаження.

Крім цього в даній статті досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння, що відповідають рівнянням руху елементів шаруватого півпростору. Проведена оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказані необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для матеріалів з гармонічним потенціалом (стисливі тіла) із потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (нестисливі тіла) виконані чисельні дослідження.

5. Висновки. На основі аналіза одержаних числових результатів встановлені наступні механічні ефекти;

- 1) Значення критичних швидкостей руху навантаження і їх кількість суттєво залежить від початкових напружень у півпросторі, механічних характеристик пластини і півпростору і умов їх контакту. При жорсткому з'єднанні пластини з півпростором можливе існування двох критичних швидкостей руху навантаження, у крайньому випадку, одна із яких більша за швидкість хвиль Релея.
- 2) Вплив початкових напружень на значення критичних швидкостей руху навантаження більш суттєве для м'яких пластин і для нежорсткого контакту. Чим м'якше пластина у порівнянні з півпростором, тим менша у неї критична швидкість у порівнянні з швидкістю хвиль Релея. Значення найменшої

критичної швидкості при жорсткому контакті завжди більша ніж при нежорсткому.

- 3) Для заданих параметрів завжди можна знайти область значень λ_1 , для яких існують критичні швидкості руху навантаження.
- 4) Вплив початкових напружень значно збільшується із ростом швидкості руху навантаження. Особливо це має місце при попередньому стиску. При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень менш суттєвий, ніж при нежорсткому контакті.
- 5) Для швидкостей руху навантаження, які більші за швидкість розповсюдження зсувних хвиль у півпросторі, присутність початкових напружень має суттєвий вплив на розподіл напружень і швидкостей переміщень у півпросторі і згинального момента у пластині. Характер цього впливу різний в залежності від положення розглядуваної точки шаруватого тіла відносно точки прикладання навантаження. Отримані дослідження напружено-деформованого стану елементів багат шарового заздалегідь деформованого півпростору при дії рухомого поверхневого навантаження.

Список використаної літератури

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
2. Глухов Ю. П. Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки. *Доп. НАН України*, 2011. № 7. С. 52-57.
3. Глухов Ю. П. Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача. *Доп. НАН України*, 2011. № 11. С. 65-69.
4. Глухов Ю. П. Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании. *Доп. НАН України*, 2011. № 8. С. 48-53.
5. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг: Press-line, 2007. 795 с.
6. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
7. Babich S. Yu., Gluchov Yu. P. Bending a Plate on Prestressed Elastic Foundation under Live Static Load. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol 53, № 3. С. 287-299.
8. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Поведение пластины, лежащей на предварительно напряженном полупространстве при воздействии подвижной нагрузки. *Системні технології. Регіональний міжвузівський вісник наукових праць*. Випуск 4 (57). Дніпропетровськ, 2008. С. 55-60.
9. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Влияние начальных напряжений и подвижной нагрузки на распределение скоростей перемещений в двухслойном предварительно напряженном полупространстве. *VII міжнар. симпозиум 'Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. Львів: Каменярь, 1998. С. 120-125.
10. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамическая задача для двухслойного полупространства с начальными напряжениями. *Наук. Вісник Мукачівського державного університету*. Мукачево, 2011. № 11. С. 24-51.
11. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Про одну динамічну задачу для шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. Львів: Каменярь, 2014. № 10. С. 6-15.
12. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамика двухслойного полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки. *Наук. вісник Мукачівського державного університету*. Мукачево, 2016. № 21 (16). С. 7-20.
13. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Про одну динамічну задачу для багат шарового півпростору з початковими напруженнями. *Прикладна механіка*. 2021. Т. 57, №1. С. 53-63.
14. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 1. Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних гра-

ниць (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. 2021. Т. 38, № 1. С. 105-113.

15. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. 2021. Т. 38, №1. С. 114-122.

Babych S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F. Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 3. Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial stresses under the action of moving loads.

Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial tensions under the influence of a moving load are investigated. These tasks are solved by the method of integral transformations and with the help of comprehensive potentials introduced in the works of academician of the National Academy of Sciences of Ukraine Geors O. and one of the authors of this article. The evaluation of the possible values of the roots of the characteristic equation is carried out. The necessary and sufficient conditions for the existence of multiple roots of the characteristic equation are obtained. It is believed that the picture of the deformation of the invariant time in the coordinate system moving along with the load. In other words, an elastic multilayer is considered, consisting of flat parallel elastic layers, lies on a half-space. The free surface of the strip has a load moving at a constant speed. Studies conducted within the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses. For materials with elastic potentials of harmonic type (compression bodies) and with elastic potentials of the type Barteneva-Khazanovich (uncompressed bodies), numerous studies were performed. Analysis of the results of the essential impact of initial (residual) deformations and speed of surface loading on the value of the roots of the characteristic equation. In addition, it is proved that it is always possible to find the area of values (coefficients) of elongation for which there are critical speed of loading. In particular, with a rigid connection of a plane with a half-space, it is possible to exist two critical load rates, in the extreme case, one of which is larger than the speed of the surface waves of the relay. The obtained results can be used to investigate the stress-deformed state of elements of a multilayer pre-deformed half-space under the action of a moving surface load.

Keywords: contact tensions, complex potentials, phase speeds, hard stamps, moving loads, relay waves, stress-deformed state.

References

1. Guz', A. N. (2004). Uprugie volny v telakh s nachalnymi (ostatocnymi) napryazheniyami [Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses]. Kyiv: A.S.K. [in Russian].
2. Glukhov, Yu. P. (2011). Mnogosloynaya predvaritel'no napryazhennaya poluploskost' pri vozdeystvii podvizhnoy nagruzki [Multilayer prestressed half-plane under the action of a moving load]. *Dop. NAN Ukrainian*, 7, 52-57 [in Russian].
3. Glukhov, Yu. P. (2011). Mnogosloynaya predvaritel'no napryazhennaya plita na zhestkom osnovanii pri vozdeystvii podvizhnoy nagruzki. Ploskaya zadacha [Multilayer prestressed slab on a rigid base under the action of a moving load. A flat task]. *Dop. NAN Ukrainian*, 11, 65-69 [in Russian].
4. Glukhov, Yu. P. (2011). Ob odnoy dinamicheskoy zadache dlya mnogoslonoynoy plity na zhestkom osnovanii [About one dynamic problem for a multilayer slab on a rigid base]. *Dop. NAN Ukrainian*, 8, 48-53 [in Russian].
5. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007). Statika i dinamika uprugikh osnovaniy s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami [Statics and dynamics of elastic bases with initial (residual) stresses]. Kremenchug: Press-line [in Russian].
6. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].

7. Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2017). Bending a Plate on Prestressed Elastic Foundation under Live Static Load. *Int. Appl. Mech.*, 53(3), 287-299.
8. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2008). Povedenie plastiny, lezhashchey na predvaritel'no napryazhennom poluprostranstve pri vozdeystvii podvizhnoy nagruzki [Behavior of a plate lying on a prestressed half-space under the action of a moving load]. *System technologies. Regional interuniversity bulletin of scientific works*, 4(57), 55-60 [in Russian].
9. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (1998). Vliyanie nachal'nykh napryazheniy i podvizhnoy nagruzki na raspredelenie skorostey peremeshcheniy v dvukhsloynnom predvaritel'no napryazhennom poluprostranstve [Influence of initial stresses and mobile load on the distribution of velocities in a two-layer prestressed half-space]. *International symposium 'Mechanics and physics of destruction of building materials and structures. L'viv* (pp. 120-125) [in Russian].
10. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2011). Dinamicheskaya zadacha dlya dvukhsloynogo poluprostranstva s nachal'nymi napryazheniyami [A dynamic problem for a two-layer half-space with initial stresses]. *Scientific Bulletin of the Mukachevo State University*, 11, 24-51 [in Ukrainian].
11. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2014). Pro odnu dynamichnu zadachu dlja sharuvatogho nestyslyvogho pivprostoru z pochatkovymy napruzhenjamy [About one dynamic problem for a layered incompressible half-space with initial stresses]. *Mekhanika i fizyka ruznuvannja budivel'nykh materialiv ta konstrukcij*, 10, 6-15 [in Ukrainian].
12. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2016). Dynamics of a two-layer half-space with initial stresses under the influence of a moving load. *Scientific Bulletin of the Mukachevo State University*, 21(16), 7-20 [in Russian].
13. Babych, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2021). About one dynamic problem for a multilayer half-space with initial stresses. *Applied mechanics*, 57(1), 53-63 [in Ukrainian].
14. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2021). Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 1. Surface Rayleigh waves along curvilinear boundaries (cylinder, sphere) of prestressed bodies. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 38(1), 105-113 [in Ukrainian].
15. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2021). Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 2. Flat dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 38(1), 114-122 [in Ukrainian].

Одержано 02.06.2021