УДК 517.5
DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).82-93

Р. В. Хаць

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри математики,
кандидат фізико-математичних наук
khats@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СПЕЦІАЛЬНОГО КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ

Встановлено рівномірні асимптотичні оцінки логарифмічної похідної, логарифму модуля та логарифму спеціального канонічного добутку з покращеним розподілом нулів на скінченній системі променів з точністю до обмеженої величини зовні деяких виняткових множин. Крім того, досліджено асимптотичну поведінку похідної спеціального канонічного добутку в його нулях. При цьому, отримано нові асимптотичні співвідношення для лічильних функцій послідовностей нулів цього канонічного добутку.

Ключові слова: виняткова множина, лічильна функція нулів, покращений розподіл нулів, скінченна система променів, спеціальний канонічний добуток, ціла функція.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $n(t)=\sum_{\lambda_n\le t}1$ – лічильна функція послідовності $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (див. [1: 19], [2: 58]),

$$N(r)=\sum_{\lambda_n\le r}\log\frac{r}{\lambda_n}=\int_0^r\frac{n(t)}{t}dt, r>0,$$

– Неванліннова (усереднена) лічильна функція послідовності $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ([1: 19]), і

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^m}{\lambda_n^m}\right), m\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Функцію $\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg f(z),\ \ z=re^{i\varphi}$, вважатимемо визначеною за формулою ([7])

$$\log f(z)=\int_0^z\frac{f'(w)}{f(w)}dw, z\in\mathbb{C}\backslash\left(\bigcup_{s=0}^{m-1}\left\{z:\arg z=\frac{2\pi s}{m},|z|\ge\lambda_1\right\}\right),\quad \log f(0)=0.$$

Цілі функції вигляду (1) відіграють важливу роль в теорії рядів Діріхле [2–4], теорії цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1, 2, 5, 6], теорії цілих функцій покращеного регулярного зростання [7–22], тауберовій теорії [23], при дослідженні базисів із систем експонент і розв'язуванні деяких інтерполяційних задач [1–4, 24, 25]. Асимптотичні властивості таких цілих функцій досліджено в працях багатьох математиків (див. [1–13, 23–25]). Зокрема, добре відомо ([2: 70]), що якщо послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову $n(t)=\Delta t^\rho+o(t^\rho)$ $(t\to+\infty)$, де $\Delta\in(0;+\infty)$,

$\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$, то для канонічного добутку (1) для кожного $\delta \in (0; \pi/2)$ рівномірно за $\varphi \in \left[\delta; \frac{2\pi}{m} - \delta\right]$ виконується співвідношення

$$\log\left|f(re^{i\varphi})\right| = \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^{\rho} \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right) + o(r^{\rho}), \quad r \to +\infty, \quad \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{m}\right).$$

Крім цього, якщо послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє додаткову умову $\lambda_{n+1} - \lambda_n > c{\lambda_n}^{1-\rho}$, $c > 0$, то ([2: 71])

$$\log|f'(\lambda_n)| \geq \pi\Delta\lambda_n^{\rho} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + o(\lambda_n^{\rho}), \quad n \to +\infty.$$

За інших умов на нулі цілої функції (1) можна отримати точніші асимптотичні оцінки (див. [4, 7–25]). Зокрема, в [7] доведено, що якщо $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $\rho_1 \in (0; \rho)$, $m > \rho$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову $n(t) = \Delta t^{\rho} + o(t^{\rho_1})$ $(t \to +\infty)$, то для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in \bigcup\limits_{s=0}^{m-1} \left(\frac{2\pi s}{m}; \frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$ виконується

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} e^{-i\frac{\pi\rho}{m}} r^{\rho} e^{i\rho\varphi} + \frac{o(r^{\rho_1})}{\left|\sin\frac{m\varphi}{2}\right|}, \quad r \to +\infty.$$

Крім цього ([7]), якщо послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє додаткову умову

$$(\exists n_0 > 0)\,(\forall n \geq n_0) : \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

то

$$\log|\lambda_n f'(\lambda_n)| \geq \pi\Delta\lambda_n^{\rho} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + o(\lambda_n^{\rho_1}), \quad n \to +\infty.$$

Метою статті є вивчення асимптотичних властивостей спеціальних канонічних добутків вигляду (1) з покращеним розподілом нулів (див. нижче умову (2)), що передбачає вирішення таких задач: отримання рівномірних асимптотичних оцінок логарифмічної похідної, логарифму модуля та логарифму цілої функції (1) з точністю до обмеженої величини зовні деяких виняткових множин; встановлення нових асимптотичних співвідношень для лічильних функцій послідовностей нулів; дослідження асимптотичної поведінки похідної цілої функції (1) в її нулях.

2. Основні результати. Через $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ позначатимемо деякі додатні сталі. Основними результатами даної статті є наступні твердження, які доповнюють результати робіт [7–22].

Теорема 1. *Нехай* $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ *і неспадна до* $+\infty$ *послідовність додатних чисел* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умову*

$$N(t) = \frac{\Delta}{\rho} t^{\rho} + O(1), \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

Тоді для цілої функції (1) *для кожного* $\delta \in (0; \pi/2)$ *рівномірно відносно* $\varphi \in \bigcup\limits_{s=0}^{m-1} \left[\frac{2\pi s}{m} + \delta; \frac{2\pi(s+1)}{m} - \delta\right]$ *виконується*

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^{\rho} e^{i\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right)} + O(1), \quad r \to +\infty. \tag{3}$$

Доведення. Нехай $z=re^{i\varphi}$ і $\varphi\in\bigcup\limits_{s=0}^{m-1}\left(\frac{2\pi s}{m};\frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$. Тоді, за умови (2), двічі інтегруючи частинами, маємо

$$\log f(re^{i\varphi})=-m^2z^m\int_0^{+\infty}\frac{t^{m-1}}{(t^m-z^m)^2}N(t)dt+O(1)=$$

$$=-\frac{\Delta}{\rho}m^2r^me^{im\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\rho+m-1}}{(t^m-r^me^{im\varphi})^2}dt-$$

$$-m^2r^me^{im\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{O(t^{m-1})}{(t^m-r^me^{im\varphi})^2}dt+O(1):=$$

$$=I_1+I_2+O(1),r\to+\infty. \tag{4}$$

Нехай $t=rx^{\frac{1}{m}}$. Згідно з теорією лишків (див. [5: 94]), отримаємо

$$I_1=-\frac{\Delta}{\rho}mr^\rho e^{im\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\rho}{m}}}{(x-e^{im\varphi})^2}dx=$$

$$=-\frac{\Delta}{\rho}mr^\rho e^{im\varphi}\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\frac{\rho}{m}i}}\underset{x=e^{im\varphi}}{res}x^{\frac{\rho}{m}}\frac{1}{(x-e^{i\varphi m})^2}=\frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)}r^\rho e^{i\rho\left(\varphi-\frac{\pi}{m}\right)}. \tag{5}$$

Далі,

$$|I_2|\le c_1\int_0^{+\infty}\frac{u^{m-1}}{|u^m-e^{im\varphi}|^2}du=c_1\int_0^{+\infty}\frac{u^{m-1}}{u^{2m}-2u^m\cos m\varphi+1}du\le$$

$$\le c_1\int_0^{+\infty}\frac{u^{m-1}}{u^{2m}-2u^m\cos m\delta+1}du=c_2<+\infty. \tag{6}$$

Таким чином, з (4)–(6) отримуємо (3). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\Delta\in[0;+\infty)$, $\rho\in(0;+\infty)$, $m>\rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову (2). Тоді для цілої функції (1) для кожного $\delta\in(0;\pi/2)$ рівномірно відносно $\varphi\in\bigcup\limits_{s=0}^{m-1}\left[\frac{2\pi s}{m}+\delta;\frac{2\pi(s+1)}{m}-\delta\right]$ виконується*

$$\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}=\frac{\pi\Delta\rho}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)}e^{-i\frac{\pi\rho}{m}}r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}+O(1),r\to+\infty. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $z=re^{i\varphi}$ і $\varphi\in\bigcup\limits_{s=0}^{m-1}\left(\frac{2\pi s}{m};\frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$. Тоді, за умови (2), двічі інтегруючи частинами, при $r\to+\infty$ отримуємо

$$\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}=m^3z^{m-1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{m-1}z^m+t^{2m-1}}{(z^m-t^m)^3}N(t)dt=$$

$$=\frac{\Delta}{\rho}m^3z^{m-1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\rho+m-1}z^m+t^{\rho+2m-1}}{(z^m-t^m)^3}dt+m^3z^{m-1}\int_0^{+\infty}\frac{O(t^{m-1})z^m+O(t^{2m-1})}{(z^m-t^m)^3}dt=$$

$$=\frac{\Delta}{\rho}m^3r^{\rho-1}e^{i(m-1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho+m-1}e^{im\varphi}+u^{\rho+2m-1}}{(e^{im\varphi}-u^m)^3}du+$$

$$+m^3r^{-1}e^{i(m-1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{O(u^{m-1})e^{im\varphi}+O(u^{2m-1})}{(e^{im\varphi}-u^m)^3}du:=J_1+J_2. \tag{8}$$

Нехай $u=x^{\frac{1}{m}}$, $du=\frac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}dx$. Тоді, подібно як вище, отримаємо

$$J_1=\frac{\Delta}{\rho}m^2r^{\rho-1}e^{i(m-1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\rho}{m}}e^{im\varphi}+x^{\frac{\rho}{m}+1}}{(e^{im\varphi}-x)^3}dx=\frac{\Delta}{\rho}m^2r^{\rho-1}e^{i(m-1)\varphi}\times$$

$$\times\left(\frac{2\pi ie^{im\varphi}}{1-e^{2\pi\frac{\rho}{m}i}}\underset{x=e^{im\varphi}}{res}\frac{x^{\frac{\rho}{m}}}{(e^{im\varphi}-x)^3}+\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\left(\frac{\rho}{m}+1\right)i}}\underset{x=e^{im\varphi}}{res}\frac{x^{\frac{\rho}{m}+1}}{(e^{im\varphi}-x)^3}\right)=$$

$$=\frac{\pi\Delta\rho}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)}e^{-\pi\frac{\rho}{m}i}r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}. \tag{9}$$

До того ж, аналогічно як у доведенні теореми 1, одержимо

$$|J_2|\le c_3r^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{m-1}+u^{2m-1}}{|e^{im\varphi}-u^m|^3}du\le c_4r^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2m-1}}{\left(u^{2m}-2u^m\cos m\varphi+1\right)^{3/2}}du\le$$

$$\le c_4r^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{2m-1}}{\left(u^{2m}-2u^m\cos m\delta+1\right)^{3/2}}du=c_5<+\infty, r>0. \tag{10}$$

Таким чином, з (8)–(10) випливає (7). Теорему 2 доведено.

Лема 1. *Нехай $\Delta\in[0;+\infty)$, $\rho\in(0;+\infty)$, $m>\rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову*

$$N(t)=\frac{\Delta}{\rho}t^\rho+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right),\quad t\to+\infty. \tag{11}$$

Тоді

$$n(t)=\Delta t^\rho+O(1),\quad t\to+\infty. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $r=t+c_6t^{1-\rho}$. Тоді при $t\to+\infty$

$$n(t)\le\frac{N(r)-N(t)}{\ln(r/t)}=$$

$$=\frac{\frac{\Delta}{\rho}\left(t+c_6t^{1-\rho}\right)^\rho-\frac{\Delta}{\rho}t^\rho+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}{\ln\left(1+\frac{c_6}{t^\rho}\right)}=\frac{\frac{\Delta}{\rho}t^\rho\left(\left(1+\frac{c_6}{t^\rho}\right)^\rho-1\right)+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}{\frac{c_6}{t^\rho}+O\left(\frac{1}{t^{2\rho}}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\Delta}{\rho}t^\rho\left(1+\rho\frac{c_6}{t^\rho}+O\left(\frac{1}{t^{2\rho}}\right)-1\right)+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}{\frac{c_6}{t^\rho}+O\left(\frac{1}{t^{2\rho}}\right)}=\frac{\frac{\Delta}{\rho}t^\rho\left(\rho+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)\right)+O(1)}{1+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}=$$

$$=(\Delta t^\rho+O(1))\left(1+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)\right)=\Delta t^\rho+O(1)+O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)=\Delta t^\rho+O(1).$$

З іншого боку, взявши $t=r-c_6r^{1-\rho}$, при $r\to+\infty$ отримаємо

$$n(r)\ge\frac{N(r)-N(t)}{\ln(r/t)}=\frac{\frac{\Delta}{\rho}r^\rho-\frac{\Delta}{\rho}\left(r-c_6r^{1-\rho}\right)^\rho+O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)}{-\ln\left(1-\frac{c_6}{r^\rho}\right)}=$$

$$= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(1 - \left(1 - \frac{c_6}{r^\rho}\right)^\rho\right) + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)}{\frac{c_6}{r^\rho} + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\rho \frac{c_6}{r^\rho} + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)}{\frac{c_6}{r^\rho} + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\rho + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)\right) + O(1)}{1 + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)} = (\Delta r^\rho + O(1)) \left(1 + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)\right) = \Delta r^\rho + O(1).$$

З обидвох останніх нерівностей випливає (12). Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$ і $m > \rho$. Тоді умова (12) є еквівалентною до умови*

$$\lambda_m^\rho = \frac{m}{\Delta} + O(1), \quad m \to +\infty. \tag{13}$$

Доведення. Нехай $\lambda_m \le t < \lambda_{m+1}$. Тоді при $t \to +\infty$, маємо $n(t) = m = \Delta \lambda_m{}^\rho + O(1) \le \Delta t^\rho + O(1)$ і $n(t) = m + 1 - 1 = \Delta \lambda_{m+1}^\rho + O(1) - 1 \ge \Delta t^\rho + O(1)$. Отже, з (13) випливає (12). Навпаки, якщо виконується (12), то $m \le n(\lambda_m) = \Delta \lambda_m^\rho + O(1)$, $m \to +\infty$. З іншого боку,

$$m \ge n\left(\lambda_m - c_7 \lambda_m^{1-\rho}\right) = \Delta \left(\lambda_m - c_7 \lambda_m^{1-\rho}\right)^\rho + O(1) = \Delta \lambda_m^\rho \left(1 - \frac{c_7}{\lambda_m^\rho}\right)^\rho + O(1) =$$

$$= \Delta \lambda_m^\rho \left(1 - \frac{\rho c_7}{\lambda_m^\rho} + O\left(\frac{1}{\lambda_m^{2\rho}}\right)\right) + O(1) = \Delta \lambda_m^\rho + O(1), \quad m \to +\infty.$$

Отже, виконується умова (13). Лему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (11). Тоді для цілої функції* (1) *за деякого $c_8 > 0$ і кожного $c_0 > \max\left\{\frac{mc_8}{\Delta\rho}; \frac{m(1-c_8)}{\Delta\rho}\right\}$ виконується*

$$\log m_f(r) = \log |f(r)| \ge \pi \Delta r^\rho \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + O(1), \tag{14}$$

при $E_0 \not\ni r \to +\infty$, де $E_0 = \left\{r : |\lambda_k^m - r^m| \le c_0 \lambda_k^{m-\rho}\right\}$.

Доведення. Якщо виконується умова (11), то за лемами 1 і 2, правильними є нерівності $\lambda_k^\rho = \frac{k}{\Delta} + O(1) \ge \frac{k}{\Delta} - \frac{c_8}{\Delta}$ і $\lambda_n^\rho = \frac{n}{\Delta} + O(1) \le \frac{n}{\Delta} + \frac{c_8}{\Delta}$. З останніх двох нерівностей, отримаємо

$$(\exists c_8 > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \ge n_0)\,(\forall k \ge n) : \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \le \left(\frac{n + c_8}{k - c_8}\right)^{1/\rho}. \tag{15}$$

Далі,

$$\log |f(r)| = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left|1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m}\right| =$$

$$= m \sum_{\lambda_n \le r} \log \frac{r}{\lambda_n} + \sum_{\lambda_n \le r} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m}\right) + \sum_{\lambda_n > r} \log\left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m}\right) =$$

$$= mN(r) + \sum_{\lambda_n \le r} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m}\right) + \sum_{\lambda_n > r} \log\left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m}\right). \tag{16}$$

Нехай $\lambda_k \le r < \lambda_{k+1}$. Тоді, використовуючи (15), отримуємо

$$\sum_{\lambda_n \le r} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m}\right) = \sum_{n=1}^{k} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m}\right) = -\sum_{n=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_n}{r}\right)^{mj} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{r}\right)^{mj} \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{mj} \ge -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{r}\right)^{mj} \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{n+c_8}{k-c_8}\right)^{mj/\rho} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{r(k-c_8)^{1/\rho}}\right)^{mj} \sum_{n=1}^{k}(n+c_8)^{mj/\rho},$$

і, подібно,

$$\sum_{\lambda_n > r} \log\left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m}\right) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m}\right) = -\sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^{mj} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{r}{\lambda_{k+1}}\right)^{mj} \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_n}\right)^{mj} \ge$$

$$\ge -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{r}{\lambda_{k+1}}\right)^{mj} \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{k+1-c_8}{n+c_8}\right)^{mj/\rho} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1}}\right)^{mj} \sum_{n=k+1}^{\infty}(n+c_8)^{-mj/\rho}.$$

Позаяк функції $(k+x)^{\nu}$ і $(k+x)^{-\nu}$ з $\nu > 1$ є опуклими на $(-k; +\infty)$, то для $t \in [-1/2; 1/2]$, подібно до [5: 247] (див. також [8]), маємо

$$(n+c_8)^{\nu} = \left(n - \frac{1}{2} + c_8 + \frac{1}{2}\right)^{\nu} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^{\nu}\left(1 + \frac{c_8 + 1/2}{n - 1/2}\right)^{\nu} =$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)^{\nu}\left(1 + \nu\frac{c_8 + 1/2}{n - 1/2}(1 + o(1))\right) \le \left(n - \frac{1}{2}\right)^{\nu} + c_8\left(n - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{(n - 1/2 + t)^{\nu} + (n - 1/2 - t)^{\nu}\right\} + \frac{c_9}{2}\left\{(n - 1/2 + t)^{\nu-1} + (n - 1/2 - t)^{\nu-1}\right\},$$

і, аналогічно,

$$(n+c_8)^{-\nu} \le \frac{1}{2}\left\{\,(n - 1/2 + t)^{-\nu} + (n - 1/2 - t)^{-\nu}\right\} +$$

$$+\frac{c_{10}}{2}\left\{\,(n - 1/2 + t)^{-\nu-1} + (n - 1/2 - t)^{-\nu-1}\right\}.$$

Інтегруючи першу з цих нерівностей по t в межах від 0 до 1/2, отримуємо

$$(n+c_8)^{\nu} \le \int_0^{1/2}\left\{\,(n - 1/2 + t)^{\nu} + (n - 1/2 - t)^{\nu}\right\}\,dt +$$

$$+c_9\int_0^{1/2}\left\{\ (n-1/2+t)^{\nu-1}+(n-1/2-t)^{\nu-1}\right\}\ dt=$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}(n-1/2+u)^{\nu}\,du+c_9\int_{-1/2}^{1/2}(n-1/2+u)^{\nu-1}\,du=\int_{n-1}^{n}t^{\nu}dt+c_9\int_{n-1}^{n}t^{\nu-1}dt,$$

і, аналогічно,

$$(n+c_8)^{-\nu}\leq\int_{n-1}^{n}t^{-\nu}dt+c_{10}\int_{n-1}^{n}t^{-\nu-1}dt.$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{k}(n+c_8)^{mj/\rho}\leq\sum_{n=1}^{k}\left\{\int_{n-1}^{n}t^{mj/\rho}dt+c_9\int_{n-1}^{n}t^{\frac{mj}{\rho}-1}dt\right\}=$$

$$=\int_0^k t^{mj/\rho}dt+c_9\int_0^k t^{\frac{mj}{\rho}-1}dt=\frac{k^{\frac{mj}{\rho}+1}}{\frac{mj}{\rho}+1}+c_9\frac{k^{\frac{mj}{\rho}}}{\frac{mj}{\rho}},$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}(n+c_8)^{-\frac{mj}{\rho}}\leq-\frac{k^{-\frac{mj}{\rho}+1}}{-\frac{mj}{\rho}+1}-c_{10}\frac{k^{-\frac{mj}{\rho}}}{-\frac{mj}{\rho}}.$$

Отже,

$$\sum_{\lambda_n\leq r}\log\left(1-\frac{\lambda_n^m}{r^m}\right)+\sum_{\lambda_n>r}\log\left(1-\frac{r^m}{\lambda_n^m}\right)\geq$$

$$\geq-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{r\,(k-c_8)^{1/\rho}}\right)^{mj}\left(\frac{k^{\frac{mj}{\rho}+1}}{\frac{mj}{\rho}+1}+c_9\frac{k^{\frac{mj}{\rho}}}{\frac{mj}{\rho}}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1}}\right)^{mj}\left(-\frac{k^{-\frac{mj}{\rho}+1}}{-\frac{mj}{\rho}+1}-c_{10}\frac{k^{-\frac{mj}{\rho}}}{-\frac{mj}{\rho}}\right)=$$

$$=-k\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\left(\frac{mj}{\rho}+1\right)}\left(\frac{\lambda_k k^{1/\rho}}{r(k-c_8)^{1/\rho}}\right)^{mj}-c_9\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{mj^2}{\rho}}\left(\frac{\lambda_k k^{1/\rho}}{r(k-c_8)^{1/\rho}}\right)^{mj}-$$

$$-k\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\left(\frac{mj}{\rho}-1\right)}\left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1}k^{1/\rho}}\right)^{mj}-c_{10}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{mj^2}{\rho}}\left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1}k^{1/\rho}}\right)^{mj}. \quad (17)$$

Оскільки $|\lambda_k^m-r^m|\geq c_0\lambda_k{}^{m-\rho}$, то $\lambda_k^m+c_0\lambda_k{}^{m-\rho}\leq r^m\leq\lambda_{k+1}^m-c_0\lambda_k^{m-\rho}$. Крім цього, за умови (11), виконується співвідношення $\lambda_k^{\rho}=\frac{k}{\Delta}+O(1)$, $k\to+\infty$ (див. леми 1 і 2). Тому для $c_0>\frac{mc_8}{\Delta\rho}$ маємо

$$\frac{\lambda_k^m k^{m/\rho}}{r^m\,(k-c_8)^{m/\rho}}\leq\frac{k^{m/\rho}}{\left(1+\frac{c_0}{\lambda_k^{\rho}}\right)(k-c_8)^{m/\rho}}=$$

$$=\frac{k^{m/\rho}}{\left(1+\frac{c_0\Delta(1+o(1))}{k}\right)(k-c_8)^{m/\rho}}=\frac{(k-c_8+c_8)^{m/\rho}}{\left(1+\frac{c_0\Delta(1+o(1))}{k}\right)(k-c_8)^{m/\rho}}=$$

$$= \frac{\left(1+\frac{c_8}{k-c_8}\right)^{m/\rho}}{1+\frac{c_0\Delta(1+o(1))}{k}} = \frac{1+\frac{mc_8}{\rho(k-c_{11})}(1+o(1))}{1+\frac{c_0\Delta}{k}(1+o(1))} = \frac{1+\frac{mc_8}{\rho k}(1+o(1))}{1+\frac{c_0\Delta}{k}(1+o(1))} \leq 1, \quad k\to+\infty.$$

Подібно, для $c_0 > m\frac{1-c_8}{\Delta\rho}$ отримуємо

$$\frac{r^m\,(k+1-c_8)^{m/\rho}}{\lambda_{k+1}^m k^{m/\rho}} \leq \frac{\left(\lambda_{k+1}^m - c_0\lambda_k^{m-\rho}\right)(k+1-c_8)^{m/\rho}}{\lambda_{k+1}^m k^{m/\rho}} \leq$$

$$\leq \left(1-\frac{c_0}{\lambda_k^\rho}\right)\left(\frac{k+1-c_8}{k}\right)^{m/\rho} = \left(1-\frac{c_0\Delta(1+o(1))}{k}\right)\left(1+\frac{1-c_8}{k}\right)^{m/\rho} =$$

$$= \left(1-\frac{c_0\Delta}{k}(1+o(1))\right)\left(1+\frac{1-c_8}{\rho k}m(1+o(1))\right) =$$

$$= 1-\frac{c_0\Delta}{k}(1+o(1)) + \frac{1-c_8}{\rho k}m(1+o(1)) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq 1, \quad k\to+\infty.$$

З огляду на це, з (17) одержимо

$$\sum_{\lambda_n\leq r}\log\left(1-\frac{\lambda_n^m}{r^m}\right) + \sum_{\lambda_n>r}\log\left(1-\frac{r^m}{\lambda_n^m}\right) \geq$$

$$\geq -k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\left(\frac{mj}{\rho}+1\right)} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\left(\frac{mj}{\rho}-1\right)}\right) + O(1), E_0 \not\ni r\to+\infty. \tag{18}$$

Далі, позаяк $\lambda_k^\rho \leq r^\rho < \lambda_{k+1}^\rho$, то $-k \geq -\Delta r^\rho - c_8$. Тому, з (11), (16) і (18), отримуємо

$$\log|f(r)| \geq mN(r) - k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\left(\frac{mj}{\rho}+1\right)} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\left(\frac{mj}{\rho}-1\right)}\right) + O(1) =$$

$$= mN(r) - 2mk\rho\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(mj)^2-\rho^2} + O(1) =$$

$$= \frac{m\Delta}{\rho}r^\rho + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right) - \frac{mk}{\rho}\left(1-\frac{\pi\rho}{m}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)\right) + O(1) \geq$$

$$\geq \frac{m\Delta}{\rho}r^\rho - m\frac{\Delta r^\rho + c_8}{\rho}\left(1-\frac{\pi\rho}{m}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)\right) + O(1) =$$

$$= \pi\Delta r^\rho\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + O(1), E_0 \not\ni r\to+\infty.$$

Таким чином, виконується (14). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $\Delta \in (0;+\infty)$, $\rho \in (0;+\infty)$, $m > \rho$ *і неспадна до* $+\infty$ *послідовність додатних чисел* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умову* (11). *Тоді для цілої* *функції* (1) *за деякого* $c_8 > 0$ *і будь-яких сталих* $c_0 > \max\left\{\frac{mc_8}{\Delta\rho}; \frac{m(1-c_8)}{\Delta\rho}\right\}$ *та* $c_{11} > 0$, *виконується*

$$\log|f(z)| \geq \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right) + O(1), \quad E \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty, \tag{19}$$

де $E = \left\{re^{i\varphi} : |\varphi| > \frac{c_{11}}{r^\rho},\ |\lambda_n^m - r^m| \leq c_0\lambda_n^{m-\rho}\right\}$ *і* $\varphi \in \bigcup\limits_{s=0}^{m-1}\left(\frac{2\pi s}{m}; \frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$.

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{c_{11}}{r^\rho}$ і $|\lambda_n^m - r^m| > c_0\lambda_n^{m-\rho}$. Тоді, згідно з теоремою 3, отримуємо

$$\log\left|f(re^{i\varphi})\right| \geq \log m_f(r) = \pi\Delta r^\rho \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + O(1) =$$

$$= \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right) + \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \left(\cos\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) - \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right)\right) + O(1) \geq$$

$$\geq \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right) - \frac{2\pi\Delta r^\rho}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)}\left|\sin\frac{\rho\varphi}{2}\sin\frac{\rho}{2}\left(\frac{2\pi}{m} - \varphi\right)\right| + O(1) =$$

$$= \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right) + O(1), E \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty.$$

Отож, виконується (19). Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Нехай* $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ *і неспадна до* $+\infty$ *послідовність додатних чисел* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умову (11) і*

$$(\exists k_0)(\forall k \geq k_0)(\forall n \geq k) : \frac{\lambda_k}{\lambda_n} \leq \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{20}$$

Тоді для цілої функції (1) *виконується*

$$\log|\lambda_n f'(\lambda_n)| \geq \pi\Delta\lambda_n^\rho \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + O(1), \quad n \to +\infty. \tag{21}$$

Доведення. Маємо ([2: 108], [4: 70], [7])

$$f'(\lambda_n) = -\frac{m}{\lambda_n}\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq n}}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m}\right).$$

Тому

$$\log|\lambda_n f'(\lambda_n)| = \log m + m\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1 - \frac{\lambda_k^m}{\lambda_n^m}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m}\right).$$

Використовуючи (11), (13) і (20), подібно як в [4: 70] і [7], отримуємо

$$\log|\lambda_n f'(\lambda_n)| = \log m + m\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^{mj} - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{mj} \geq$$

$$\geq m\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{\lambda_n}{\lambda_k}-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{mj}{\rho}}-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{mj}{\rho}}+O(1)\geq$$

$$\geq m\sum_{k=1}^{n-1}\log\frac{\lambda_n}{\lambda_k}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\int_0^n\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\frac{mj}{\rho}}d\xi-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\int_n^{\infty}\left(\frac{n}{\xi}\right)^{\frac{mj}{\rho}}d\xi+O(1)=$$

$$=mN(\lambda_n)-2mn\rho\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\rho^2-(mj)^2}+O(1)=$$

$$=mN(\lambda_n)+n\left(\pi\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)-\frac{m}{\rho}\right)+O(1)=$$

$$=m\left(\frac{\Delta}{\rho}\lambda_n^{\rho}+O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\rho}}\right)\right)+(\Delta\lambda_n^{\rho}+O(1))\left(\pi\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)-\frac{m}{\rho}\right)+O(1)=$$

$$=\pi\Delta\lambda_n^{\rho}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)+O(1),\quad n\to+\infty,$$

тобто виконується (21). Теорему 5 доведено.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті досліджено асимптотичні властивості спеціального канонічного добутку з покращеним розподілом нулів на скінченній системі променів. Зокрема, встановлено рівномірні асимптотичні оцінки логарифмічної похідної, логарифму модуля та логарифму такого канонічного добутку з точністю до обмеженої величини зовні деяких виняткових множин. Крім цього, описано асимптотичну поведінку похідної спеціального канонічного добутку в його нулях. При цьому, отримано нові асимптотичні співвідношення для лічильних функцій послідовностей нулів.

Результати роботи можуть бути використані в теорії цілих функцій регулярного зростання, теорії рядів Діріхле, а також при дослідженні базисів із систем експонент та розв'язуванні деяких інтерполяційних задач.

Список використаної літератури

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. Москва: Гостехиздат, 1956. 632 с.
2. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. Москва: Наука, 1983. 176 с.
3. Леонтьев А. Ф. Представление функций рядами обобщенных експонент. *Матем. сб.* 1987. Т. 134(176), № 4(12). С. 496–510.
4. Винницкий Б. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных систем экспонент. Дрогобич: Деп. в Укр. НИИНТИ, № 277–Ук91, 1991. 195 с.
5. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. Москва: Наука, 1970. 591 с.
6. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Вища школа, 1988. 196 с.
7. Хаць Р. В. Асимптотика спеціальної цілої функції. *Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики.* 2011. № 3. С. 40–42.
8. Vynnyts'kyi B. V, Khats' R. V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one. *Мат. студ.* 2003. Т. 19, № 1. С. 97–105.
9. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 21, № 2. С. 140–150.
10. Хаць Р. В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 22, № 1. С. 105–110.
11. Винницький Б. В, Хаць Р. В. Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів. *Мат. студ.* 2005. Т. 24, № 1. С. 31–38.
12. Khats' R. V. On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Мат. студ.* 2006. Т. 26, № 1. С. 17–24.

13. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені. *Мат. студії.* 2010. Т. 33, № 2. С. 215−219.
14. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки».* 2011. Вип. 718, № 718. С. 5–9. URL: http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12811
15. Khats' R. V. Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки».* 2011. Вип. 718, № 718. С. 10–14. URL: http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12813
16. Хаць Р. В. Регулярність зростання коефіцієнтів Фур'є цілих функцій покращеного регулярного зростання. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, № 12. С. 1717–1723. DOI: https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/2837
17. Khats' R. V. Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Карпатські матем. публ.* 2013. Т. 5, № 1. С. 129–133. DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133
18. Khats' R. V. Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0;2\pi]$. *Карпатські матем. публ.* 2013, Т. 5, № 2. С. 341–344. DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344
19. Khats' R. V. Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Буковин. матем. журн.* 2019, Т. 7, № 1. С. 114−120. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114
20. Khats' R. V. Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Карпатські матем. публ.* 2020. Т. 12, № 1. С. 46−54. DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54
21. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання в $L^q[0;2\pi]$-метриці. *Укр. мат. журн.* 2020, Т. 72, № 4. С. 557−564. DOI: https://doi.org/10.37863/umzh.v72i4.500
22. Khats' R. V. Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0;2\pi]$. *Буковин. матем. журн.* 2021. Т. 9, № 1. С. 49–55. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04
23. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком. Москва: Наука, 1976. 399 с.
24. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1975. Т. 39, № 3. С. 657–702.
25. Любарский Ю. И., Содин М. Л. Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. Харьков: Препр. / ФТИНТ АН УССР; 17–86, 1986. 42 с.

Khats' R. V. Asymptotic behavior of a special canonical product.

We establish asymptotic estimates for the logarithm and logarithmic derivative of a special canonical product with improved zero-distribution on a finite system of rays up to a limited value outside some exceptional sets. Besides, we investigate an asymptotic behavior of the derivative of a special canonical product at its zeros. In addition, we obtain new asymptotic relations for the counting functions of the sequences of zeros of this canonical product.

Keywords: exceptional set, counting function of zeros, improved zero-distribution, finite system of rays, special canonical product, entire function.

References

1. Levin, B. Ya. (1956). Distribution of zeros of entire functions. *Moscow: Nauka* [in Russian].
2. Leont'ev, A. F. (1983). Entire functions. Exponential series. *Moscow: Nauka* [in Russian].
3. Leont'ev, A. F. (1989). Representation of functions by generalized exponential series. *Math. USSR-Sb., 62*(2), 491–505. https://doi.org/10.1070/SM1989v062n02ABEH003250
4. Vinnitskii, B. V. (1991). Some approximation properties of generalized exponential systems. *Drohobych: Preprint 277.* [in Russian].

5. Goldberg, A. A., & Ostrovskii, I. V. (1970). Distribution of values of meromorphic functions. *Moscow: Nauka* [in Russian].
6. Kondratyuk, A. A. (1988). Fourier series and meromorphic functions. *Lviv: Vyshcha shkola* [in Russian].
7. Khats', R. V. (2011). Asymptotics of a special entire function. *Actual problems of physics, mathematics and informatics*, 3, 40–42. [in Ukrainian].
8. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2003). On the asymptotic behavior of entire functions of order less than one. *Mat. Stud., 19*(1), 97–105.
9. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of entire functions of noninteger order. *Mat. Stud., 21*(2), 140–150. [in Ukrainian].
10. Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of canonical product of integer order. *Mat. Stud., 22*(1), 105–110. [in Ukrainian].
11. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2005). On the regularity of growth of an entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud., 24*(1), 31–38. [in Ukrainian].
12. Khats', R. V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud., 26*(1), 17–24.
13. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray. *Mat. Stud., 33*(2), 215–219. [in Ukrainian].
14. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2011). On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky, 718*(718), 5–9. Retrieved from http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12811
15. Khats', R. V. (2011). Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky, 718*(718), 10–14. Retrieved from http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12813
16. Khats', R. V. (2012). Regularity of growth of Fourier coefficients of entire functions of improved regular growth. *Ukr. Math. J., 63*(12), 1953–1960. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0624-2
17. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ., 5*(1), 129–133. https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133
18. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0;2\pi]$. *Carpathian Math. Publ., 5*(2), 341–344. https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344
19. Khats', R. V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J., 7*(1), 114–120. https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114
20. Khats', R. V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ., 12*(1), 46–54. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54
21. Khats', R. V. (2020). Asymptotic behavior of the logarithms of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^q[0;2\pi]$. *Ukr. Math. J., 72*(4), 642–650. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01805-x
22. Khats', R. V. (2021). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0;2\pi]$. *Bukovinian Math. J., 9*(1), 49–55. https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04
23. Subhankulov, M. A. (1976). Tauberian theorems with remainder. *Moscow: Nauka* [in Russian].
24. Levin, B. Ya., & Lyubarskii, Yu. I. (1975). Interpolation by means of special classes of entire functions and related expansions in series of exponentials. *Math. USSR-Izv., 9*(3), 621–662. https://doi.org/10.1070/IM1975v009n03ABEH001493
25. Lyubarskii, Yu. I., & Sodin, M. L. (1986). Analogues of functions of sinusoidal type for convex domains. *Kharkov: Preprint 17, Fiz.-Tekhn. Inst. Nizkikh Temperatur Akad. Nauk Ukr. SSR.* [in Russian].

Одержано 12.01.2022