

УДК 539.3

DOI 10.24144/2616-7700.2022.1(40).146-154

М. М. Діхтярук¹, О. А. Кравчук²

¹ Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
mega-dihtyaruk@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0819-3842>

² Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
kravchukoa2@khmnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6937-5001>

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛЯ ВПЛИВУ ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ І НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ВІД ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

В даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності досліджується вплив пружних переміщень і напружень для пружної смуги з початковим (залишковим) напруженням від дії зосередженої сили. Розглядаються випадки коли сила діє під довільним кутом α , коли на попередньо напружену смугу діє тільки вертикальна сила і випадок дії тільки горизонтальної сили. Отримано систему розв'язуючих інтегрально-диференціальних рівнянь, для пружної смуги з початковими напруженнями підсиленої пружним скінченним стрингером. Для випадків відсутності горизонтальних навантажень, або вертикальних навантажень система зведена до розрахункових інтегрально-диференціальних рівнянь. Всі дослідження виконані в рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл, у випадку пружних потенціалів довільної структури, в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій.

Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд дозволяє більш точно оцінювати запас міцності матеріалу, а отже, суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів в цілому. Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому. Дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл у нашій країні та закордоном появились у достатній кількості лише наприкінці минулого століття. В першу чергу, це пов'язано із тим, що лінійна теорія пружності не враховує наявності у тілах залишкових напружень. У загальному випадку строга постановка таких задач потребує застосування апарату нелінійної теорії пружності, проте, при достатньо великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом. Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів у сукупності із бурхливим розвитком комп'ютерної техніки дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач.

Ключові слова: пружні тіла, контактна задача, граничні умови, функція Дірака.

1. Вступ. Задачі, що виникають при передачі навантаження від накладки скріпленої з пружною смугою (пластиною) – класичної теорії пружності знову привернули увагу у випадках, коли в останній виникають початкові (залишкові) напруження. Особлива необхідність їхнього розгляду виникає в наслідок їхньої важливості при дослідженні конструкцій взагалі і особливо в зв'язку з проектуванням конструкції літальних апаратів. Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд

дозволяє більш точно оцінювати запас міцності матеріалу, а отже, суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів в цілому. Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому. Дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл у нашій країні та закордоном появились у достатній кількості лише наприкінці минулого століття. В першу чергу, це пов'язано із тим, що лінійна теорія пружності не враховує наявності у тілах залишкових напружень. У загальному випадку строга постановка таких задач потребує застосування апарату нелінійної теорії пружності, проте, при достатньо великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом. Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів у сукупності із бурхливим розвитком комп'ютерної техніки дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач.

У дійсній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності викладається постановка і розв'язок змішаної задачі про відшукування функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями (товщини t) від дії зосередженого навантаження $P\delta(y_1)$, в напрямку під кутом α до осі Oy_1 (рис. 1), де $\delta(y_1)$ – одинична функція Дірака.

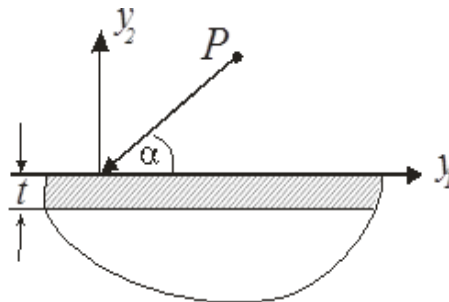


Рис. 1. Пружна смуга з початковими напруженнями.

Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно провести спрощення, зазначені в [1].

2. Граничні умови і вихідні співвідношення. Будемо вважати, що початковий стан у пружній смугі з початковими напруженнями ($-\infty < y_1 < \infty$; $-t \leq y_2 \leq t$) є однорідним і виконуються умови плоскої деформації [1], тобто $\lambda_3 = 1$, $S_{22}^0 = 0$. Дотримуючись [1, 2] дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану y_i , що зв'язані з лагранжевими координатами (природного стану співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2$), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i = \delta_{im} (\lambda_i - 1) \lambda_i^{-1} y_i; \quad \lambda_i = const, \quad (1)$$

u_m^0 – переміщення, яке визначає початковий стан у випадку однорідних початкових напружень.

Розглянемо плоску деформацію однорідного початкового стану, для якого

$$S_0^{11} \neq 0, \quad S_0^{22} = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_3 = 1. \quad (2)$$

Для визначення поля пружних переміщень і напружень (функції впливу) від прикладеної на її грані зосередженої сили $P\delta(y_1)$, прикладеної під кутом α до осі Oy_1 , одержуємо наступні граничні умови на кромці пружної смуги при $y_2 = 0$ (рис. 1).

$$Q_{22}(y_1, 0) = -P \sin \alpha \cdot \delta(y_1); \quad Q_{21}(y_1, 0) = -P \cos \alpha \cdot \delta(y_1) \quad (3)$$

на лінії з'єднання пружної смуги і півплощини при $y_2 = -t$:

$$u_1(y_1, -t) = 0; \quad u_2(y_1, -t) = 0, \quad -\infty < y_1 < \infty \quad (4)$$

Дотримуючись [1, 3], вирази для переміщень і напружень граничних точок смуги з початковими напруженнями у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1], запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_1(y_1, z_j) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(A_1 + A_2) + \alpha z_1 L^-(B_1 + B_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha \\ u_2(y_1, z_j) &= \frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(B_1 + s_1 B_2) + \alpha z_1 L^-(A_1 + s_1 A_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{22}(y_1, z_j) &= \frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha [L^+(A_1 + sA_2) + \\ &\quad + \alpha z_1 L^-(B_1 + sB_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{21}(y_1, z_j) &= -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha [L^+(B_1 + s_0 B_2) + \\ &\quad + \alpha z_1 L^-(A_1 + s_0 A_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha; \end{aligned}$$

Тут

$$z_j = (n_j)^{-\frac{1}{2}} y_2; \quad (j = 1, 2); \quad s_0 = \frac{1 + m_1}{1 + m_2}; \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1}; \quad s_1 = \frac{m_2 - 1}{m_1}.$$

$$L^+(A + Bz) = \begin{cases} (A + Bz) \operatorname{ch} \alpha z_1; & n_1 = n_2; \\ A \operatorname{ch} \alpha z_1 + Bz \operatorname{ch} \alpha z_2; & n_1 \neq n_2; \end{cases} \quad (7)$$

$$L^-(A + Bz) = \begin{cases} (A + Bz) (\alpha z_1)^{-1} \operatorname{sh} \alpha z_1 + B \operatorname{ch} \alpha z_1; & n_1 = n_2; \\ A \operatorname{sh} \alpha z_1 + B (\alpha z_1)^{-1} \operatorname{sh} \alpha z_2; & n_1 \neq n_2; \end{cases} \quad (8)$$

l_i, m_i ($i = 1, 2$), c_{44} – параметри, що визначають початковий напружений стан в пружній смугі, n_i ($i = 1, 2$) – корені визначального рівняння [1].

Задовольнивши граничні умови (3) і (4) з (5) і (6) після ряду перетворень

$$\begin{cases} A_1 + A_2 s = n_0 \\ B_1 + B_2 s_0 = m_0 \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + A_2 (\operatorname{ch} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha t_1) - B_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 - \\ \quad - B_2 (\operatorname{sh} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{ch} \alpha t_1) = 0 \\ A_1 \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha_1 - A_2 (s_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{ch} \alpha t_1) + B_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + \\ \quad + B_2 (s_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha t_1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 s = n_0 \\ B_1 + B_2 s_0 = m_0 \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + A_2 \operatorname{ch} \alpha t_2 + B_1 \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 - B_1 \operatorname{sh} \alpha t_2 = 0 \\ A_1 \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha_1 - A_2 s_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 + B_2 \operatorname{ch} \alpha t_1 + B_2 s_1 \operatorname{ch} \alpha t_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Тут введемо такі позначення:

$$n_0 = -\frac{P\delta(y_1) \sin \alpha_0}{\alpha c_{44} (1 + m_1) l_1}; \quad m_0 = \frac{\varphi_i \sqrt{n_i} \delta(y_1) \cos \alpha_0}{|\alpha| c_{44} (1 + m_1)}; \quad \varphi_i = \frac{\alpha \cdot t}{\sqrt{n_i}}. \quad (11)$$

До систем (9) і (10) застосуємо метод Крамера і розв'язавши знайдемо невідомі коефіцієнти A_i B_i ($i = 1, 2$), що виражаються через параметри, які визначають початковий напружений стан. Вираз для цих коефіцієнтів запишемо відповідно у вигляді:

✓ для рівних коренів визначального рівняння [3, 4, 5] $n_1 = n_2$ знаходимо коефіцієнти A_i B_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ -n_0 \left[-s_1 (s_0 + 1) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 - \varphi_1^2 + (s_1 - s_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + m_0 \left[-s \bar{s}_0 \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 - s l_1 \right] \right\} \xi_1^{-1} \\ A_2 &= \left\{ n_0 \left[(s_1 - s_0) - \bar{s}_1 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 \right] + m_0 \left[\varphi_1 + \bar{s}_1 \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 \right] \right\} \xi_1^{-1} \\ B_1 &= \left\{ -n_0 \left[-s_0 \bar{s}_1 \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 \right] + m_0 \left[s \bar{s}_0 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + \varphi_1^2 - s \bar{s}_1 \right] \right\} \xi_1^{-1} \\ B_2 &= \left\{ n_0 \left[-\bar{s}_1 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + \varphi_1 \right] + m_0 \left[-\bar{s}_1 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + \bar{s} \right] \right\} \xi_1^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

✓ для нерівних коренів визначального рівняння [1] $n_1 \neq n_2$ знаходимо A_i B_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ -n_0 \left[s_0 \omega_1(\alpha) - s_1 s_0 \varphi_1 \omega_1(\alpha) - 2s_1 \operatorname{sh}^2 \varphi^2 - s_1 \right] - \right. \\ &\quad \left. - m_0 \left[\bar{s} s_1 \omega_2(\alpha) + s \omega_4(\alpha) \right] \right\} \xi_1^{-1}(\alpha) \\ A_2 &= \left\{ n_0 \left[s_0 (\varphi_1^2 - 2) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + s_1 \omega_1(\alpha) + \varphi_1 \omega_4(\alpha) - s_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + m_0 \left[s_1 \varphi_1 \omega_2(\alpha) + \omega_3(\alpha) \right] \right\} \xi_2^{-1}(\alpha) \\ B_1 &= \left\{ n_0 \left[s_0 s_1 \omega_3(\alpha) - s_0 \varphi_1 \omega_2(\alpha) \right] + m_0 \left[s s_1 \omega_1(\alpha) + s \varphi_1 \omega_2(\alpha) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - s_1 \operatorname{ch} 2\varphi_2 \right] \right\} \xi_2^{-1} \\ B_2 &= \left\{ n_0 \left[\varphi_1 \omega_2(x) + s_1 \omega_3(\alpha) \right] + m_0 \left[s_1 (\varphi_1^2 - 2) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - s_1 \varphi_1 \omega_4(\alpha) + \omega_1(x) - s \right] \right\} \xi_2^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

Тут введені наступні позначення:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 &= \omega_0(x); & \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 &= \omega_1(x); & \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 &= \omega_2(x); \\ \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 &= \omega_3(x); & \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 &= \omega_4(x). \\ \bar{s} &= 1 - s; & \bar{s}_1 &= 1 - s_1; & \bar{s}_0 &= 1 - s_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_1(\alpha) &= (s - s_0) (s_1 - 1) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + \varphi_1^2 + (s_1 - s_0) (s - s_1) \\ \xi_2(\alpha) &= s s_0 \varphi_1^2 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 - s s_0 \operatorname{ch}^2 \varphi_1 - (s_1 s_0 - s) \varphi_1 \omega_4(x) + \\ &\quad + (s s_1 - s_0) \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 - s_1 \operatorname{ch} 2\varphi_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставивши значення (12) і (13) у (5) знайдемо функцію впливу в пружній смузі з початковими напруженнями відповідно для рівних і нерівних коренів визначального рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{11}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha_1 y_2) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \\ u_{12}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha_1 y_2) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо два випадки граничних точок ($y_2 = 0$) пружної смуги з початковими напруженнями.

I. Одинична сила $\delta(y_1)$ діє нормально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями [6] ($P = 1$).

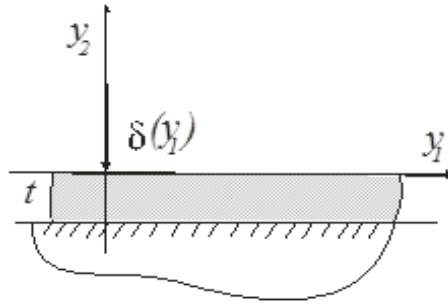


Рис. 2. Нормальна дія одиничної сили на пружну смугу.

У цьому випадку (рис. 2) зміщення граничних точок ($y_2 = 0$) пружної смуги з початковими напруженнями можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} u_{11}(y_1, 0) &= u_1(y_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha \\ u_{12}(y_1, 0) &= u_2(y_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha \end{aligned} \quad (16)$$

Тут при $n_1 = n_2$:

$$H_{11}(\alpha) = n_0 [(s_0 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 + s_1 s_0 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1 N + (\alpha \varphi_1)^2 - \bar{s}_1 N + \varphi_1] \xi_1^{-1}(\alpha) \quad (17)$$

при $n_1 \neq n_2$:

$$H_{11}(\alpha) = i \frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [s_0 s_1 N_3 - s_0 (\alpha \varphi_1) N_2 + s_1 ((\alpha \varphi_1) N_2 - s_1 N_3)] \xi_2^{-1}(\alpha) \quad (18)$$

Крім того, для функцій $H_{11}(\alpha)$, $H_{12}(\alpha)$ справедливі наступні граничні співвідношення:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{11}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{12}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}) \quad (19)$$

II. Одинична сила $\delta(y_1)$ ($P \equiv 1$) діє тангенціально до верхньої точки пружної смуги з початковими напруженнями [7] (рис. 3).

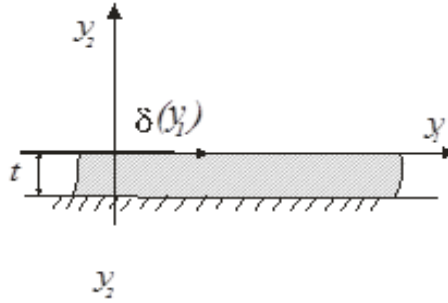


Рис. 3. Тангенціальна дія одиничної сили на пружну смугу.

У цьому випадку переміщення знайдемо по аналогічних формулах:

$$\begin{aligned} u_{21}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; & -\infty < y_1 < \infty \\ u_{22}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; & -\infty < y_1 < \infty \end{aligned} \quad (20)$$

Тут при $n_1 = n_2$, $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$ визначаються з виразів:

$$\begin{aligned} H_{21} &= m_0 [-(s+1)(s \operatorname{sh} \alpha \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - \\ &\quad - s_1 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s] \xi_1^{-1}(\alpha) \\ H_{22} &= \frac{im_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [ss_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 + (\alpha \varphi_1)^2 - \alpha \varphi_1 N - s_1^2 \operatorname{ch}^2(\alpha \varphi_1) - ss_1] \xi_1^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

при $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0 [ss_1(\alpha \varphi_1) N_2 - s N_3 + s(\alpha \varphi_1) N_2 + N_3] \xi_1^{-1}(\alpha) \\ H_{22}(\alpha) &= \frac{im_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [1 - s_1 \operatorname{ch}(2\alpha \varphi_1) + ss_1 N + s\alpha \varphi_1 N_4 + ss_1(\alpha \varphi_1)^2 \operatorname{sh} \alpha \varphi_1 - \\ &\quad - ss_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_2^2(\alpha \varphi_1) N_4 + N_3] \xi_2^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

Відмітимо, що для функцій $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$ як і у випадку (2.16) мають місце асимптотичні розклади:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{21}(\alpha) = Q(1) \qquad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{22}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}) \quad (23)$$

Отже, зміщення у випадку задачі I (рис. 2) і горизонтальні зміщення в другій задачі (рис. 3) в точці прикладання мають логарифмічну особливість.

Використовуючи принцип суперпозиції переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями за напрямком осей Oy_1, Oy_2 від одночасно діючих нормальних $p(y_1)$ і тангенціальних $q(y_1)$ напружень, згідно (21) і (22), визначаються формулами:

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

де u_{ij} , ($ij = 1, 2$) – функції впливу.

Для випадку навантаження поперечно напруженої смуги одночасно вертикальними і горизонтальними силами (рис. 4), врахувавши відомі з опору матеріалів рівняння згину балки, а також рівняння розтягу стрижня і (24), після ряду перетворень, для невідомих контактних напружень, отримуємо розв'язуючу систему інтегро-диференціальних рівнянь для пружної смуги з початковими напруженнями [2, 5].

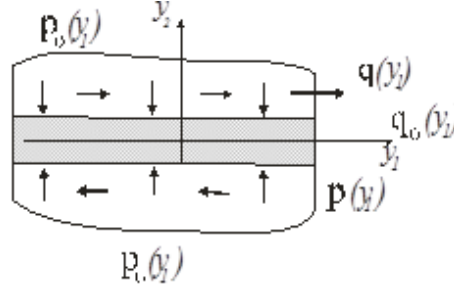


Рис. 4. Одночасне навантаження смуги вертикальними та горизонтальними силами.

$$\begin{aligned}
 D \frac{d^4}{dy_1^4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12} (y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \right\} &= \\
 &= p(y_1) - p_0(y_1) \\
 E_1 h \frac{d}{dy_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{21} (y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \right\} &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau
 \end{aligned} \quad (25)$$

У випадку дії тільки вертикальних сил $q_0(y_1) \equiv 0$, замість системи (3.4) будемо мати тільки одне інтегро-диференціальне рівняння:

$$D \frac{d^4}{dy_1^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau \right] = p(y_1) - p_0(y_1), \quad |x| \leq \infty, \quad (26)$$

а у випадку відсутності вертикальних сил $p_0(y_2) \equiv 0$, накладка лише розтягується, тоді одержимо:

$$E_1 \frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_{22} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} [q(y_1) - q_0(y_1)] d\tau \quad (27)$$

3. Висновки. На основі проведеного аналітичного дослідження двох випадків граничних точок ($y_2 = 0$) пружної смуги з початковими напруженнями, коли одинична сила $\delta(y_1)$ діє нормально та тангенціально до верхньої грані пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями, було виписано аналітичні залежності та інтегро-диференціальні рівняння, за якими визначаються переміщення граничних точок ($y_2 = 0$) поперечно напруженої смуги. З асимптотичних розкладів виявлено, що контактні переміщення у випадку першої задачі та горизонтальні зміщення у другій задачі в точці прикладання мають логарифмічну особливість. Отже, присутність початкових напружень має вагомий вплив на розподіл переміщень пружної смуги від дії зосереджених сил.

Список використаної літератури

1. Гузь А. И. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка. 1983. 296 с.
2. Дихтярук Н. Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 3. С. 63–70.
3. Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. Доповіді національної академії наук. 2004. № 3. С. 46–49.
4. Бабич С. Ю., Дихтярук Н. Н. Передача нагрузки от бесконечного неоднородного стрингера к заземленной одной гранью упругой полосе с начальными напряжениями. Прикл. механика. 2020. Т. 56, № 6. С. 1–10.
5. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
6. Герсеванов И. М., Магерет Я. Л. К вопросу о бесконечно длинной балке на упругой почве нагруженной силой. Гидротехническое строительство, 1935.
7. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. Ingenieur Archiv. 1932. Bd. 3, Negt. 2. s. 126–128.

Dikhtiaruk N. N., Kravchuk O. A. Investigation of the field of influence of elastic displacements and stresses for a pre-stressed strip from concentrated force.

In this paper, the influence of elastic displacements and stresses for an elastic band with an initial (residual) stress from the action of a concentrated force is investigated within the framework of the linearized theory of elasticity. Cases are considered when the force acts at an arbitrary angle α , when only the vertical force acts on the prestressed strip and only the horizontal force acts. A system of solving integral - differential equations for an elastic band with initial stresses reinforced by an elastic finite stringer is obtained. For cases of absence of horizontal loads or vertical loads, the system is reduced to the calculated integral-differential equations. All studies are performed within the linearized theory of elasticity for compressible and incompressible bodies, in the case of elastic potentials of arbitrary structure, in general for the theory of large (finite) initial deformations and two versions of the theory of small initial deformations.

Taking into account the residual deformations in the calculation of important elements of structures, machines and structures allows you to more accurately assess the strength of the material, and therefore significantly reduce its costs, while maintaining the necessary functional characteristics of the elements as a whole. That is why the study of the contact interaction of elastic bodies with residual deformations is an extremely important task today and will remain so in the future. Studies of the contact interaction of prestressed bodies in our country and abroad appeared in sufficient numbers only at the end of the last century. This is primarily due to the fact that the linear theory of elasticity does not take into account the presence of residual stresses in bodies. In the general case, the strict formulation of such problems requires the use of the apparatus of nonlinear theory of elasticity, however, at sufficiently large values of the initial stresses can be limited to its linearized version. The current level of linearized theory of elasticity and mathematical methods, combined with the rapid development of computer technology, make it possible to effectively form a variety of computational models for a wide range of problems.

Keywords: elastic bodies, contact problem, boundary conditions, Dirac function.

References

1. Guz, A. I. (1983). Mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses. Kyiv: *Nauk. dumka*, 296. [in Russian].
2. Dikhtyaruk, N. N. (2004). On the equilibrium of a strip with initial stresses reinforced by elastic overlays. *Appl. mechanics*, 40(3), 63–70. [in Russian].
3. Dikhtyaruk, M. M. (2004). Periodic contact problem for an elastic band with initial (residual) stresses. *Reports of the National Academy of Sciences*, 3, 46–49. [in Ukrainian].
4. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous

- stringer to an elastic band with initial stresses clamped by one face. *App. mechanics*, 56(6), 1–10. [in Russian].
5. Sargsyan, V. S. (1983). Contact tasks for half-planes and strips with elastic overlays. Yerevan: *Ed. Yerevan. University*, 260. [in Russian].
 6. Gersevanov, I. M., & Mageret, J. L. (1935). On the question of an infinitely long beam on elastic soil loaded with force. *Hydraulic construction*. [in Russian].
 7. Melan, E. (1932). Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. *Ingenieur Archiv*, 3(2), 126–128.

Одержано 15.04.2022