УДК 004.01
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).103-117

Л. П. Бедратюк[1], Г. І. Бедратюк[2]

[1] Хмельницький національний університет,
професор кафедри інженерії програмного забезпечення,
доктор фізико-математичних наук, професор
LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6076-5772

[2] Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри інженерії програмного забезпечення,
bedratyuk@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0224-5549

МОМЕНТИ ЕРМІТА ЗОБРАЖЕНЬ ТА ЇХНІ ІНВАРІАНТИ

Нехай H – підгрупа афінної групи площини $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$, яка розглядається разом з своєю природною дією на інтегровні функції від двох змінних визначені в деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Для фіксованої сім'ї многочленів $\{P_{m,n}(x,y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ розглянемо функціонал

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,n}(f) = \iint\limits_{\Omega} P_{m,n}(x,y) f(x,y) dxdy,$$

який називається P-моментом функції $f(x,y)$ порядку $m+n$. Дія групи H продовжується на P-моменти за формулою

$$h\pi_{m,n}(f) = \pi_{m,n}(h^{-1}f) \iint\limits_{\Omega} P_{m,n}(x,y) f(h^{-1}(x,y)) dxdy, h \in H.$$

Інваріанти цієї дії називаються P-моментними інваріантами. Якщо функцію $f(x,y)$ ототожнити з напівтоновим зображенням, а за групу H взяти групи обертань, групу розтягів або групу паралельних перенесень площини, то відповідні моменти зображень та їхні моментні інваріанти широко використовуються в теорії розпізнавання образів. Задача задовільного опису моментних інваріантів задовільно розв'язана лише у найпростішому випадку $P_{m,n}(x,y) = x^m y^n$. В даній статті, для пари бі-ортогональних сімей многочленів Ерміта, задачу знаходження моментних інваріантів зведено до задачі розв'язання деякого диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку, яке виникає при переході від дії групи Лі до дії її алгебри Лі. Для кожної із згаданих груп знайдено явний вигляд дії її алгебри Лі на моменти Ерміта і вказані явно моментні інваріанти невеликих порядків.

Ключові слова: розпізнавання образів, інженерія ознак, групи перетворень площини, многочлени Ерміта, моменти зображень, моментні інваріанти.

1. Вступ. Важливою областю застосування теорії зображень груп є аналіз 2D-зображень. Для розпізнавання і класифікації зображень, виділення об'єктів на них методами машинного навчання необхідним є конструювання таких *ознак* зображень, які залишаються інваріантними при тих геометричних перетвореннях площини, які не спотворюють сцену зображення. Для 2D-зображень такими перетвореннями є поворот, паралельне перенесення, масштабування зображення та композиції цих перетворень. Відповідні інваріантні ознаки вперше були введені в статті [1] і називаються *моментними інваріантами.* Якщо ототожнити напівтонове зображення з деякою обмеженою функцією від двох змінних

$f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, то P-моментом зображення, порядку $p+q$ називається величина

$$\pi_{pq} = \iint\limits_{\Omega} P_{m,n}(x,y) f(x,y) dx dy,$$

де сім'я многочленів $\{P_{m,n}(x,y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ є базисом нескінченновимірного векторного простору над полем $\mathbb{R}$ многочленів від двох змінних.

З початку 60-х років моментні інваріанти активно використовуються в аналізі зображень, див. [2]– [5]. В залежності від вибору базису $\{P_{m,n}(x,y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ розглядаються різні системи моментів. Для найпростішого випадку $P_{m,n}(x,y) = x^m y^n$ відповідні моменти називаються *геометричними моментами.* Афінна група площини $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$, тобто група всіх оборотніх перетворень площини, та її підгрупи природно діють на геометричні моменти і в результаті виникають відповідні *алгебри моментних інваріантів.* Алгебра моментних інваріантів добре вивчена, зокрема відомий явний опис її породжуючих елементів [6], [7]. Проте практичне використання геометричних моментів викликає труднощі через їхню обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки величини $x^m y^m$ швидко ростуть при збільшенні розміру зображень. Для уникнення цієї проблеми замість геометричних моментів розглядають так звані *сепарабельні ортогональні моменти*, які породжуються базисом $\pi_{m,n}(x,y) = F_m(x)F_n(y)$ де $\{F_n(x)\}$ – деяка сім'я ортогональних многочленів. Такі ортогональні моменти зображень вже є обчислювально стабільними і допускають ефективну реалізацію, оскільки задовольняють рекурентними співвідношенням, див. [4], [5]. Недавно в [8] вперше було запропоновано несепарабельні ортогональні моменти, які використовували дві сім'ї многочленів Аппеля, які бі-ортогональні на одиничному крузі. Числові експерименти показали, що розпізнавальна здатність моментів Аппеля перевищує розпізнавальну здатність звичайних ортогональних моментів. Тому великий інтерес викликають інші несепарабельні бі-ортогональні сім'ї многочленів від двох змінних.

Ерміт, в [9] знайшов дві параметричні сім'ї бі-ортогональних многочленів $U_{m,n}(x,y)$, $V_{m,n}(x,y)$, які визначаються такими експоненціальними породжуючими функціями:

$$e^{\frac{1}{2}((2\,ax+2\,by)u+(2\,bx+2\,cy)v-au^2-2\,buv-cv^2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!},$$

$$e^{xu+yv-\frac{1}{2\Delta}(av^2-2\,buv+cu^2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!},$$

де a,b,c – дійсні числа, а $\Delta = ac - b^2$. Многочлени $U_{m,n}(x,y)$, і $V_{m,n}(x,y)$ біортогональні на всій площині:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_{m,n}(x,y)V_{m',n'}(x,y)w(x,y)dxdy = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\, m!n!\,\delta_{m,m'}\delta_{n,n'},$$

з ваговою функцією

$$w(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2\,bxy+cy^2)}.$$

Але для всіх негеометричних моментів виникає проблема обчислення моментних інваріантів, які тепер потрібно обчислювати в новому базисі. Зміна базису наштовхується на великі технічні труднощі і задовільно розв'язана лише для деяких моментів, причому тільки для простих перетворень площини [11], [12], які не включають повороти. Моменти є функціоналами на зображенням з такою дією групи $G \subseteq \mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$:

$$g\pi_{p,q}(f) = \pi_{p,q}(g^{-1}f) = \iint\limits_{\Omega} P_{m,n}(x,y)g^{-1}(f(x,y))dxdy, g \in G.$$

Моментні інваріанти є інваріантами дії деякої групи Лі перетворень площини, тому вони будуть і інваріантами відповідної алгебри Лі, яка діє на моменти диференціальними операторами. Знаючи явний вигляд цих операторів можна знайти моменті інваріанти розв'язавши рівняння в частинних похідних, яке визначає такий оператор.

В даній статті явно визначена дія груп розтягів, паралельного перенесення та групи поворотів площини на U- та V-моменти, знайдені у вигляді відповідні оператори диференціювання та обчислено інваріанти малих порядків.

2. Диференціальні оператори для U-моментів. На початку знайдемо вираз для знаходження явного виразу диференціального оператора який відповідає дії однопараметричної групи Лі.

Теорема 1. *Нехай однопараметрична підгрупа афінної групи перетворень породжується елементами g_a, де a – числовий параметр, причому g_0 є одиничним елементом групи. Тоді оператор D відповідної одновимірної алгебри Лі так діє на моменти*

$$D(\pi_{m,n}) = \lim_{a\to 0} \iint_{\Omega} \frac{d}{da}\left(P_{m,n}(g_a(x,y))J(g_a)\right) f(x,y)dxdy,$$

де $J(g_a)$ – якобіан перетворення g_a.

Доведення. Оператор D є дотичним вектором до кривої g_a в нулі. Тому

$$D(\pi_{m,n}) = \lim_{a\to 0} \frac{d}{da}\pi_{m,n}(g_a^{-1}(f)) = \lim_{a\to 0} \frac{d}{da} \iint_{\Omega} P_{m,n}(x,y)f(g_a^{-1}(x,y))dxdy.$$

Виконавши заміну змінних в подвійному інтегралі отримаємо необхідну формулу.

□

Зауважимо, що, в силу лінійності інтеграла, вираз для дії на моменти $\pi_{m,n}$, матиме такий самий вигляд як і вираз для дії на $P_{m,n}(x,y)$.

Отже, для отримання дії $D(\pi_{m,n})$ в термінах моментів, нам потрібно знайти границю похідної

$$\frac{d}{da}\left(P_{m,n}(g_a(x,y))J(g_a)\right),$$

а потім виразити її в термінах многочленів $P_{m,n}(x,y)$.

Многочлени Ерміта $U_{m,n}(x,y)$ визначаються експоненціальною породжуючою функцією

$$G_U = G_U(x,y,u,v) = e^{\frac{1}{2}((2\,ax+2\,by)u+(2\,bx+2\,cy)v-au^2-2\,buv-cv^2)}.$$

Відповідні U-моменти мають вигляд

$$u_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_{m,n}(x,y) f(x,y) dx dy.$$

Спочатку знайдемо рекурентні співвідношення яким задовольняють ці многочлени.

Теорема 2. *Многочлени $U_{m,n}(x,y)$ задовольняють рекурентним співвідношенням*

$$\begin{aligned}U_{m+1,n}(x,y) &= (ax+by)\,U_{m,n}(x,y) - ma\,U_{m-1,n}(x,y) - nb\,U_{m,n-1}(x,y),\\ U_{m,n+1}(x,y) &= (bx+cy)\,U_{m,n}(x,y) - mb\,U_{m-1,n}(x,y) - nc\,U_{m,n-1}(x,y).\end{aligned}$$

з початковою умовою $U_{0,0}(x,y) = 1$.

Доведення. Диференціюємо породжуючу функцію G_V по u і отримаємо

$$\frac{\partial G_V}{\partial u} = (ax+by-au-bu)G_U = (ax+by)G_U - auG_u - buG_U.$$

З одного боку маємо

$$\frac{\partial G_U}{\partial u} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x,y)\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\frac{v^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m+1,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

З іншого боку отримуємо

$$\begin{gathered}(ax+by)G_U - auG_U - bvG_U = \sum_{m,n=0}^{\infty}(ax+by)U_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} -\\ -\sum_{m,n=0}^{\infty} aU_{m,n}(x,y)\frac{u^{m+1}}{m!}\frac{v^n}{n!} - \sum_{m,n=0}^{\infty} bU_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^{n+1}}{n!} =\\ = \sum_{m,n=0}^{\infty}\left((ax+by)\,U_{m,n}(x,y) - ma\,U_{m-1,n}(x,y) - nb\,U_{m,n-1}(x,y)\right)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.\end{gathered}$$

Прирівнявши коефіцієнти двох рядів отримаємо

$$U_{m+1,n}(x,y) = (ax+by)\,U_{m,n}(x,y) - ma\,U_{m-1,n}(x,y) - nb\,U_{m,n-1}(x,y),$$

що і потрібно було довести.

Друге рекурентне співвідношення отримується аналогічними міркуваннями із співвідношення

$$\frac{\partial G_U}{\partial v} = (bx+cy-bu-cv)\,G_U.$$

□

Для знаходження явного вигляду оператора, яким діє алгебра Лі відповідної групи перетворень G, ми скористаємося тим, що

$$\lim_{a\to 0}\frac{d}{da}G_U = \sum_{m,n=0}^{\infty} D(U_{m,n}(x,y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Тоді, розклавши в ряд ліву частину ми отримаємо явні вирази для дії D на многочлени $U_{m,n}(x,y)$. Після цього потрібно підставити ці вирази у формулу для U-моменту і отримати індуковану дію оператора D на U-моменти.

Проілюструємо цю техніку розглянувши дію на U-моменти груп обертань, паралельних перенесень та групи розтягів площини.

2.1. Група обертань. Дійсна група обертань площини $SO(2)$ так діє на змінні

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Вона є однопараметричною, параметр θ належить інтервалу $[0, 2\pi]$. Наступна теорема описує явний вигляд оператора D_r, яким відповідна алгебра Лі $\mathfrak{so}_2$ діє на U-моменти.

Теорема 3. *Оператор D_r діє на U-моменти таким чином:*

$$D(u_{m,n}) = \frac{1}{\Delta}\left(b\,(m-n)\,(a+c)\,u_{m,n} - m\left(a^2+b^2\right)u_{m-1,n+1} + n\left(b^2+c^2\right)u_{m+1,n-1}\right) - \\ - mn\,(a-c)\,u_{m-1,n-1} - bn\,(n-1)\,u_{m,n-2} + bm\,(m-1)\,u_{m-2,n}.$$

Доведення. Спочатку знаходимо дію $\mathfrak{so}_2$ на многочлени Ерміта $U_{m,n}(x,y)$. Ми знаємо, [7], що оператор D_r подається у вигляді $D_r = D_+ - D_-$ де D_+, D_- оператори які відповідають дії груп нижньотрикутних і верхньотрикутних матриць другого порядку з визначником рівним 1. Тому спочатку знайдемо дію операторів D_+, D_-.

Подіємо елементом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію, отримаємо

$$G_U(x, xt+y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x, y+xt)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Диференціюємо в $t=0$:

$$(bu+cv)\,xG_U(x,y,u,v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_+(U_{m,n}(x,y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Знаходимо

$$(bu+cv)\,xG(x,y,u,v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (bu+cv)\,xU_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty}(m+1)bxU_{m,n}(x,y)\frac{u^{m+1}}{(m+1)!}\frac{v^n}{n!} + \sum_{m,n=0}^{\infty}(n+1)cxU_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty}\left(mbxU_{m-1,n}(x,y) + ncxU_{m,n-1}(x,y)\right)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Отже оператор D_+ так діє на $U_{m,n}(x,y)$:

$$D_+(U_{m,n}(x,y)) = mbxU_{m-1,n}(x,y) + ncxU_{m,n-1}(x,y).$$

Аналогічно, диференціюючи по t

$$G_U(x+yt,y,u,v)=\sum_{m,n=0}^{\infty}U_{m,n}(x+yt,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!},$$

знаходимо

$$(au+bv)\,yG(x,y,u,v)=\sum_{m,n=0}^{\infty}D_-(U_{m,n}(x,y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!},$$

звідки

$$D_-(U_{m,n}(x,y))=mayU_{m-1,n}(x,y)+nbyU_{m,n-1}(x,y).$$

Тому

$$\begin{aligned}D_-(U_{m,n}(x,y))&=D_+(U_{m,n}(x,y))-D_-(U_{m,n}(x,y))=\\&=m\,(bx-ay)\,U_{m-1,n}+n\,(cx-by)\,U_{m,n-1}.\end{aligned}$$

Врахувавши рекурентні співвідношення і замінивши $U_{m,n}(x,y)$ на $u_{m,n}$ для отримаємо

$$\begin{aligned}D(u_{m,n})=\frac{1}{\Delta}\Big(&b\,(m-n)\,(a+c)\,u_{m,n}-m\left(a^2+b^2\right)u_{m-1,n+1}+n\left(b^2+c^2\right)u_{m+1,n-1}\Big)-\\&-mn\,(a-c)\,u_{m-1,n-1}-bn\,(n-1)\,u_{m,n-2}+bm\,(m-1)\,u_{m-2,n}.\end{aligned}$$

□

Для невеликих m,n маємо

$$\begin{aligned}&D_r(u_{0,0})=0,\\&D_r(u_{1,0})=\frac{1}{\Delta}\left(b\,(a+c)\,u_{1,0}-\left(a^2+b^2\right)u_{0,1}\right),\\&D(u_{0,1})=\frac{1}{\Delta}\left(\left(b^2+c^2\right)u_{1,0}-(a+c)\,bu_{0,1}\right),\\&D_r(u_{2,0})=\frac{2\,b\,(a+c)\,u_{2,0}-2\,\left(a^2+b^2\right)u_{1,1}}{\Delta}+2\,bu_{0,0},\\&D_r(u_{1,1})=\frac{\left(b^2+c^2\right)u_{2,0}-\left(a^2+b^2\right)u_{0,2}}{\Delta}+(c-a)\,u_{0,0}.\end{aligned}$$

Диференціальне рівняння для знаходження U-моментних інваріантів порядку не більше 2 відносно групи обертань має вигляд

$$D_r(u_{1,0})\frac{\partial F}{\partial u_{1,0}}+D_r(u_{0,1})\frac{\partial F}{\partial u_{0,1}}+D_r(u_{2,0})\frac{\partial F}{\partial u_{2,0}}+D_r(u_{1,1})\frac{\partial F}{\partial u_{1,1}}+D_r(u_{0,2})\frac{\partial F}{\partial u_{0,2}}=0,$$

де F – функція від змінних $u_{0,0},u_{1,0},u_{0,1},u_{2,0},u_{1,1},u_{0,2}$.

Прямими обчисленнями можна показати, що наступні вирази задовольняють це рівняння і є U-моментними інваріантами відносно групи обертань площини:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= {u_{0,1}}^2 - 2\,\frac{u_{1,0} b\,(a+c)\,u_{0,1}}{a^2+b^2} + \frac{(b^2+c^2)\,{u_{1,0}}^2}{a^2+b^2},\\
I_2 &= \frac{u_{0,2}\,(a^2+b^2)}{b^2+c^2} - 2\,\frac{(a+c)\,b u_{1,1}}{b^2+c^2} + u_{2,0},\\
I_3 &= {u_{2,0}}^2 + 4\,\frac{(a^2+b^2)\,{u_{1,1}}^2}{b^2+c^2} + \frac{\Delta^2\,(a^2-2\,ac+4\,b^2+c^2)\,{u_{0,0}}^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{(a^2+b^2)^2\,{u_{0,2}}^2}{(b^2+c^2)^2} +\\
&\quad + 2\,\frac{(ab-ac+b^2+bc)\,(ab+ac-b^2+bc)\,u_{2,0}u_{0,2}}{(b^2+c^2)^2} - 4\,\frac{u_{2,0} b\,(a+c)\,u_{1,1}}{b^2+c^2}\\
&\quad - 4\,\frac{(a+c)\,b\,(a^2+b^2)\,u_{1,1}u_{0,2}}{(b^2+c^2)^2} - 4\,\frac{\Delta\,b\,(a^2+2\,b^2+c^2)\,u_{0,0}u_{1,1}}{(b^2+c^2)^2} +\\
&\quad + 2\,\frac{\Delta\,\left(a^3-a^2c+3\,b^2a+b^2c\right)u_{0,2}u_{0,0}}{(b^2+c^2)^2} + 2\,\frac{\Delta\,\left(b^2a-c^2a+3\,b^2c+c^3\right)u_{2,0}u_{0,0}}{(b^2+c^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Аналогічно знаходяться моментні інваріанти вищих порядків.

2.2. Група рівномірних розтягів. Група рівномірних розтягів (гомотетій) є однопараметричною групою, яка так діє на координати

$$
\begin{cases} x' = tx, \\ y' = ty. \end{cases}
$$

Дія одиничного елемента отримується при значенні параметру $t = 1$. Якобіан такого перетворення рівний t^2.

Теорема 4. *Алгебра Лі групи рівномірних розтягів діє на U-моменти $u_{m,n}$ оператором D_s таким чином:*

$$
D_s(u_{m,n}) = (m+n+2)u_{m,n} + m(m-1)a\,u_{m-2,n} + n(n-1)c\,u_{m,n-2} + 2mnb\,u_{m-1,n-1}.
$$

Доведення. Діємо елементом $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію:

$$
t^2 G_U(tx, ty, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{m,n}(tx, ty) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.
$$

Диференціюємо в $t = 1$

$$
((au+bv)\,x + y\,(bu+cv) + 2)G_U(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_s(U_{m,n}(x, y)) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.
$$

Маємо у лівій частині

$$((au+bv)\,x+y\,(bu+cv)+2)G(x,y,u,v)=\sum_{m,n=0}^{\infty}((au+bv)\,x+y\,(bu+cv)+2)\times$$
$$\times U_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\Big(axU_{m,n}\frac{u^{m+1}}{m!}\frac{v^n}{n!}+bxU_{m,n}\frac{u^m}{m!}\frac{v^{n+1}}{n!}+byU_{m,n}\frac{u^{m+1}}{m!}\frac{v^n}{n!}+$$
$$+cyU_{m,n}\frac{u^m}{m!}\frac{v^{n+1}}{n!}+2U_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\Big)\frac{v^n}{n!}=\sum_{m,n=0}^{\infty}(maxU_{m-1,n}+nbxU_{m,n-1}+$$
$$+mbyU_{m-1,n}+ncyU_{m,n-1}+2U_{m,n})\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}=$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}(m(ax+by)U_{m-1,n}+n(bx+cy)U_{m,n-1}+2U_{m,n})\,\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

З рекурентних співвідношень отримуємо

$$m\,(ax+by)\,U_{m-1,n}=mU_{m,n}+m(m-1)a\,U_{m-2,n}+mnb\,U_{m-1,n-1},$$
$$n\,(bx+cy)\,U_{m,n-1}=nU_{m,n}+nmb\,U_{m-1,n-1}+n(n-1)c\,U_{m,n-2}.$$

звідки знаходимо

$$D_s(U_{m,n})=m(ax+by)U_{m-1,n}+n(bx+cy)U_{m,n-1}=$$
$$=(m+n+2)U_{m,n}+m(m-1)a\,U_{m-2,n}+n(n-1)c\,U_{m,n-2}+2mnb\,U_{m-1,n-1}.$$

□

Розв'язавши відповідне диференціальне рівняння знаходимо моментні інваріанти відносно групи розтягів порядку не більше 2:

$$\frac{u_{0,1}}{{u_{0,0}}^{3/2}},\frac{cu_{0,0}+u_{0,2}}{{u_{0,0}}^2},\frac{u_{1,0}}{{u_{0,0}}^{3/2}},\frac{u_{0,0}b+u_{1,1}}{{u_{0,0}}^2},\frac{au_{0,0}+u_{2,0}}{{u_{0,0}}^2}.$$

2.3. Група паралельних перенесень. Група паралельних перенесень є двопараметричною комутативною групою з такою дією на координати:

$$\begin{cases}x'=x+A,\\ y'=y+B.\end{cases}$$

Якобіан такого перетворення дорівнює одиниці. Одиничний елемент групи отримується при нульових значеннях параметрів A і B.

Теорема 5. *Алгебра Лі двопараметричної групи паралельних перенесень діє на моменти $u_{m,n}$ двома операторами D_x, D_y таким чином*

$$D_x(u_{m,n})=amu_{m-1,n}+nbu_{m,n-1},$$
$$D_y(u_{m,n})=bmu_{m-1,n}+ncu_{m,n-1}.$$

Доведення. Діємо перетворенням $\begin{cases}x'=x+A,\\ y'=y,\end{cases}$ на породжуючу функцію

$$G_U(x+A,y,u,v)=\sum_{m,n=0}^{\infty}U_{m,n}(x+A,y+B)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Диференціюємо в $A = 0$

$$(au + bv)G_U(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_x(U_{m,n}(x, y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Маємо

$$(au + bv)G_U(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (au + bv)U_{m,n}(x, y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} (amU_{m-1,n}(x, y) + nbvU_{m,n-1}(x, y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Звідси

$$D_x(U_{m,n}(x, y)) = amU_{m-1,n}(x, y) + nbU_{m,n-1}(x, y).$$

Аналогічно, діючи перетворенням $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + B. \end{cases}$ отримаємо, що відповідний оператор D_y діє таким чином:

$$D_y(U_{m,n}(x, y)) = bmU_{m-1,n}(x, y) + ncU_{m,n-1}(x, y)$$

Звідси зразу отримуємо дію цих операторів на U-моменти.

□

Розв'язавши систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} D_x(F) = 0, \\ D_y(F) = 0, \end{cases}$$

де F – функція від змінних $u_{0,0}, u_{1,0}, u_{0,1}, u_{2,0}, u_{1,1}, u_{0,2}$ знаходимо 4 моментні інваріанти відносно групи паралельних перенесень

$$U_{0,0}, \frac{U_{0,0}U_{0,2} - {U_{0,1}}^2}{U_{0,0}}, \frac{U_{0,0}U_{1,1} - U_{0,1}U_{1,0}}{U_{0,0}}, \frac{U_{0,0}U_{2,0} - {U_{1,0}}^2}{U_{0,0}}$$

3. Диференціальні оператори для V-моментів.

Многочлени Ерміта $V_{m,n}(x, y)$ визначаються експоненціальною породжуючою функцією

$$G_V = G_V(x, y, u, v) = e^{xu + yv - \frac{1}{2\Delta}(av^2 - 2\,buv + cu^2)}.$$

Відповідні V-моменти мають вигляд

$$v_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V_{m,n}(x, y)f(x, y)dxdy.$$

Спочатку знайдемо рекурентні співвідношення, яким задовольняють многочлени $V_{m,n}(x, y)$.

Теорема 6. *Многочлени $V_{m,n}(x,y)$ задовольняють рекурентним співвідношенням*

$$V_{m+1,n}(x,y) = xV_{m,n}(x,y) - m\frac{c}{\Delta}V_{m-1,n}(x,y) + n\frac{b}{\Delta}V_{m,n-1}(x,y),$$
$$V_{m,n+1}(x,y) = yV_{m,n}(x,y) + m\frac{b}{\Delta}V_{m-1,n}(x,y) - n\frac{a}{\Delta}V_{m,n-1}(x,y).$$

з початковою умовою $V_{0,0}(x,y)=1$.

Доведення. Диференціюємо породжуючу функцію G_V по u і отримаємо

$$\frac{\partial G_V}{\partial u} = (x + \frac{bv}{\Delta} - \frac{cu}{\Delta})G_V = xG_V - \frac{c}{\Delta}uG_V + \frac{b}{\Delta}vG_V.$$

З одного боку маємо

$$\frac{\partial G_V}{\partial u} = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(x,y)\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\frac{v^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m+1,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

З іншого боку

$$xG_V - \frac{c}{\Delta}uG_V + \frac{b}{\Delta}vG_V = \sum_{m,n=0}^{\infty} xV_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} - \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{c}{\Delta}V_{m,n}(x,y)\frac{u^{m+1}}{m!}\frac{v^n}{n!} +$$
$$+\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{b}{\Delta}V_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^{n+1}}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty}(xV_{m,n}(x,y) - m\frac{c}{\Delta}U_{m-1,n}(x,y)+$$
$$+n\frac{b}{\Delta}V_{m,n-1}(x,y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Прирівнявши коефіцієнти рядів при однакових степенях отримаємо, що

$$V_{m+1,n}(x,y) = xV_{m,n}(x,y) - m\frac{c}{\Delta}U_{m-1,n}(x,y) + n\frac{b}{\Delta}V_{m,n-1}(x,y).$$

Друге рекурентне співвідношення отримується аналогічно із співвідношення

$$\frac{\partial G_V}{\partial v} = \left(y + \frac{bu}{\Delta} - \frac{av}{\Delta}\right)G_V.$$

□

3.1. Група обертань. Дію оператора D_r знаходимо, аналогічно як і у випадку U-моментів.

Теорема 7. *Алгебра Лі $\mathfrak{so}_2$ діє на моменти $v_{m,n}$ оператором D_r за формулою*

$$D_r(v_{m,n}) = nv_{m+1,n-1} - mv_{m-1,n+1} - \frac{n\,(n-1)\,bv_{m,n-2}}{\Delta} + \frac{(m-1)\,bmv_{m-2,n}}{\Delta} -$$
$$-\frac{(a-c)\,nmv_{m-1,n-1}}{\Delta}.$$

Доведення. Як і вище, діючи елементом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію, отримаємо

$$G_V(x, xt + y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(x, y + xt) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.$$

Диференціюємо в $t = 0$:

$$vxG_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_+(V_{m,n}(x, y)) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.$$

Знаходимо

$$xvG_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} xvV_{m,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (n+1)xV_{m,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^{n+1}}{(n+1)!} =$$
$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} nxV_{m,n-1}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.$$

Отже

$$D_+(V_{m,n}(x, y)) = nxV_{m,n-1}(x, y).$$

Аналогічно, диференціюючи функцію $G_V(x + yt, y, u, v)$ в $t = 0$ знаходимо

$$uyGV(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} DV_-(V_{m,n}(x, y)) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!},$$

звідки

$$DV_-(V_{m,n}(x, y)) = myV_{m-1,n}(x, y).$$

Тому, оператор групи повороту D_r має таку дію

$$D_V(V_{m,n}(x, y)) = DV_+(u_{m,n}(x, y)) - DV_-(V_{m,n}(x, y)) =$$
$$= nxV_{m,n-1}(x, y) - myV_{m-1,n}(x, y).$$

Врахувавши рекурентні співвідношення, отримаємо

$$xV_{m,n-1}(x, y) = V_{m+1,n-1}(x, y) + \frac{mcV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta} - \frac{(n-1)\, bV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta},$$
$$yV_{m-1,n}(x, y) = V_{m-1,n+1}(x, y) - \frac{(m-1)\, bV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} + \frac{naV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}.$$

Отже, оператор D_r так діє на $V_{m,n}(x, y)$:

$$D_r(V_{m,n}(x, y)) = nV_{m+1,n-1} - mV_{m-1,n+1}(x, y) - \frac{n\,(n-1)\, bV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta} +$$
$$+ \frac{(m-1)\, bmV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} - \frac{(a-c)\, nmV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}.$$

Звідси зразу отримуємо дію на V-моменти.

$\square$

Для невеликих m, n маємо

$$
\begin{aligned}
D_r(v_{0,1}) &= v_{1,0},\; D_r(v_{1,0}) = -v_{0,1},\\
D_r(v_{0,2}) &= \frac{2\,acv_{1,1} - 2\,v_{1,1}b^2 - 2\,v_{0,0}b}{\Delta},\\
D_r(v_{1,1}) &= \frac{(v_{0,2} - v_{2,0})\,b^2 + ((-v_{0,2} + v_{2,0})\,c - v_{0,0})\,a + v_{0,0}c}{\Delta},\\
D_r(v_{2,0}) &= \frac{2\,v_{1,1}b^2 + 2\,v_{0,0}b - 2\,acv_{1,1}}{\Delta}.
\end{aligned}
$$

3.2. Група рівномірних розтягів. Як і у випадку многочленів U-моментів знаходимо дію оператора D_s на V-моменти.

Теорема 8. *Алгебра Лі групи рівномірних розтягів діє на моменти $v_{m,n}$ оператором D_s за формулою*

$$
D_s(v_{m,n}) = (m{+}n{+}2)\,v_{m,n} + \frac{an\,(n{-}1)\,v_{m,n-2}}{\Delta} + \frac{cm\,(m{-}1)\,v_{m-2,n}}{\Delta} - 2\,\frac{mnbv_{m-1,n-1}}{\Delta}.
$$

Доведення. Дiємо елементом $\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$ на породжуючу функцію і отримуємо

$$
t^2 G_V(tx, ty, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(tx, ty)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.
$$

Диференціюємо в $t = 1$

$$
(ux + vy + 2)G_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_s(V_{m,n}(x, y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.
$$

Маємо

$$
(ux + vy + 2)G_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (ux + vy + 2)V_{m,n}(x, y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} =
$$

$$
= \sum_{m,n=0}^{\infty} xV_{m,n}(x, y)\frac{v^{m+1}}{m!}\frac{v^n}{n!} + \sum_{m,n=0}^{\infty} yV_{m,n}(x, y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^{n+1}}{n!} + 2\sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} =
$$

$$
= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(mxV_{m-1,n}(x, y) + nyV_{m,n-1}(x, y) + 2\right)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.
$$

Враховуючи рекурентні співвідношення

$$
\begin{aligned}
xV_{m-1,n}(x, y) &= V_{m,n}(x, y) + \frac{(m-1)\,cV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} - \frac{nbV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta},\\
yV_{m,n-1}(x, y) &= V_{m,n}(x, y) - \frac{mbV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta} + \frac{(n-1)\,aV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta},
\end{aligned}
$$

знаходимо

$$
D_s(V_{m,n}(x, y)) = (m + n + 2)\,V_{m,n}(x, y) + \frac{n\,(n-1)\,aV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta} +
$$

$$
+ \frac{m\,(m-1)\,cV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} - 2\,\frac{mnbV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}.
$$

Звідси зразу отримуємо дію на V-моменти.

$\square$

Моментні V-інваріанти відносно групи рівномірних розтягів порядку не більше 2 мають такий вигляд

$$\frac{v_{0,1}}{{v_{0,0}}^{3/2}}, \frac{v_{0,2}\Delta + v_{0,0}a}{\Delta\, {v_{0,0}}^2}, \frac{v_{1,0}}{{v_{0,0}}^{3/2}}, \frac{v_{1,1}\Delta - v_{0,0}b}{\Delta\, {v_{0,0}}^2}, \frac{v_{1,2}\Delta + v_{1,0}a - 2\, v_{0,1}b}{\Delta\, {v_{0,0}}^{5/2}}, \frac{v_{2,0}\Delta + v_{0,0}c}{\Delta\, {v_{0,0}}^2}.$$

3.3. Група паралельних перенесень. Як і у випадку многочленів U-моментів знаходимо дію оператора D_s на V-моменти.

Теорема 9. *Алгебра Лі двопараметричної групи паралельних перенесень діє на моменти $v_{m,n}$ двома операторами D_x, D_y таким чином*

$$D_x(v_{m,n}) = m v_{m-1,n},$$
$$D_y(v_{m,n}) = n u_{m,n-1}.$$

Доведення. Діємо перетворенням $\begin{cases} x' = x + A, \\ y' = y, \end{cases}$ на породжуючу функцію:

$$G_V(x + A, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{m,n}(x + A, y + B)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Диференціюємо в $A = 0$:

$$uG_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_x(V_{m,n}(x, y))\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Маємо

$$uG(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} uV_{m,n}(x, y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} =$$
$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} mV_{m-1,n}(x, y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}.$$

Звідси

$$D_x(V_{m,n}(x, y)) = mV_{m-1,n}(x, y),$$

і

$$D_x(v_{m,n}) = m v_{m-1,n}.$$

Аналогічно, діючи перетворенням $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + B, \end{cases}$ отримаємо, що відповідний оператор D_y діє таким чином:

$$D_y(U_{m,n}(x, y)) = n u_{m,n-1}.$$

Звідси зразу отримуємо дію цих операторів на V-моменти.

$\square$

Розв'язавши систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} D_x(F) = 0, \\ D_y(F) = 0, \end{cases}$$

де F – функція від змінних $v_{0,0}, v_{1,0}, v_{0,1}, v_{2,0}, v_{1,1}, v_{0,2}$ знаходимо 4 моментні інваріанти відносно групи паралельних перенесень порядку не більше 2 :

$$v_{0,0}, \frac{v_{0,0}v_{0,2} - {v_{0,1}}^2}{v_{0,0}}, \frac{v_{0,0}v_{1,1} - v_{0,1}v_{1,0}}{v_{0,0}}, \frac{v_{0,0}v_{2,0} - {v_{1,0}}^2}{v_{0,0}}.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті, для пари бі-ортогональних сімей многочленів Ерміта, задачу знаходження моментних інваріантів зведено до задачі розв'язання деякого диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку, яке виникає при переході від дії групи Лі до дії її алгебри Лі. Для кожної із згаданих груп знайдено явний вигляд дії її алгебри Лі на моменти Ерміта і вказані явно моментні інваріанти невеликих порядків. Запропонований підхід дозволяє обчислити моментні інваріанти вищих порядків.

Ідеї, які реалізовано в статті, в подальших дослідженнях можна поширити для обчислення спільних моментних інваріантів кількох груп перетворень площини, а також для знаходження моментних інваріантів $3D$ зображень.

Результати обчислень можуть бути корисними фахівцям з розпізнавання образів, оскільки моменті інваріанти є глобальними ознаками зображень.

Список використаної літератури

1. Hu M. K. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory.* 1962. Vol. 8. No. 2. P. 179–187.
2. Pawlak M. Image Analysis by Moments: Reconstruction and Computational Aspects. Wroclaw University of Technology Press., 2006. 212 p.
3. Papakostas G. A. Over 50 Years of Moments and Moment Invariants. *In Moments and Moment Invariants – Theory and Applications. Science Gate.* 2014. P. 3–32.
4. Flusser J., Suk T., Zitová, B. 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley and Sons, 2017. 548 p.
5. Mahbubur R., Howlader T., Hatzinakos D. Orthogonal Image Moments for Human-Centric Visual Pattern Recognition. Springer Singapore, 2019. 157 p.
6. Flusser J. On the independence of rotation moment invariants. *Pattern Recognition.* 2000. Vol. 33. No. 9. P. 1405–1410.
7. Bedratyuk L. 2D Geometric Moment Invariants from the Point of View of the Classical Invariant Theory. *J Math Imaging Vis.* 2020. 62. P. 1062–1075.
8. Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition.* 2022. Vol. 127, 108607.
9. Hermite M. Sur un nouveau développement en série des fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1865. Vol. 58. P. 266–273.
10. Yang B., Li G., Zhang H., Dai M. Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters.* 2011. Vol. 32, No. 2. P. 1283–1298.
11. Chong C. W., Raveendran P., Mukundan R. Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition.* 2004. Vol. 37. No. 1. P. 119–129.
12. Mukundan R., Ong S. H., Lee P. A. Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on Image Processing,* 2001. Vol. 10, No. 9. P. 1357–1364.

Bedratyuk L. P., Bedratyuk A. I. Image Hermite moments and their invariants.

Let H be a subgroup of the plane affine group o $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$, which is considered with its natural action on the integrated functions of two variables defined in some domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. For a fixed family of polynomials $\{P_{m,n}(x,y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ consider the functional

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,n}(f) = \iint\limits_{\Omega} P_{m,n}(x,y) f(x,y) dxdy,$$

which is called the P-moment of the function $f(x,y)$ of order $m+n$. The action of the group H defined on the P-moments according to the formula

$$h\pi_{m,n}(f) = \pi_{m,n}(h^{-1}f) \iint\limits_{\Omega} P_{m,n}(x,y) f(h^{-1}(x,y)) dxdy, h \in H.$$

The invariants of this action are called the P-moment invariants. If the function $f(x,y)$ is identified with a halftone image, and for the group H we take the group of rotations, the scaling group or the plane translation group, then the corresponding moments and their moment invariants are widely used in the pattern recognition. The problem of a complete description of moment invariants is solved only in the simplest case $P_{m,n}(x,y) = x^m y^n$. In this article, for a pair of bi-orthogonal families of Hermite polynomials, the problem of finding theirs moment invariants is reduced to the problem of solving some first order partial differential equation, which occurs during the transition from the action of the Lie group to the action of its Lie algebra. For each of the mentioned groups, an explicit form of the action of its Lie algebra on the Hermite moments are found and the moment invariants of small orders are found in an explicit way.

Keywords: pattern recognition, feature engineering, plane transformation groups, Hermite polynomials, image moments, image moment invariants.

References

1. Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory,* 8(2), 179–187.
2. Pawlak, M. (2006). *Image Analysis by Moments: Reconstruction and Computational Aspects.* Wroclaw University of Technology Press.
3. Papakostas, G. A. (2014). Over 50 Years of Moments and Moment Invariants. *In Moments and Moment Invariants – Theory and Applications. Science Gate,* 3–32.
4. Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2017). *2D and 3D Image Analysis by Moments.* John Wiley and Sons.
5. Mahbubur, R., Howlader, T., & Hatzinakos, D. (2019). *Orthogonal Image Moments for Human-Centric Visual Pattern Recognition.* Springer Singapore.
6. Flusser, J. (2000). On the independence of rotation moment invariants. *Pattern Recognition,* 33(9), 1405–1410.
7. Bedratyuk, L. (2020). 2D Geometric Moment Invariants from the Point of View of the Classical Invariant Theory. *J Math Imaging Vis.,* 62, 1062–1075.
8. Bedratyuk, L., Flusser, J., Suk, T., Kostkova, J. & Kautsky, J. (2022). Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition,* 127, 108607.
9. Hermite, M. (1865). Sur un nouveau développement en série des fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris,* 58, 266–273.
10. Yang, B., Li, G., Zhang, H., & Dai, M. (2011). Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*, 32(2), 1283–1298.
11. Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2004). Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition,* 37(1), 119–129.
12. Mukundan, R., Ong, S. H., Lee, P. A. (2011). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on Image Processing,*10(9), 1357–1364.

Одержано 30.07.2022